دانشگاه پیام نور تبریز

گروه ریاضی

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته‌ی

ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

یک روش مؤثر برای یافتن مقادیر ویژه مسائل اشتورم– لیوویل مرتبه دوم و چهارم

استاد راهنما

دکتر حسین خیری

استاد مشاور

دکتر مهدی صحت خواه

پژوهشگر

معصومه قاسمی

شهریور ۱۳۸۸

بسم الله الرحمن الرحیم

سپاست ای توانا
که بار دیگر از مرگ امانم دادی
زبانم دادی
توانم دادی
و بنانم دادی
تا سپاست بیاغازم
شعری بپردازم
و طرحی دیگر در اندازم.
ای بیرون از فکرت کائنات
ای نگارخانه هستی سایه‌ای از قلم تو
ای همه روزی خواران بر خوان کرم تو
ای حیات بخش
ای آنکه تا به نامت قلم می‌زنم اشکم را فرو می ریزی
جز اشک عاشقانه چه ره آوردی در پیشگاه تو دارم؟
اشکم نثارت باد
اگر بپذیری **خدایم** .

تقدیم به:

مادر مهربانم

و

روح پدر عزیزم

بنام خدا

و لَمْ یَشْکُر الْمَخلوق لَمْ یَشْکُر الْخالِقْ.

سپاس، آنان را که از آغاز تاکنون دستانشان، دستگیرم و رهنمودهاشان، چراغ راهم بود. حال از زحمات بی‌شائبه استاد ارجمندم، جناب آقای دکتر حسین خیری که راهنمای دلسوز اینجانب بوده‌اند، صمیمانه تشکر می‌نمایم.

از جناب آقای دکتر مهدی صحت خواه که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را قبول فرموده‌اند، سپاسگزارم.

از جناب آقای دکتر علی اصغر جدیری اکبرفام که اوقات ارزشمند خویش را صرف مطالعه و داوری این پایان‌نامه نموده‌اند کمال تشکر را دارم.

از اساتید گرامی و کارکنان زحمتکش دانشکده علوم ریاضی دانشگاه پیام نور که در طول تحصیلات دانشگاهی اینجانب متقبل زحمات فراوانی شده‌اند، تشکر می‌نمایم.

در پایان از کلیه اعضای خانواده‌ام که در راه کسب علم و دانش همواره یاریگر و مشوق من بوده و با قبول تمام مشکلات بر خود راه تحصیل مرا هموار نموده‌اند، سپاسگزاری می‌کنم.

معصومه قاسمی

شهریور ۱۳۸۸

نام خانوادگی دانشجو: قاسمی نام: معصومه
عنوان: یک روش مؤثر برای یافتن مقادیر ویژه مسائل اشتورم– لیوویل مرتبه دوم و چهارم
استاد راهنما: دکتر حسین خیری استاد مشاور : دکتر مهدی صحت خواه
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی دانشگاه پیام نور تبریز دانشکده‌ی علوم ریاضی تاریخ فارغ‌التحصیلی: شهریور ۱۳۸۸ تعداد صفحه: ۹۰
کلید واژه‌ها: روش تکرار تغییراتی، روش تجزیه آدومیان، مساله اشتورم ـ لیوویل، معادله خطی، معادله غیرخطی

چکیده

در این پایان‌نامه، روش تجزیه آدومیان و روش تکرار تغییراتی را برای یافتن مقادیر ویژه مسائل اشتورم ـ لیوویل مرتبه دوم و چهارم بکار می بریم. هر دو روش تکراری بوده و به کمک آنها، می‌توان در مسائل خطی و غیرخطی به جوابهایی با دقت بالا دست یافت. نتایج به دست آمده، برتری روش تکرار تغییراتی را در مقایسه با روش تجزیه آدومیان نشان می‌دهند.

