دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده مهندسی هوافضا

پایان‌نامه دکتری مهندسی هوافضا-گرایش سازه‌های هوایی

محاسبه افت سختی سازه‌های صفحه‌ای کامپوزیتی جدار نازک در مرحله پس از کمانش با استفاده از روش حل تحلیلی نوار محدود

نگارش
سید امیر مهدی قنادپور

استاد راهنما
دکتر حمید رضا اویسی

آبان ماه ۱۳۸۷

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی‌تکنیک تهران)

بسمه تعالی

فرم اطلاعات پایان‌نامه
کارشناسی- ارشد و دکترا

تاریخ:
شماره:

معاونت پژوهشی
فرم پروژه تحصیلات تکمیلی ۷

مشخصات دانشجو:

نام و نام خانوادگی: سید امیر مهدی قنادپور دانشجوی آزاد ● بورسیه ○ معادل ○

شماره دانشجوئی: ۸۲۲۲۹۹۵۵ دانشکده: مهندسی هوافضا رشته تحصیلی: هوافضا گروه: سازه‌های هوایی

مشخصات استاد راهنما:

نام و نام خانوادگی: دکتر حمید رضا اویسی درجه و رتبه: دانشیار

نام و نام خانوادگی: درجه و رتبه:

مشخصات استاد مشاور:

نام و نام خانوادگی: درجه و رتبه:

نام و نام خانوادگی: درجه و رتبه:

عنوان پایان‌نامه به فارسی : محاسبه افت سختی سازه‌های صفحه‌ای کامپوزیتی جدار نازک در مرحله پس از کمانش با استفاده از روش حل تحلیلی نوار محدود

عنوان پایان‌نامه به انگلیسی: Reduced Stiffness Calculation of Composite Prismatic Plate Structures Using Analytical Finite Strip Method

نوع پروژه: کارشناسی○ ارشد○ دکترا ● سال تحصیلی:

کاربردی ● بنیادی○ توسعه‌ای ● نظری○

تاریخ شروع : ۱۳۸۵ تاریخ خاتمه : ۱۳۸۷/۸/۸ تعداد واحد : سازمان تأمین کننده اعتبار :

واژه‌های کلیدی به فارسی: کمانش، پس از کمانش، افت سختی، کامپوزیت، ون-کارمن

واژه‌های کلیدی به انگلیسی : Buckling, Post-buckling, Reduced Stiffness, Composite, Von-Karman

مشخصات ظاهری	تعداد صفحات ۲۲۲	تصویر○ جدول● نمودار● نقشه ○ واژه‌نامه ○	تعداد مراجع ۱۵۰	تعداد صفحات ضمائم ۸
زبان متن	فارسی ●	انگلیسی ○	چکیده	فارسی ● انگلیسی ●
یادداشت				

نظرها و پیشنهادها به منظور بهبود فعالیت‌های پژوهشی دانشگاه

استاد:

دانشجو:

امضاء استاد راهنما: **تاریخ:**

۱ : ارائه به معاونت پژوهشی به همراه یک نسخه الکترونیکی از پایان‌نامه و فرم اطلاعات پایان‌نامه بصورت PDF همراه چاپ چکیده (فارسی انگلیسی) و فرم اطلاعات پایان‌نامه
۲ : ارائه به کتابخانه دانشکده (شامل دو جلد پایان نامه به همراه نسخه الکترونیکی فرم در لوح فشرده طبق نمونه اعلام شده در صفحه خانگی کتابخانه مرکزی)

چکیده

در رسالهٔ حاضر فرمولاسیون روش نوار محدود کاملاً تحلیلی جهت بررسی رفتار کمانش و پس از کمانش سازه‌های صفحه‌ای جدار نازک فلزی و ارتوتروپ ارائه شده است. میدانهای جابجایی در حالت کمانش و پس از کمانش نوار محدود مفروض در این پروژه، کاملاً بر اساس حل تحلیلی هر دو معادلهٔ تعادل و سازگاری ون-کارمن بدست آمده‌اند. شکل مودهای کمانشی از طریق حل معادلهٔ تعادل ون-کارمن بدست می‌آیند. حل معادلهٔ تعادل در نهایت به یک مسالهٔ مقدار ویژهٔ پیچیده منتهی می‌شود که حل آن از طریق روش‌های معمول مسائل مقدار ویژه مقدور نمی‌باشد. در مسائلی که به مسائل مقدار ویژهٔ پیچیده، ختم می‌شوند لازم است الگوریتمی توسعه داده شود که در آن بتوان تعداد مقادیر ویژهٔ کوچکتر از یک مقدار دلخواه و حدسی را محاسبه نمود. در این رساله، از معروف‌ترین و معتبرترین الگوریتم که هیچیک از مقادیر ویژه را از دست نمی‌دهد، استفاده شده است که با عـنوان الگوریتم W-W نام برده می‌شود. شایان ذکر است که الگوریتم W-W، مقدار مقادیر ویژه را محاسبه نمی‌کند بلکه تنها تعداد آنها را در یک بازه مشخص می‌نماید تا بتوان با استفاده از آن، الگوریتم‌هایی را بکار برد که بتوانند مقدار عددی مقادیر ویژه را نیز محاسبه کنند. در این رساله از دو روش مطمئن برای محاسبهٔ مقادیر و بردارهای ویژه به نام‌های روش تقسیمات متوالی و روش بازگشتی نیوتن استفاده شده است. پس از استخراج بار کمانشی و در نهایت شکل مود کمانشی، میدان جابجایی خارج از صفحه در مرحلهٔ پس از کمانش، بصورت ضرایبی از این شکل مودهای کمانشی (با عنوان ضرایب جابجایی)، فرض می‌گردد. با استفاده از میدان جابجایی مفروض برای شکل خارج از صفحه در حالت پس از کمانش، تابع تنش Airy از طریق حل معادلهٔ سازگاری ون-کارمن بدست می‌آید. میدان‌های جابجایی داخل صفحه نیز از تابع تنش محاسبه شده، استخراج می‌شوند. اگر در میدان جابجایی خارج از صفحه در مرحلهٔ پس از کمانش، تنها از یک مود کمانشی و آنهم از مود اول، استفاده شود آنالیز از نوع تک ترم می‌باشد که با این آنالیز مقدار افت سختی پس از کمانش در نقطهٔ کمانش بصورت دقیق محاسبه می‌شود. اما برای تخمین رفتار پس کمانشی، استفاده از مودهای کمانشی بیشتر در تخمین میدان جابجایی خارج از صفحه، مورد نیاز است. پس از محاسبهٔ میدان‌های جابجایی داخل صفحه، با استفاده از مبحث تعادل نیرویی در لبه‌ها، به استخراج ماتریس سختی هر نوار در مرحلهٔ پس از کمانش پرداخته می‌شود که پس از انجام فرآیند اسمبلی، می‌توان درجات آزادی میدان‌های جابجایی داخل صفحه را نیز محاسبه نمود. ضرایب جابجایی که در میدان‌های جابجایی وجود دارند و آنها را با عنوان ضرایب ریلی-ریتزی نیز می‌توان شناخت، توسط اصل مینیمم انرژی پتانسیل بدست می‌آیند. در این متد میزان حافظهٔ اشغال شده در کامپیوتر بسیار کم می‌باشد و از استفاده از روش‌های سعی و خطایی که برای حل دستگاه معادلات غیرخطی بکار گرفته می‌شوند، اجتناب شده است. نتایج حاصل از روش بسط داده شده در این پایان‌نامه با نتایج روش‌های متداول و مرسوم دیگر مانند روش المان محدود، نوار محدود نیمه تحلیلی و نوار محدود نیمه انرژی مقایسه شده و مزایا و معایب آن مورد بررسی قرار گرفته است.