فهرست مطالب

مقدمه

اغلب مسائل طبیعی از جمله مسائل فیزیک و مکانیک منجر به حل معادلات دیفرانسیل می‌شوند. دسته وسیعی از این معادلات به صورت معادله مرتبه دو یا قابل بیان بوسیله آن هستند. هرگاه معادله دیفرانسیل دارای شرایط مناسبی باشد، می‌توان آن را با تبدیل‌هایی به صورت معادله اشتورم ـ لیوویل نوشت. برای مثال معادله موج، یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی از مرتبه دو می‌باشد که می‌تواند با روش جداسازی تبدیل به معادلات از نوع اشتورم ـ لیوویل شود. همچنین معادله شرودینگر، معادله دیفرانسیل لاگرانژ و معادله دیفرانسیل بسل و بسیاری از معادلات دیگر که در کارهای عملی بدست می آیند، قابل بیان با معادله اشتورم ـ لیوویل هستند. لذا با مطالعه معادله اشتورم ـ لیوویل می‌توان خواص بسیاری از مسائل را بررسی نمود که این مطلب یکی از مزایای این معادله است.

برای اولین بار در سال ۱۸۳۶ دو دانشمند به نامهای اشتورم[1] و لیوویل[2] در مقاله‌ای معادله دیفرانسیل مرتبه دوم را که هم اکنون به معادله اشتورم ـ لیوویل معروف است مورد مطالعه قرار دادند و بعدها افراد زیادی از جمله: آندرو[1]، دهوگ[2]، آندرسن[3]، گری[4] و مارلتا[5] روی حالتهای مختلف مساله اشتورم ـ لیوویل کار کردند.

مقادیر ویژه در مسائل اشتورم ـ لیوویل از اهمیت بالایی برخوردارند، به عنوان مثال، در مسائل فیزیکی مربوط به ارتعاش نخ، λ نشان دهنده فرکانس است. از لحاظ عددی در مورد مقادیر

---

[1] Sturm
[2] Liouville
[1] Andrew
[2] De Hoog
[3] Anderssen
[4] Gheri
[5] Marletta

ویژه مسائل اشتورم ـ لیوویل مرتبه چهارم کار زیادی صورت نگرفته است، تنها برنامه موجود استفاده از ماتریس های "$SLEUTHTheta$"[۱۸] است، در حالیکه برای مسائل مرتبه دوم، برنامه‌هایی مثل "$SLEIGN$"[۱٦]، "$SLEIGN2$"[۱۵] و "$SLEGDGE$"[۱۷] قابل استفاده هستند.

در این پایان‌نامه، جهت محاسبه این مقادیر، روش‌های تجزیه آدومیان و تکرار تغییراتی هی را بکار می‌بریم. در پایان خواهیم دید که دقت روش تکرار تغییراتی هی، در بیشتر حالت‌ها بهتر از روش تجزیه آدومیان می‌باشد.

در فصل اول پایان‌نامه، به ارائه تعاریف و مفاهیم اولیه و قضایای مقدماتی می‌پردازیم که در فصلهای بعدی مورد نیاز است.

در فصل دوم، به بررسی روش تجزیه آدومیان و همگرائی روش پرداخته و در پایان، کاربرد این روش را در محاسبه مقادیر ویژه مسائل اشتورم ـ لیوویل بررسی می‌کنیم.

در فصل سوم روش تکرار تغییراتی را معرفی و همگرائی این روش راثابت نموده، کاربرد این روش را درمحاسبه مقادیر ویژه مسائل اشتورم ـ لیوویل مطرح می‌کنیم.

فصل ۱

پیشینهٔ پژوهش و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱ معادله‌ای که شامل یک متغیر وابسته و مشتقاتش نسبت به یک یا چند متغیر مستقل باشد، معادله دیفرانسیل نامیده می‌شود. اگر معادله شامل مشتقات معمولی باشد، آن را یک معادله دیفرانسیل معمولی، و اگر شامل مشتقات جزئی باشد، آن را یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌نامیم. هدف از حل معادله دیفرانسیل، یافتن تابعی است که در معادله صدق کند.

تعریف ۲.۱.۱ معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه n ام به صورت

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}) = 0$$

یا

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0 \tag{۱.۱}$$

است.

تعریف ۳.۱.۱ مرتبه یک معادله، مرتبه بالاترین مشتق موجود در معادله است.

تعریف ۴.۱.۱ معادله دیفرانسیل به فرم

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = Q(x)$$

را خطی گوییم.

تعریف ۵.۱.۱ یک معادله انتگرال، معادله‌ای است که در آن تابع مجهول $u(x)$ زیر علامت انتگرال قرار دارد.
برای مثال، معادله

$$u(x) = f(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)u(t)dt. \qquad (۲.۱)$$

یک معادله انتگرال است که در آن، $K(x,t)$ هسته انتگرال نامیده شده و $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ حدود انتگرال می‌باشند. در معادله(۲.۱) تابع مجهول یعنی $u(x)$، فقط زیر علامت انتگرال ظاهر شده است. در حالتهای دیگر ممکن است تابع مجهول در خارج از علامت انتگرال هم حضور داشته باشد. باید توجه کرد که هسته معادله یعنی $K(x,t)$ و تابع $f(x)$ از قبل معلوم هستند. هدف ما تعیین تابع مجهول یعنی $u(x)$ است که در رابطه (۲.۱) صدق کند.

تعریف ۶.۱.۱ منظور از $C^n[a,b]$ مجموعه توابع تعریف شده روی $[a,b]$ هستند که دارای مشتق n ام پیوسته می‌باشند.

قضیه ۱.۱.۱ (قضیه تیلور): اگر f تابعی باشد که در یک همسایگی نقطه x_0 دارای مشتقات متوالی تا مرتبه $(n+1)$ ام باشد، در این صورت تابع f را در هر نقطه x متعلق به این همسایگی می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{1}{2!}h^2 f''(x_0) + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{h!}f^{(n)}(x_0) + \frac{1}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi) \end{aligned}$$

که در آن:

$$f^{(k)}(x_0) = \frac{d^k f}{dx^k}|_{x=x_0}$$
$$h = x - x_0$$

و ξ نقطه ای بین x_0 و x است.

اثبات. رجوع کنید به[۱]. ■

تعریف ۷.۱.۱ سری تیلور در نقطه $x_0 = 0$، سری مکلورن نامیده می‌شود.

تعریف ۸.۱.۱ به هر بردار X در فضای برداری R^n می‌توان یک عدد حقیقی نسبت داد که این عدد را با $\|X\|$ نشان داده و آن را نرم X می‌نامیم اگر در شرایط زیر صدق کند:

الف) $\|X\| \geq 0$ و $\|X\| = 0$ اگر وفقط اگر $X = 0$

ب) برای هر عدد حقیقی α و هر بردار X

$$\|\alpha X\| = |\alpha| \, \|X\|$$

ج) برای هر دو بردار دلخواه X و Y

$$\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$$

نرمهای متعددی وجود دارد که چند نمونه از آنها در زیر آمده است:

$(X = (x_1, x_2, ..., x_n), \;\; x_i \in R)$

الف) نرم یک

$$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

ب) نرم دو (اقلیدسی)

$$\|X\|_2 = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

ج) نرم p-

$$\|X\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$

د) نرم ماکزیمم (بی نهایت)

$$\|X\|_\infty = \max_i |x_i|, \quad i = 1, 2, ..., n$$

تعریف ۹.۱.۱ فضای برداری X را به همراه نرم آن یک فضای خطی نرمدار می‌گوییم.

تعریف ۱۰.۱.۱ فرض کنیم

$$D = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^n\}$$

یک ناحیه باز و همبند باشد. تابع $f(x, y)$ روی ناحیه D نسبت به مولفه دوم در شرط لیپ شیتس صدق می‌کند هرگاه

$$\forall (x, y_1), (x, y_2) \in D : \|f(x, y_1) - f(x, y_2)\| \le M \|y_1 - y_2\|$$

که در آن M یک عدد حقیقی مثبت می‌باشد.

قضیه ۲.۱.۱ فرض کنید F و f در معادله انتگرالی

$$u(x) = f(x) + \int_a^x F(x,t,u(t))dt \qquad (۳.۱)$$

دارای شرایط زیر باشند:

۱) F انتگرال پذیر و کراندار باشد و نسبت به مولفه سوم در شرط لیپ شیتس صدق کند:

$$|F(x,t,z) - F(x,t,z')| \leq L|z - z'|,$$

۲) f روی $[a,b]$ انتگرال پذیر و کراندار باشد.

در این صورت معادله (۳.۱) دارای جواب منحصر بفرد است.