فهرست مطالب

۱ تاریخچهٔ فعالیتهای گذشته ۱
۱-۱ تاریخچهٔ روش اجزاء محدود در علوم مهندسی ۳
۱-۲ تاریخچهٔ روش نوار محدود در مهندسی سازه ۴
۱-۳ مروری بر تحقیقات انجام پذیرفته در گذشته ۵
۱-۳-۱ آنالیزهای استاتیک خطی، کمانش و ارتعاشات ۵
۱-۳-۲ آنالیزهای غیرخطی هندسی ۱۰
۱-۴ دسته بندی تحقیقات گذشته، مزایا و معایب آنها ۲۷
۲ استخراج معادلات حاکم ۳۳
۲-۱ روابط متشکله برای مواد انیزوتروپ ۳۳
۲-۱-۱ قانون عمومی هوک ۳۳
۲-۱-۲ رابطهٔ متشکله برای یک مادهٔ ارتوتروپ ۳۵
۲-۱-۳ روابط متشکله برای یک تک لایه در حالت تنش صفحه‌ای ۳۶
۲-۲ معادلات متشکلهٔ چند لایه ۳۹
۲-۲-۱ روابط کرنش-جابجایی ۳۹
۲-۲-۲ نیروها و ممان‌های منتجه ۴۰
۲-۳ معادلات جابجایی‌های بزرگ ۴۳
۲-۳-۱ معادلهٔ تعادل ون-کارمن برای چند لایه‌ها ۴۳
۲-۳-۲ معادلهٔ سازگاری ون-کارمن برای چند لایه‌ها ۴۴
۲-۴ محاسبهٔ نیروها و گشتاورها در لبه‌های نوار ۴۵
۲-۵ محاسبهٔ انرژی پتانسیل نوار ۴۷
۲-۵-۱ انرژی کرنشی نوع اول ۴۷
۲-۵-۲ انرژی کرنشی نوع دوم ۴۸
۳ بسط فرمولاسیون روش نوار محدود کاملاً تحلیلی ۵۰
۳-۱ مفروضات حاکم ۵۰
۳-۲ محاسبهٔ بارها و مودهای کمانشی با حل معادلهٔ تعادل ون-کارمن ۵۲
۳-۲-۱ الگوریتم W-W ۵۸

۳-۲-۲ روش تقسیمات متوالی ۵۹
۳-۲-۳ روش بازگشتی نیوتن ۶۰
۳-۳ محاسبهٔ میدان‌های جابجایی داخل صفحه با حل معادلهٔ سازگاری ون-کارمن ۶۴
۳-۴ محاسبهٔ ضرایب جابجایی در مرحلهٔ پس از کمانش ۸۳
۳-۵ آنالیز تک ترم در جهات طولی و عرضی ۸۹
۴ بررسی نتایج ۹۳
۴-۱ استخراج و بررسی نتایج ۹۴
۴-۱-۱ تحلیل کمانش و پس از کمانش صفحات ایزوتروپ با آنالیز Single-term ۹۵
۴-۱-۲ تحلیل کمانش و پس از کمانش مقطع I شکل ایزوتروپ با آنالیز Single-term ۱۰۴
۴-۱-۳ تحلیل کمانش و پس از کمانش مقطع BOX شکل ایزوتروپ با آنالیز Single-term ۱۱۲
۴-۱-۴ تحلیل پس از کمانش صفحات ایزوتروپ با آنالیز Multi-term-y ۱۲۰
۴-۱-۵ تحلیل پس از کمانش مقطع BOX شکل ایزوتروپ با آنالیز Multi-term-y ۱۳۰
۴-۱-۶ تحلیل کمانش و پس از کمانش صفحات کامپوزیتی با آنالیز Single-term ۱۴۰
۴-۱-۷ تحلیل کمانش و پس از کمانش مقاطع کامپوزیتی با آنالیز Single-term ۱۵۱
۴-۱-۸ تحلیل پس از کمانش صفحات کامپوزیتی با آنالیز Multi-term-y ۱۶۲
۴-۱-۹ تحلیل پس از کمانش مقاطع کامپوزیتی با آنالیز Multi-term-y ۱۶۹
۴-۱-۱۰ تحلیل پس از کمانش صفحات ایزوتروپ با آنالیز Multi-term ۱۷۹
۵ نتیجه‌گیری و پیشنهادات ۱۸۵
پیشنهادات برای تحقیقات آینده ۱۸۷
۶ فهرست مراجع ۱۸۹
پیوست‌ها ۲۰۲
پیوست ۱: ماتریس سختی هر نوار محدود در حالت کمانش ۲۰۲
پیوست ۲: پاسخ خصوصی معادلهٔ سازگاری ون-کارمن ۲۰۵

فهرست اشکال

شکل ۱-۱: نمایش تفاوت روش‌های گوناگون در یافتن افت سختی پس از کمانش در لحظهٔ کمانش ۲۹

شکل ۲-۱: نمایش حالت تنش سه بعدی در یک جسم الاستیک ۳۵

شکل ۲-۲: نمایش یک لایهٔ ارتوتروپ دو بعدی در محورهای اصلی ۳۶

شکل ۲-۳: چرخش محورهای اصلی هر تک‌لایه به محورهای مرجع در چندلایه ۳۸

شکل ۲-۴: نیروها و ممان‌های منتجه بر روی یک چندلایه ۴۱

شکل ۲-۵: نمایش قرارگیری لایه‌ها در یک چندلایهٔ کامپوزیتی N لایه ۴۱

شکل ۲-۶: نمایش نیروها و گشتاورها بر روی یک المان تغییر شکل یافته از صفحه ۴۴

شکل ۲-۷: نمایش نیروها و گشتاورها بر روی یک المان نوار ۴۶

شکل ۴-۱: شکل مود کمانشی در جهت عرضی برای صفحهٔ C-F ۹۷

شکل ۴-۲: تغییرات سختی نسبی پس از کمانش و ضریب بی‌بعد کمانش با ضریب منظری برای صفحات با شرایط مرزی گوناگون ۹۹