اثبات. رجوع کنید به[۷]. ■

تعریف ۱۱.۱.۱ در معادله دیفرانسیل (۱.۱)، اگر مقادیر $y^(i)$ $(i = 0, 1, ..., n-1)$، در یک نقطه داده شده باشند، معادله به مساله مقدار اولیه تبدیل می‌شود و اگر این n شرط در بیش از یک نقطه، به صورت

$$y^{(i)}(\alpha_i) = c_i, \quad i = 0, 1, 2, ..., n-1$$

داده شده باشند، آنگاه معادله (۱.۱) به مساله مقدار مرزی تبدیل می‌شود.

به عنوان مثال مساله زیر یک مساله مقدار مرزی است:

$$y'' = f(x,y),$$

$$y(a) = A, \quad y(b) = B.$$

در ادامه دو قضیه را که وجود و منحصر بفردی جواب را برای مساله مقدار اولیه و معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با شرایط مرزی بیان می‌کند، می‌آوریم.

قضیه ۳.۱.۱ اگر $f \in C(D)$ ($C(D)$ نمادی برای توابع پیوسته روی ناحیه D می‌باشد) و روی ناحیه D نسبت به مولفه دوم در شرط لیپ شیتس صدق کند و $(x_0, y_0) \in D$ آنگاه مساله مقدار اولیه

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

روی بازه $|x - x_0| \leq h$ دارای جواب منحصر بفرد است. که در آن h طبق

$$\begin{aligned} h &= \min\{a, \frac{b}{M}\} \\ M &= \max_{(x,y)\in S} \|f(x,y)\| \\ S &= \{(x,y) : |x - x_0| \leq a, \|y - y_0\| \leq b\} \subseteq D \end{aligned}$$

تعریف می‌شود. همچنین تقریب های متوالی

$$y_{n+1}(t) = y_0(t) + \int_{x_0}^{t} f(s, y_n(s))ds, \qquad n = 0, 1, ...$$

در بازه $|x - x_0| < h$ وجود داشته و پیوسته هستند و به تنها جواب مساله به طور یکنواخت همگرا می‌باشند.

اثبات. رجوع کنید به [۲]. ■

قضیه ۴.۱.۱ (قضیه منحصر به فردی برای معادله دیفرانسیل مرتبه دوم): فرض کنید مساله مقدار مرزی

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad a \leq x \leq b,$$

$$y(a) = \alpha, \qquad y(b) = \beta.$$

و $\frac{df}{dy}$ و $\frac{df}{dy'}$ بر مجموعه

$$D = \{(x, y, y')|\ a \leq x \leq b,\ -\infty < y < \infty,\ -\infty < y' < \infty\}$$

پیوسته باشند. هر گاه

۱) به ازای هر $(x, y, y') \in D$ داشته باشیم: $\frac{df}{dy}(x, y, y') > 0$.

۲) یک ثابت M وجود داشته باشد که،

$$|\frac{df}{dy}(x, y, y')| \leq M \qquad \forall(x, y, y') \in D$$

در این صورت مساله مقدار مرزی فوق دارای جواب منحصر به فرد است.

اثبات. رجوع کنید به [۲]. ■

تعریف ۱۲.۱.۱ یک فضای متریک (X, d) عبارت است از مجموعه X همراه با یک متر d بر آن، که به ازای هر $x, y, z \in X$ دارای خواص زیر است:

الف) $d(x, y) \geq 0$

ب) $d(x, y) = 0$ اگر و فقط اگر $x = y$

ج) $d(x, y) = d(y, x)$

د) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

تعریف ۱۳.۱.۱ دنباله $\{x_n\}$ در فضای متریک (X, d) را یک دنباله کوشی می‌نامیم اگر برای هر $\epsilon > 0$، عددی طبیعی مانند M موجود باشد، بطوریکه برای هر $n, m \geq M$، $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

تعریف ۱۴.۱.۱ فضای X را تام (کامل) گوییم اگر هر دنباله کوشی در X به نقطه ای از X همگرا باشد.

تعریف ۱۵.۱.۱ گوییم دنباله ای از توابع مانند $\{f_n\}$، $n = 1, 2, 3, ...$، بر فضای X به طور یکنواخت به تابع f همگراست هر گاه به ازای هر $\epsilon > 0$ عدد صحیحی مانند N موجود باشد بطوریکه $n \geq N$ نامساوی

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

را به ازای هر $x \in X$ ایجاب کند.