شکل ۴-۳: تغییرات بی‌بعد بار بر حسب کوتاه شدگی انتهایی برای صفحهٔ C-F ۱۰۱

شکل ۴-۴: تغییرات بی‌بعد بار بر حسب جابجایی خارج از صفحه برای صفحهٔ C-F ۱۰۱

شکل ۴-۵: تغییر شکل خارج از صفحه در جهت عرضی و در $x = L/2$ برای صفحهٔ C-F در بار $P = 1.5\,P_{Cr}$ ۱۰۲

شکل ۴-۶: تغییر شکل خارج از صفحه در جهت طولی و در لبهٔ آزاد برای صفحهٔ C-F در بار $P = 1.5\,P_{Cr}$ ۱۰۳

شکل ۴-۷: هندسه و شکل یک نمونه مقطع I شکل ۱۰۴

شکل ۴-۸: تغییرات مینیمم ضریب بی‌بعد کمانش بر حسب نسبت عرض فلانج به وب ۱۰۷

شکل ۴-۹: تغییرات ضریب بی‌بعد کمانش با نسبت عرض فلانج به وب در یک مقطع I شکل برای سه نسبت مختلف ضخامت ۱۰۷

شکل ۴-۱۰: شکل مود کمانشی برای یک مقطع I شکل در سه نسبت مختلف ضخامت ۱۰۸

شکل ۴-۱۱: تغییرات سختی نسبی پس از کمانش با نسبت عرض فلانج به وب در مقطع I شکل ۱۱۰

شکل ۴-۱۲: تغییرات سختی نسبی پس از کمانش با نسبت عرض فلانج به وب در مقطع I شکل ۱۱۱

شکل ۴-۱۳: هندسه و شکل یک نمونه مقطع Box شکل ۱۱۲

شکل ۴-۱۴: تغییرات مینیمم ضریب بی‌بعد کمانش بر حسب نسبت عرض فلانج به وب ۱۱۴

شکل ۴-۱۵: تغییرات ضریب بی‌بعد کمانش با نسبت عرض فلانج به وب در یک مقطع Box شکل برای سه نسبت مختلف ضخامت..... ۱۱۵
شکل ۴-۱۶: شکل مود کمانشی برای یک مقطع Box شکل در سه نسبت مختلف ضخامت..... ۱۱۶
شکل ۴-۱۷: تغییرات سختی نسبی پس از کمانش در لحظهٔ کمانش با نسبت عرض فلانج به وب در مقطع Box شکل ایزوتروپ..... ۱۱۹
شکل ۴-۱۸: تغییرات بی‌بعد بار بر حسب کوتاه‌شدگی انتهایی برای صفحهٔ مربعی ایزوتروپ S-S..... ۱۲۲
شکل ۴-۱۹: نمایش همگرایی در روش F-a FSM برای صفحهٔ مربعی ایزوتروپ S-S..... ۱۲۳
شکل ۴-۲۰: تغییرات بی‌بعد بار بر حسب جابجایی مرکز صفحه برای صفحهٔ مربعی ایزوتروپ S-S..... ۱۲۳
شکل ۴-۲۱: تغییرات بی‌بعد بار بر حسب کوتاه‌شدگی انتهایی برای صفحهٔ مربعی ایزوتروپ C-S..... ۱۲۴
شکل ۴-۲۲: شکل مودهای کمانشی در جهت عرضی برای یک صفحهٔ C-S..... ۱۲۵
شکل ۴-۲۳: نمایش همگرایی در روش F-a FSM برای صفحهٔ مربعی ایزوتروپ C-S..... ۱۲۶
شکل ۴-۲۴: حالت بزرگنمایی شدهٔ همگرایی در روش F-a FSM برای صفحهٔ مربعی ایزوتروپ C-S.... ۱۲۶
شکل ۴-۲۵: تغییر شکل خارج از صفحه در جهت عرضی برای صفحهٔ مربعی ایزوتروپ C-S در $P = 2P_{Cr}$ ۱۲۷
شکل ۴-۲۶: تغییر شکل داخل صفحهٔ v_2 در جهات طولی برای صفحهٔ مربعی ایزوتروپ C-S در $P = 2P_{Cr}$ ۱۲۸
شکل ۴-۲۷: توزیع بی‌بعد تنش σ_x در جهت عرضی برای صفحهٔ مربعی ایزوتروپ C-S در $P = 2P_{Cr}$ ۱۲۹
شکل ۴-۲۸: تغییرات بی‌بعد بار بر حسب کوتاه‌شدگی انتهایی برای سازه‌ای با مقطع Box شکل ۱۳۱
شکل ۴-۲۹: شکل مودهای کمانشی در جهت عرضی برای سازه‌ای با مقطع Box شکل ۱۳۲
شکل ۴-۳۰: نمایش همگرایی در روش F-a FSM برای سازه‌ای با مقطع Box شکل..... ۱۳۳
شکل ۴-۳۱: حالت بزرگنمایی شدهٔ همگرایی در روش F-a FSM برای سازه‌ای با مقطع Box شکل..... ۱۳۳
شکل ۴-۳۲: تغییر شکل خارج از صفحه در جهت عرضی برای سازه‌ای با مقطع Box شکل در $P = 3P_{Cr}$ و آنالیز ۵ ترمه..... ۱۳۴
شکل ۴-۳۳: تغییر شکل خارج از صفحه در جهت عرضی برای سازه‌ای با مقطع Box شکل در $P = 3P_{Cr}$ با آنالیزهای گوناگون..... ۱۳۵
شکل ۴-۳۴: نمایش توزیع تنش σ_x در جهت عرضی برای سازه‌ای با مقطع Box شکل در $P = 3P_{Cr}$ و در $x = L/2$ ۱۳۶
شکل ۴-۳۵: نمایش توزیع تنش σ_x در جهت عرضی برای سازه‌ای با مقطع Box شکل در $P = 3P_{Cr}$ و در $x = L/4$ ۱۳۷

شکل ۴-۳۶: نمایش توزیع تنش σ_x در جهت عرضی برای سازه‌ای با مقطع Box شکل در $P = 3P_{Cr}$ و در $x = 0$ ۱۳۷
شکل ۴-۳۷: نمایش بی‌بعد تغییرات سختی نسبی پس از کمانش بر حسب بار برای سازه‌ای با مقطع Box شکل ۱۳۸
شکل ۴-۳۸: تغییرات سختی نسبی پس از کمانش و ضریب بی‌بعد کمانش با ضریب منظری برای صفحهٔ کامپوزیتی S-S ۱۴۴
شکل ۴-۳۹: تغییرات سختی نسبی پس از کمانش و ضریب بی‌بعد کمانش با ضریب منظری برای صفحهٔ کامپوزیتی C-C ۱۴۴
شکل ۴-۴۰: تغییرات سختی نسبی پس از کمانش و ضریب بی‌بعد کمانش با ضریب منظری برای صفحهٔ کامپوزیتی C-S ۱۴۵
شکل ۴-۴۱: تغییرات سختی نسبی پس از کمانش و ضریب بی‌بعد کمانش با ضریب منظری برای صفحهٔ کامپوزیتی C-F ۱۴۵
شکل ۴-۴۲: تغییرات سختی نسبی پس از کمانش و ضریب بی‌بعد کمانش با ضریب منظری برای صفحهٔ کامپوزیتی S-F ۱۴۶
شکل ۴-۴۳: تغییرات سختی نسبی پس از کمانش در لحظهٔ کمانش و ضریب بی‌بعد کمانش با ضریب منظری برای صفحات کامپوزیتی با شرایط مرزی گوناگون ۱۴۷
شکل ۴-۴۴: تغییرات سختی نسبی پس از کمانش در لحظهٔ کمانش و ضریب بی‌بعد کمانش با E_1/E_2 برای صفحهٔ کامپوزیتی S-S ۱۴۸
شکل ۴-۴۵: تغییرات سختی نسبی پس از کمانش در لحظهٔکمانش و ضریب بی‌بعد کمانش با E_1/E_2 برای صفحهٔ کامپوزیتی C-S ۱۴۸
شکل ۴-۴۶: تغییر علامت Δ_2 با تغییرات G_{12}/E_2 در نسبت‌های مختلف E_1/E_2 ..... ۱۴۹
شکل ۴-۴۷: تغییرات سختی نسبی پس از کمانش با G_{12}/E_2 در نسبت‌های مختلف E_1/E_2 برای صفحهٔ S-S ۱۵۰
شکل ۴-۴۸: ضریب بی‌بعد کمانش در نسبت‌های مختلف ضخامت برای سازه‌هایی با مقطع C شکل ۱۵۳
شکل ۴-۴۹: شکل مود کمانشی برای یک مقطع Box شکل در سه نسبت مختلف ضخامت ۱۵۵
شکل ۴-۵۰: ضریب بی‌بعد کمانش در نسبت‌های مختلف ضخامت برای سازه‌هایی با مقطع Box شکل ۱۵۷
شکل ۴-۵۱: تغییرات سختی نسبی پس از کمانش با نسبت عرض فلانج به وب در مقطع C شکل کامپوزیتی ۱۵۹

شکل ۴-۵۲: تغییرات سختی نسبی پس از کمانش با نسبت عرض فلانج به وب در مقطع Box شکل کامپوزیتی ۱۶۰
شکل ۴-۵۳: ضریب بی‌بعد کمانش در نسبت‌های مختلف ضخامت برای سازه‌هایی با مقطع Box شکل ۱۶۱
شکل ۴-۵۴: تغییرات بی‌بعد بار بر حسب کوتاه‌شدگی انتهایی برای صفحهٔ مربعی کامپوزیتی S-S..... ۱۶۴
شکل ۴-۵۵: تغییرات بی‌بعد بار بر حسب جابجایی مرکز صفحه برای صفحهٔ مربعی کامپوزیتی S-S..... ۱۶۴
شکل ۴-۵۶: نمایش همگرایی در روش F-a FSM برای منحنی بار-کوتاه‌شدگی انتهایی در صفحهٔ مربعی کامپوزیتی S-S ۱۶۵
شکل ۴-۵۷: نمایش همگرایی در روش F-a FSM برای منحنی بار-جابجایی مرکز صفحه در صفحهٔ مربعی کامپوزیتی S-S ۱۶۵
شکل ۴-۵۸: شکل مودهای کمانشی در جهت عرضی برای یک صفحهٔ مربعی کامپوزیتی S-S..... ۱۶۶
شکل ۴-۵۹: تغییر شکل خارج از صفحه در جهت عرضی برای صفحهٔ مربعی کامپوزیتی S-S در $P = 3P_{Cr}$ ۱۶۶
شکل ۴-۶۰: تغییر شکل داخل صفحهٔ v_2 در جهات طولی برای صفحهٔ مربعی کامپوزیتی S-S در $P = 3P_{Cr}$ ۱۶۷
شکل ۴-۶۱: توزیع بی‌بعد تنش σ_x در جهت عرضی برای صفحهٔ کامپوزیتی S-S در $P = 3P_{Cr}$ ۱۶۸
شکل ۴-۶۲: تغییرات بی‌بعد بار بر حسب کوتاه‌شدگی انتهایی برای سازه‌ای کامپوزیتی با مقطع Box شکل ۱۷۰
شکل ۴-۶۳: شکل مودهای کمانشی در جهت عرضی برای سازه‌ای کامپوزیتی با مقطع Box شکل..... ۱۷۱
شکل ۴-۶۴: نمایش همگرایی در روش F-a FSM برای سازه‌ای کامپوزیتی با مقطع Box شکل..... ۱۷۲
شکل ۴-۶۵: حالت بزرگنمایی شدهٔ همگرایی در روش F-a FSM برای سازه‌ای کامپوزیتی با مقطع Box شکل ۱۷۲
شکل ۴-۶۶: جابجایی خارج از صفحه در جهت عرضی برای سازه‌ای کامپوزیتی با مقطع Box شکل در $P = 3P_{Cr}$ و آنالیز ۵ ترمه ۱۷۴
شکل ۴-۶۷جابجایی خارج از صفحه در جهت عرضی برای مقطع Box شکل کامپوزیتی در $P = 3P_{Cr}$ با آنالیزهای گوناگون ۱۷۴
شکل ۴-۶۸: نمایش توزیع تنش طولی در جهت عرضی برای مقطع کامپوزیتی Box شکل در $P = 3P_{Cr}$ و در $x = L/2$ ۱۷۵
شکل ۴-۶۹: نمایش توزیع تنش طولی در جهت عرضی برای مقطع کامپوزیتی Box شکل در $P = 3P_{Cr}$ و در $x = L/4$ ۱۷۶

شکل ۴-۷۰: نمایش توزیع تنش طولی در جهت عرضی برای مقطع کامپوزیتی Box شکل در $P = 3P_{Cr}$ و در $x = 0$ ۱۷۶
شکل ۴-۷۱: نمایش بی‌بعد تغییرات سختی نسبی پس از کمانش بر حسب بار برای سازه‌ای کامپوزیتی با مقطع Box شکل ۱۷۷
شکل ۴-۷۲: تغییرات بی‌بعد بار بر حسب کوتاه‌شدگی انتهایی برای صفحهٔ مربعی ایزوتروپ S-S ۱۸۰
شکل ۴-۷۳: نمایش همگرایی در روش F-a FSM برای آنالیز Multi-term در یک صفحهٔ مربعی ایزوتروپ S-S ۱۸۱
شکل ۴-۷۴: حالت بزرگنمایی شدهٔ همگرایی در روش F-a FSM برای صفحهٔ مربعی ایزوتروپ S-S ۱۸۱
شکل ۴-۷۵: تغییر شکل خارج از صفحه در جهت عرضی برای صفحهٔ مربعی ایزوتروپ S-S در $P = 1.73837\,P_{Cr}$ ۱۸۲
شکل ۴-۷۶: تغییر شکل خارج از صفحه در جهت طولی برای صفحهٔ مربعی ایزوتروپ S-S در $P = 1.73837\,P_{Cr}$ ۱۸۳
شکل ۴-۷۷: توزیع بی‌بعد تنش σ_x در جهت عرضی برای صفحهٔ مربعی ایزوتروپ S-S در $P = 1.73837\,P_{Cr}$ ۱۸۴