تعریف ۱۶.۱.۱ فضای برداری X را فضای باناخ گوییم هر گاه نرمدار بوده و با متر تعریف شده توسط نرم، تام باشد.

تعریف ۱۷.۱.۱ فرض کنیم T یک عملگر روی فضای برداری X باشد، در این صورت $x \in X$ را نقطه ثابت T گوییم، اگر $Tx = x$.

تعریف ۱۸.۱.۱ گوی بسته به مرکز z و شعاع r عبارت است از:

$$B(z, r) = \{x : \quad \|x - z\| \leq r\}.$$

تعریف ۱۹.۱.۱ نگاشت $T : X \longrightarrow X$ را در گوی $B(z, r)$ انقباض گوییم اگر ثابتی چون $0 \leq \theta < 1$ وجود داشته باشد بطوریکه:

$$\|Tx_1 - Tx_2\| \leq \theta\|x_1 - x_2\|, \qquad \forall x_1, x_2 \in B(z, r).$$

قضیه ۵.۱.۱ (قضیه نقطه ثابت نگاشت انقباض یا نقطه ثابت باناخ) فرض کنید:

۱) X فضای باناخ باشد.

۲) $T : X \longrightarrow X$.

۳) T در گوی $\bar{B}(x_0, r)$ یک نگاشت انقباض با ضریب انقباض $0 \leq \theta < 1$ باشد.

۴) $\frac{1}{1-\theta}\|x_1 - x_0\| = r_0 \leq r$.

آنگاه

a) T دارای نقطه ثابت منحصربفرد $x^\star$ درون $\bar{B}(x, r)$ است.

b) دنباله تکراری $x_n = Tx_{n-1}$ $(n = 1, 2, ...)$، به $x^\star$ همگرا است.

c) $\|x_n - x^\star\| \leq \theta^n r_0$.

اثبات. اثبات را در هشت مرحله بیان می‌کنیم.

مرحله یک) به ازای $n = 1, 2, ...$ داریم

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|Tx_n - Tx_{n-1}\|$$

$$\leq \theta\|x_n - x_{n-1}\| = \theta\|Tx_{n-1} - Tx_{n-2}\|$$

$$\leq \theta^2\|x_{n-1} - x_{n-2}\| \leq ... \leq \theta^n\|x_1 - x_0\|$$

$$\leq \theta^n(1 - \theta)r_0$$

مرحله دو) می‌توان نوشت:

$$\forall n \qquad \|x_n - x_0\| \leq (1-\theta^n)r_0 \tag{۴.۱}$$

اثبات به استقرا

طبق فرض، نامساوی(۴.۱) به ازای $n = 1$ برقرار است.

فرض کنیم این نامساوی به ازای n برقرار باشد، یعنی :

$$\|x_n - x_0\| \leq (1-\theta^n)r_0$$

در این صورت

$$\|x_{n+1} - x_0\| = \|x_{n+1} - x_n + x_n - x_0\|$$

$$\leq \|x_{n+1} - x_n\| + \|x_n - x_0\|$$

$$\leq \theta^n(1-\theta)r_0 + (1-\theta^n)r_0 = (1-\theta^{n+1})r_0$$

پس نامساوی به ازای $n+1$ نیز برقرار است.

مرحله سه) به ازای $n = 1, 2, ...$ داریم :

$$\|x_n - x_0\| \leq (1-\theta^n)r_0 \leq r_0 \Rightarrow x_n \in \bar{B}(x_0, r_0)$$

مرحله چهار) دنباله$\{x_n\}$ یک دنباله کوشی است زیرا

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \exists N \qquad \forall k \quad (n \geq N \Rightarrow \|x_{n+k} - x_n\|$$

$$\leq \|x_{n+k} - x_{n+k-1}\| + \|x_{n+k-1} - x_{n+k-2}\| + ... + \|x_{n+1} - x_n\|$$

$$\leq \theta^{n+k-1}(1-\theta)r_0 + \theta^{n+k-2}(1-\theta)r_0 + ... + \theta^n(1-\theta)r_0$$