فهرست جداول

جدول ۴-۱: نحوهٔ همگرایی در روش نیوتن بازگشتی برای صفحهٔ C-F ۹۶
جدول ۴-۲ : مقایسهٔ ضرایب بی‌بعد کمانش در دو روش F-a FSM و S-a FSM ۹۷
جدول ۴-۳ : مقایسهٔ نتایج سختی نسبی پس از کمانش در لحظهٔ کمانش در روش F-a FSM با نتایج مرجع [۹۹] ۹۹
جدول ۴-۴: نحوهٔ همگرایی در روش نیوتن بازگشتی ۱۰۵
جدول ۴-۵ : مقایسهٔ مینیمم ضرایب بی‌بعد کمانش در دو روش F-a FSM و S-e FSM ۱۰۶
جدول ۴-۶ : مقایسهٔ نتایج سختی نسبی پس از کمانش در لحظهٔ کمانش با دو روش F-a FSM و S-e FSM [۱۳۳] ۱۰۹
جدول ۴-۷: نحوهٔ همگرایی در روش نیوتن بازگشتی ۱۱۳
جدول ۴-۸ : مقایسهٔ نتایج سختی نسبی پس از کمانش در لحظهٔ کمانش با دو روش F-a FSM و S-e FSM [۱۳۳] ۱۱۷
جدول ۴-۹ : مقایسهٔ ضرایب بی‌بعدکمانش بین دو روش F-a FSM و S-a FSM و نتایج مرجع [۱۴۶] ۱۴۰
جدول ۴-۱۰ : مقایسهٔ ضرایب بی‌بعد کمانش در دو روش F-a FSM و S-a FSM ۱۴۱
جدول ۴-۱۱ : مقایسهٔ نتایج سختی نسبی پس از کمانش در لحظهٔ کمانش بین دو روش F-a FSM و S-a FSM ۱۴۳

فهرست علائم

$[A]$	ماتریس سختی داخل صفحه
$[B]$	ماتریس کوپلینگ نیروهای داخل و ممان‌های خارج از صفحه
$\underset{\sim}{\mathbf{D}}_1$	بردار ویژهٔ متناظر با μ
D_{1m}	mامین درایهٔ بردار $\underset{\sim}{\mathbf{D}}_1$
$[D]$	ماتریس سختی خارج صفحه
$\underset{\sim}{\mathbf{d}}_1$	بردار درجات آزادی میدان جابجایی خارج از صفحه
$\underset{\sim}{\mathbf{d}}_2$	بردار درجات آزادی میدان‌های جابجایی داخل صفحه
$\underset{\sim}{\mathbf{D}}_2$، $\underset{\sim}{\mathbf{F}}_2$، $\underset{\sim}{\mathbf{K}}_2$	اسمبل شدهٔ $\underset{\sim}{\mathbf{k}}_2$، $\underset{\sim}{\mathbf{f}}_2$ و $\underset{\sim}{\mathbf{d}}_2$ برای هر نوار محدود
F	تابع تنش
$f_{w1}(y)$	تابع شکلی در جهت عرض نوار محدود
$f^{p}_{q_{w1}}(y)$	تابع عرضی مود کمانشی qام (متناظر با p نیم در جهت طولی)
f_q	تابع عرضی مود کمانشی
$f^{u2}_{p+r\ prqs}(y), f^{u2}_{r-p\ prqs}(y)$	توابع عرضی در میدان جابجایی u_2
$f^{\upsilon 2}_{p+r\ prqs}(y), f^{\upsilon 2}_{r-p\ prqs}(y)$	توابع عرضی در میدان جابجایی υ_2
$\underset{\sim}{\mathbf{f}}_2$	برداری شامل حل خصوصی معادلات دیفرانسیلی
$g^{\upsilon 2}_{p\ pqs}(y)$	
$g^{\upsilon 2}_{p+r\ prqs}(y)$	
$g^{\upsilon 2}_{r-p\ prqs}(y)$	توابع عرضی دیگر در میدان جابجایی υ_2
J	تعداد مقادیر ویژه تا یک مقدار دلخواه
$J(N_t^w)$	تعداد مقادیر ویژهٔ مثبت کمتر از N_t^w
$J_s(N_t^w)$	تعداد مقادیر ویژهٔ هر نوار کمتر از مقدار دلخواه N_t^w که دو لبهٔ آنها بصورت گیردار باشد
$\underset{\sim}{\mathbf{k}}_1$	ماتریس سختی هر نوار محدود در حالت کمانش
$\underset{\sim}{\mathbf{K}}_1$	ماتریس سختی کل سازه در حالت کمانش
$\underset{\sim}{\mathbf{K}}_1^{\Delta}$	ماتریس بالا مثلثی $\underset{\sim}{\mathbf{K}}_1$

$\underset{\sim}{\mathbf{K}}''_{1a}, \underset{\sim}{\mathbf{K}}'_{1a}$	اسمبل شدهٔ مشتق‌های اول و دوم ماتریس سختی هر نوار
K	ضریب بی بعد کمانش
K_w	ضریب بی بعد کمانش web
M_x, M_y, M_{xy}	ممان‌های منتجه
N_x, N_y, N_{xy}	نیروهای منتجه
N_s	تعداد نوارهای محدود بکار رفته در سازه
N^w	معرف نیروی منتجه برای نوار بکار رفته در web سازه
N_t^w	یک مقدار دلخواه از نیروی منتجه
N_a^w	بهترین تخمین موجود از نیروی بحرانی دقیق N_g^w
N_g^w	نیروی بحرانی دقیق
N_{Cl}^w	مقدار ویژهٔ نوارهای دو لبه گیردار
n_r	تعداد نیروهای بحرانی
n_{r0}	تعداد نیروهای منتجه برای نوارهای دو لبه گیردار
P	کل نیروی فشاری داخل صفحه در جهت x
$\underset{\sim}{\mathbf{p}}_2$	بردار نیروهای داخل صفحه
P_x, P_y, P_z, M_y	نیروی برشی درون صفحه، نیروی درون صفحه‌ای در جهت عرض، نیروی برشی خارج از صفحه و ممان خمشی بر واحد طول
$[\overline{Q}]$	ماتریس سختی کاهش یافته و انتقال یافته
$[Q]$	ماتریس سختی کاهش یافته
$[S]$	ماتریس نرمی کاهش یافته
$sg\{\}$	تابعی است که sign count نامیده می‌شود
S	سختی قبل از کمانش
S^*	سختی پس از کمانش
$[T]$	ماتریس انتقال
$Tol1, Tol2, Tol3$	معیارهای همگرایی
$u_{2j\,p+r\,prqs}$ ، $u_{2i\,p+r\,prqs}$	درجات آزادی میدان‌های جابجایی داخل صفحه
$u_{2j\,r-p\,prqs}$ ، $u_{2i\,r-p\,prqs}$	
$\upsilon_{2j\,p+r\,prqs}$ ، $\upsilon_{2i\,p+r\,prqs}$	
$\upsilon_{2j\,r-p\,prqs}$ و $\upsilon_{2i\,r-p\,prqs}$	

U_s	انرژی کرنشی نوار
U_b	انرژی کرنشی خمشی
U_m	انرژی کرنشی غشایی
V_s	کل انرژی پتانسیل نوار
$w_{1pq}(x,y)$	تابع شکل مود کمانشی با p نیم موج در طول و q نیم موج در عرض
$w_{1i}, \theta_{1i}, w_{1j}, \theta_{1j}$	درجات آزادی میدان جابجایی خارج از صفحه
$X_n(x), Y_n(y)$	توابع شکلی طولی و عرضی
δ_{pq}	ضرایب مربوط به مودهای کمانشی
Δ_2	دلتای معادلات مشخصهٔ معادلهٔ سازگاری
ε	میزان کرنش کوتاه‌شدگی در انتهای نوار
$\Phi_{r-p\ prqs}, \Phi_{p+r\ prqs}$	تغییر متغییر تابع تنش در حالت پس از کمانش
$\Phi^h_{r-p\ prqs}, \Phi^h_{p+r\ prqs}$	پاسخ خصوصی معادلهٔ سازگاری
$\Phi^g_{r-p\ prqs}, \Phi^g_{p+r\ prqs}$	پاسخ عمومی معادلهٔ سازگاری
ϕ	تابع تغییر مکان
$\phi = L/b$	ضریب منظری صفحه
μ	مقدار ویژه
Ω_s	انرژی پتانسیل نیروهای خارجی

۱

تاریخچهٔ فعالیتهای گذشته

کاهش وزن در سازه‌های هوایی همواره یکی از چالشهای عظیمی بوده که متخصصان صنایع هوافضا با آن درگیر بوده‌اند. از این رو همواره متخصصان علاقه داشته‌اند تا با به کارگیری روشهای بهینه طراحی و استفاده از مواد دارای خواص مکانیکی بالا و وزن کم به این نیاز پاسخ مناسبی ارائه دهند. با توسعهٔ تکنولوژی ساخت کامپیوترها با سرعت‌های بالا این امکان جهت محققان فراهم شده است که تحلیلهای پیچیده مهندسی را با روشهای عددی و دقت بسیار بالا در حدود بسیار نزدیک به جواب واقعی به دست آوردند و در نتیجه طراحی هایی بسیار بهینه صورت گیرند که در نتیجهٔآن می‌توان شاهد پیدایش هواپیماهای ابرصوت، موشکهای قاره‌پیما و ماهواره‌ها بود. یکی از روشهای عددی که در مهندسی سازه کاربرد فراوانی دارد روش اجزاء محدود[1] است که تحقیقات بسیاری در این‌زمینه صورت گرفته است و این روش امروزه با توجه به وسعت پیشرفت آن در حد یک علم مطرح می‌باشد. مهمترین ایده در این روش تقسیم میدان محاسباتی به یک سری میدانهای کوچکتر و درحقیقت تکه تکه کردن[2] میدان و حل معادلات مطلوب بر روی اجزاء کوچکتر و سپس یافتن پاسخ معادله به صورت تقریبی برروی کل میدان می‌باشد.

عمده‌ترین روش در کاهش وزن در سازه‌های هوایی استفاده از سازه‌های جدار نازک می‌باشد که در حقیقت این نوع سازه‌ها دارای ضخامت بسیار کمی نسبت به سایر ابعاد سازه دارا می‌باشند. یکی از معیارهای اصلی طراحی سازه‌های جدارنازک معیار کمانش می‌باشند. کمانش پدیده‌ای است که گاهاً می‌تواند موجب ناپایداری سازه و شکست آن گردد اما در حالات خاص همچون کمانش موضعی مقاطع جدارنازک، رفتار پس از کمانش سازه پایدار می‌باشد. از این رو طراحان سازه‌های هوافضا علاقه‌مند می‌باشند که به منظور کاهش

[1] Finite Element Method
[2] Discretizing

وزن این نوع سازه‌ها به آنها اجازه کمانش موضعی دهند تا سازه بتواند تا محدوده مجاز نیز وارد ناحیه پس از کمانش گردد ولذا محاسبهٔ میزان افت سختی سازه در این مرحله، و شناخت رفتار سازه در مرحله پس از کمانش تا محدودهٔ بارهای مجاز که سازه وارد محدودهٔ پلاستیک نشود (حدوداً تا دو برابر بار بحرانی کمانش)، بمنظور طراحی مناسب سازه مورد نیاز می‌باشد. البته این امر نیازمند محاسبات بسیار دقیق و پیچیده به منظور شناسایی رفتار سازه در ناحیه پس از کمانش است. از آنجا که رفتار پس از کمانش سازه‌های جدارنازک یک رفتار غیرخطی هندسی است آنالیزهای لازم بسیار پیچیده می‌باشند. معادلات مربوط به سازگاری و تعادل سازه‌های جدارنازک برای اولین بار توسط ون-کارمن[1] در سال ۱۹۱۰ مطرح شد که با حل این معادلات برای شرایط مرزی خاص مسالهٔ رفتار پس از کمانش سازه مشخص می‌گردد. از آنجاکه این معادلات کاملاً غیرخطی از مرتبه چهار می‌باشند و تاکنون جواب کلی این معادلات یافت نشده است و در تحقیقات انجام شده فقط برای حالت‌های خاص و شرایط مرزی ساده جواب این معادلات مشخص است لذا همانگونه که مشاهده می‌گردد ارائه پاسخ دقیق و معتبر از رفتار ناحیه پس از کمانش و محاسبه افت سختی سازه در این مرحله، امری بسیار مهم در طراحی سازه‌های جدارنازک در دفاتر طراحی می‌باشد.

از روشهای دیگری که محققان و طراحان صنایع هوافضا برای کاهش وزن سازه‌های جدارنازک بکار گرفته‌اند استفاده از مواد کامپوزیتی در ساختار این نوع سازه‌ها می‌باشد. این نوع مواد عموماً دارای وزنی بسیار سبکتر از مواد فلزی می‌باشند و قابلیت بالای آنها همچون مقاومت در برابر خوردگی، رطوبت، خواص انیزوتروپی ... باعث شده که طراحان صنایع هوافضا علاقه خاصی به این نوع مواد نشان دهند. پارامترهای بسیار مختلفی بر رفتار مواد کامپوزیت تاثیرگذارند که به عنوان نمونه می‌توان به نسبت انیزوتروپی، وضعیت آرایش لایه‌ها و مدول‌های اصلی و فرعی ... اشاره کرد. در نتیجه تحلیل پس از کمانش سازه‌های جدارنازک کامپوزیتی به مراتب پیچیده‌تر از سازه‌های فلزی مشابه می‌باشد.

در گزارش حاضر در ابتدا با مروری بر تاریخچهٔ روشهای عددی و فعالیت‌های انجام شده در تحلیل رفتار کمانش و پس از کمانش سازه‌های جدارنازک و در نهایت نتیجه‌گیری از این فعالیت‌ها، تعریف پروژهٔ حاضر با هدف رفع نواقص روشهای تحلیل موجود و تکامل فعالیت‌های گذشته مطرح می‌گردد. در فصل‌های بعد به ارائه فرمولاسیون تئوری مطرح شده در خصوص سازه‌های صفحه‌ای کامپوزیتی پرداخته شده و در نهایت در فصل نتایج، بر روی نتایج استخراج شده توسط این روش، بحث و بررسی انجام شده است.

[1] Von Kármán

۱-۱ تاریخچهٔ روش اجزاء محدود در علوم مهندسی

می‌توان گفت ایدهٔ تقسیم یک میدان به میدانهای کوچکتر جهت انجام محاسبات ریاضی اولین بار توسط ریاضیدانان یونان باستان مطرح شد. آنها به منظور محاسبهٔ عدد π با تقسیم محیط دایره به یک سری چند ضلعی‌های منتظم محاط در دایره و همچنین یک سری چند ضلعی منتظم محیط بر دایره و افزایش تعداد اضلاع به منظور افزایش دقت همگرایی، عدد π را با دقت چهل رقم اعشار محاسبه کردند. اما ایدهٔ روش اجزاء محدود به شکل امروزی اولین بار توسط Courant [۱] در سال ۱۹۴۳ مطرح شد. او با استفاده از توابع تکه تکه پیوسته و همچنین مفهوم انرژی پتانسیل مینیمم مساله پیچش سنت ونانت در مقاطع را بررسی کرد. مفهوم ماتریسهای سختی توسط Turner [۲] و همکاران در سال ۱۹۵۶ ابداع شد و بدین وسیله گام بسیار ارزنده‌ای در ماتریسی کردن محاسبات توسط آنها برداشته شد. واژهٔ اجزاء محدود اولین بار توسط Clough [۳] در سال ۱۹۶۰ بیان شد. پس از گذشت ده سال از ابداع این روش بیش از هزار مقاله در زمنیهٔ روش اجزاء محدود درمجلات علمی و کنفرانسها ارائه شد [۴]. در طول دو دههٔ بعد با رشد سریع کامپیوترهایی با سرعت بالا و شکوفایی روش اجزاء محدود درحوزه‌های مختلف علوم مهندسی تعداد مقالات ثبت شده در بانک اطلاعاتی Compendex-Plus در این زمینه به بیش از پنجاه هزار مقاله رسید. استفاده از روش اجزاء محدود در زمینه‌های دیگر مهندسی مکانیک بجز مکانیک جامدات توسط Zienkiewicz و Cheung [۵] در سال ۱۹۶۵ مطرح شد. آنها روش اجزاء محدود را جهت حل مسایل میدان شامل معادلات لاپلاس و پواسن (انتقال حرارت پایا و میدان سیال پتانسیل...) تعمیم دادند. در چند دههٔ اخیر پیشرفتهای فراوانی در ارائه روشهای عددی در زمینه‌های مختلف علوم مهندسی صورت گرفته است که روش اجزاء محدود به عنوان یک روش اساسی همواره در مهندسی سازه مدنظر بوده است. از ویژگیهای روش اجزاء محدود حجم بالای محاسبات مورد نیاز جهت تحلیل عددی در این روش می‌باشد که جهت حل مسایل کاربردی نیاز به کامپیوترهایی با توانایی انجام حجم محاسبات بسیار بالا می‌باشد. با توجه به مشکلاتی که در انجام محاسبات برای محققان پیش آمد روشهای مختلفی جهت رفع این مشکل پیشنهاد شد.

نتیجهٔ این تحقیقات منجر به پیدایش شاخه‌های جدیدی از روش اجزاء محدود همانند روش نوار محدود[1] و یا روش المانهای مرزی[2] شد که در ادامه تارخچهٔ روش نوار محدود مختصراً ارائه شده و در بخش مروری بر تحقیقات گذشته به بررسی تحقیقات انجام پذیرفته توسط روش نوار محدود و روشهای تحلیلی دیگر پرداخته می‌شود.

[1] Finite Strip Method
[2] Boundary Element Method

۲-۱ تاریخچهٔ روش نوار محدود در مهندسی سازه

روش نوار محدود، یک فرآیند محاسباتی بسیار قوی برای آنالیز کمانش و یافتن پاسخ غیرخطی صفحات و سازه‌های صفحه‌ای منشوری میباشد. سازه‌هایی که با استفاده از این روش بصورت کاملاً موثر می‌توانند مورد آنالیز قرار گیرند، پنلهای تقویت شده و ستونهایی با شکل مقاطع مختلف مانند I، C، Z، Box شکل و ... می‌باشند.

ایده اساسی که روش نوار محدود از آن بهره مند میشود همان روش المان محدود میباشد با این تفاوت که در روش نوار محدود از یک نوع المان خاص بنام نوار استفاده میگردد. هر نوار محدود به ازای طولی معادل با طول کل سازه و عرضهای کوچک و محدود مشخص میشود که یک سازه کاملاً پیچیده را میتوان با ترکیب چندین نوار محدود در جت عرضی مدلسازی نمود. در مقایسه با روش المان محدود که از توابع چند جمله‌ای ساده برای تخمین میدان جابجایی در داخل هر المان استفاده میکند، روش نوار محدود از توابع مثلثاتی یا توابع اسپلاین[1] برای تخمین میدان جابجایی در داخل نوار در جهت طولی و از توابع چند جمله‌ای ساده (مانند روش المان محدود) در جهت عرضی هر نوار استفاده میکند. توابع طولی برای ارضاء شرایط مرزی در دو انتهای طولی نوار و توابع چند جمله‌ای برای شبیه سازی هرگونه شرایط مرزی دلخواه بر روی لبه های نوار مورد استفاده قرار میگیرند. ایدهٔ این روش تخمین همانند ایدهٔ روش جداسازی متغیرها در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی است که توسط Kantorovich [۶] در سال ۱۹۵۸ پیشنهاد شد.

همانگونه که در منابع مختلف [۷] ذکر گردیده، روش نوار محدود برای نوع خاصی از سازه‌ها (سازه‌های صفحه‌ای منشوری و صفحات و ...) در مقایسه با روش المان محدود، بسیار موثرتر و دقیقتر می‌باشد. توضیحات کاملی از کاربردهای روش نوار محدود برای حل کمانش، ارتعاشات و مسائل غیرخطی هندسی در مرجع [۷] ارائه گردیده که در آن به انواع خاص مسئله وابسته به نوع تکنیکهای حل یا نوع تئوریهای صفحات بکار گرفته شده در آنالیزهای مختلف اشاره شده است. تئوریهای بکار گرفته شده در آنالیزهای مختلف، تئوری کلاسیک خمشی صفحات[2] و یا تئوریهای تغییر شکل برشی صفحات[3] می‌باشند. در ذیل به مروری بر تحقیقات انجام شده در زمینهٔ آنالیزهای استاتیک خطی، کمانش، ارتعاشات و آنالیزهای غیرخطی بصورت جداگانه پرداخته می‌شود.

[1] Spline
[2] Classical Laminate Plate Theory
[3] Shear Deformation Plate Theory

۱-۳ مروری بر تحقیقات انجام پذیرفته در گذشته

۱-۳-۱ آنالیزهای استاتیک خطی، کمانش و ارتعاشات

روش نوار محدود از حدود بیش از ۳۰ سال پیش برای حل مسائل استاتیک خطی و کمانش و ارتعاشات مورد استفاده قرار گرفته است. در این بخش، یک دوره مختصر از فعالیتهای انجام شده با استفاده از روش نوار محدود در زمینه‌های فوق ارائه خواهد شد. در سال ۱۹۶۸، Wittrick [۸] ماتریسهای سختی داخل صفحه و خارج صفحه را برای یک صفحه بدست آورد. صفحه‌ای که Wittrick مورد بررسی قرار داده بود در حالت تنش صفحه‌ای قرار داشت و شکل مود کمانش آن در جهت طولی بصورت سینوسی فرض شده بود و هیچ فرض مشخصی برای نوع توابع میدان جابجایی در جهت عرضی وجود نداشت. این مفروضات همانند روشی که Kantorovich مورد استفاده قرار داده بود [۶]، تنها اجازه میداد که معادلات دیفرانسیل جزئی به معادلات دیفرانسیل معمولی قابل حل تبدیل شوند. سرانجام این کارها توسط Williams و Wittrick در سال ۱۹۶۹ پیگیری و منجر به آنالیز سازه‌هایی شد که از چندین صفحه ساخته شده بودند [۱۰،۹]. فرآیندی که Williams و Wittrick در پیش گرفته بودند روش نوار محدود دقیق[1] نامیده میشود. در تحقیقات آنها ماتریسهای سختی بدست آمده، بصورت ماتریسهای جبری نبوده و بصورت توابع پیچیده‌ای از بار کمانش بودند ولذا برای آنالیز مقدار ویژه از روشهای معمول که تنها برای ماتریسهای جبری کاربرد دارند، نمی‌شد استفاده نمود. بدست آوردن شکل مود کمانش در جهت عرضی و استخراج بار کمانش برای تحقیقات آنها، دارای نوآوریهای خاصی بود که Williams و Wittrick در مراجع [۱۱-۹] بصورت مفصل آنها را توضیح داده‌اند.

در سال ۱۹۶۸، Cheung [۱۳،۱۲] روش نیمه تحلیلی نوار محدود[2] را گسترش داد. در این روش میدان‌های جابجایی در جهت طولی با توابع تحلیلی (Sin , Cos , Sinh , Cosh) تخمین زده می‌شدند که بتوانند شرایط مرزی در دو انتهای نوار را ارضاء نمایند. توابع میدانهای در جهت عرضی نوار نیز مانند روش المان محدود، توابع چند جمله‌ای ساده بودند. Cheung با بکارگیری این توابع و با استفاده از اصل مینیمم انرژی پتانسیل و در نهایت با روی هم گذاشتن نوارها از جهات طولی و در کنار هم، به دستگاهی از معادلات جبری دست یافت که با حل این معادلات، پاسخ کل سازه قابل بررسی بود. این روش برای آنالیز استاتیک خطی و برای بررسی خمش صفحات نازک چندین صفحه ارتوتروپ و ایزوتروپ با شرایط مرزی انتهایی لولایی

[1] Exact Finite Strip
[2] Semi-Analytical Finite Strip

و درگیر بکار گرفته شده بود. Cheung در کارهای خود اذعان داشت که زمان محاسباتی این روش در مقایسه با روش المان محدود بسیار کمتر بوده است.

Ogden و Powell [۱۴] نیز در سال ۱۹۶۹ رفتار خمشی صفحات ارتوتروپیک را مورد بررسی قرار دادند. Cusense و Loo در سال ۱۹۷۱ باتعریف نوارهای محدود با مرتبهٔ بالاتر دقت بررسی رفتار خمشی صفحات را افزایش دادند آنها با تعریف یک خط گره‌ای در میان نوار و تعریف درجات آزادی برروی آن، نوار مرتبهٔ ۲ را بدست آوردند [۱۶،۱۵]. اعمال روش نوار محدود برروی صفحات لوزی شکل یا در حقیقت ارائه یک نوار لوزی شکل توسط Ghali و Brown [۱۸،۱۷] در سال ۱۹۷۲ صورت گرفت.

در سال ۱۹۷۳، Przemieniecki [۱۹] فرآیندی را مشابه با فرآیند Cheung گسترش داد که از آن برای آنالیز پایداری موضعی[1] سازه‌های صفحه‌ای منشوری استفاده کرد. روش کار مجازی مطابق با تکنیکهای روش المان محدود برای بدست آوردن معادلات رفتار هر نوار محدود توسط Przemieniecki بکار گرفته شد. Przemieniecki نیز مانند Cheung برای میدان جابجایی نوار محدود در جهت طولی از توابع مثلثاتی و در جهت عرضی آن از توابع چند جمله‌ای استفاده کرد. وی در کارهای خود تئوری کلاسیک خمشی صفحات (CLPT) را بکار گرفت و فرضیاتی را مطرح ساخت که مطابق با آن فرضیات، هر یک از صفحاتی که سازه را تشکیل می دادند در حین کمانش مجاز به حرکت در داخل صفحه خودشان نبودند و تقاطع بین صفحات در فضا ثابت باقی می ماند و نوارهای محدود بکار گرفته شده در سازه باید دارای طولی معادل با طول موج کمانش می بودند. این مفروضات تنها حالتی از تغییر شکل را به صفحات سازه اجازه میداد که شامل چرخش حول لبه های آنها میشد.

در مواجهه با روش Williams و Wittrick (روش نوار محدود دقیق)، هر دو روش Cheung و Przemieniecki (روش نوار محدود نیمه تحلیلی) نیازمند بکارگیری چندین نوار محدود که از لبه‌های کناری روی هم گذاشته میشوند، میباشد که بتواند پاسخ یک صفحه را بدست آورد. البته علت این امر بکارگیری توابع چند جمله‌ای ساده در تخمین میدان جابجایی در جهت عرضی نوار میباشد و لذا مانند روش المان محدود نیاز به تعداد بیشتری از نوارها برای یافتن پاسخ دقیقتر سازه (در جهت عرضی) میباشد. ماتریسهای سختی که در این روش محاسبه میشود نسبت به روش نوار محدود دقیق بسیار بزرگتر میباشند. مزیت روش نیمه تحلیلی در آنالیز کمانش و ارتعاشات نسبت به روش نوار محدود دقیق، استفاده از تکنیکهای حل موجود

[1] Local Stability