بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيمِ

تقدیم به:

پدرم:

که مظهری از پاکی، صداقت و سادگی است و بزرگترین پشتیبان و حامی من. فروغ نگاه و گرمی کلامش سرمایه جاودانی زندگی من است.

مادرم:

که گنجینه عشق و محبت است و مامن آرامش و آسایش من. وجودش معنی بخش واژه امید و مهرش تسلای وجود.

سپاسگزاری

سپاس ایزد یکتا را سزاست، که با لطف و کرم بی‌کرانش در لحظه لحظه زندگی همراه و یاریگر بندگانش است. این وظیفه را بر خود لازم می‌دانم که مراتب سپاس و تشکر خود را:

— از جناب آقای دکتر علیرضا فخارزاده جهرمی که مسئولیت راهنمایی این پایان نامه را عهده‌دار بودند و در کلیه مراحل پژوهش و نگارش همواره مشوق و راهنمای اینجانب بودند،

— از جناب آقای دکتر محمدجواد مهدی‌پور و جناب آقای دکتر کریم اسلاملوئیان که با صبر و حوصله مشاوره و بازخوانی پایان‌نامه را به عهده گرفتند،

— از جناب آقای دکتر حمیدرضا ملکی و جناب آقای دکتر اسماعیل حسام الدینی که زحمت داوری این پایان‌نامه را تقبل نمودند، ابراز دارم

همچنین از خواهران عزیزم که در طول تدوین پایان‌نامه همواره یاریگر اینجانب بودند، تشکر و قدردانی می‌نمایم.

سمیه شریف

شیراز - شهریور ماه ۱۳۹۰

چکیده

مطالعه‌ای از نظریه کنترل بهینه در افق نامتناهی برای کاربردهای اقتصادی

به‌وسیله‌ی:

سمیه شریف

ابتدا تعمیمی از اصل بیشینه‌سازی پونتریاگین در افق نامتناهی که توسط اسیو و کریاژیمسکی ارایه شده است، تشریح گردید. نظر به کاربرد وسیع مسائل کنترل بهینه با افق نامتناهی در اقتصاد، بر مبنای این روش برای اولین بار به حل چندین مسأله از رشد اقتصاد بهینه، مرتبط با انباشت سرمایه، مصرف و سرمایه گذاری بهینه، اقدام شد. سپس مدل رشد اقتصادی لوییس سرون معرفی و کالیبره کردن آن در اقتصاد ایران (سال‌های ۱۳۸۵—۱۴۱۵) انجام پذیرفت. به دنبال آن، با بکارگیری روش اسیو و کریاژیمسکی، به تعیین مصرف و سرمایه‌گذاری بهینه به منظور بیشینه‌سازی رفاه اجتماعی اقدام و نتایج و تحلیل‌های حاصل ارایه شده‌اند.

فهرست

عنوان **صفحه**

فهرست جدولها

فهرست شکلها

فصل ۱

تاریخچه، اهداف و مطالعات مروری

فصل اول

تاریخچه، اهداف و مطالعات مروری

۱—۱ مقدمه

نظریه کنترل بهینه در دهه ۱۹۵۰ به دلیل ضرورت حل مسائل بهینه سازی پویای نمایان شده در سیستم‌های کنترل فنی متنوع (عمدتاً مکانیکی) مانند هواپیما، ربات، هوا و فضا و غیره ایجاد شده است. در چند دهه اخیر، نظریه کنترل بهینه با توجه به روند رو به رشد جمعیت جهان و محدود بودن منابع انرژی و نیروی کار، از جایگاه خاصی برخوردار شده است. بویژه در علم اقتصاد و در مدل‌های مرتبط با تخصیص بهینه منابع پویا، این نظریه پدیدار می‌گردد. اغلب این مسائل مرتبط با بررسی فرآیندهای رشد اقتصاد هستند و بر این اساس آن‌ها را مسائل رشد اقتصاد بهینه نیز نامیده‌اند. تابع هدف این نوع مسائل که از نوع بیشینه‌سازی بوده، دارای فرم خاصی است که توسط یک انتگرال ناسره تعریف می‌شود؛ این تابع هدف معمولاً شامل عامل تنزیل نمایی است. همین عامل می‌تواند به عنوان رکن اصلی همگرایی این نوع انتگرال‌ها تلقی گردد ([۳]). از جمله کاربردهای نظریه کنترل بهینه در این گونه مسائل، می‌توان به بهره‌برداری بهینه از منابع تجدید شدنی و تجدید نشدنی، بهره‌برداری بهینه از جمعیت ماهی‌ها، کنترل آلودگی، انباشت سرمایه بهینه و غیره اشاره نمود ([۳۱]).

به منظور حل مسأله کنترل بهینه، روش‌های عددی (مانند روش‌های بر پایه تفاضلات

متناهی، عناصر مرزی، عناصر متناهی، روش‌های گسسته‌سازی و یا روش‌های پارامتری‌سازی) وجود دارند. به غیر از این روش‌ها، شیوه‌های دیگری همچون اصل بیشینه سازی پونتریاگین (ارایه شده توسط پونتریاگین[۱] و همکارانش در سال ۱۹۶۲) موجود است که مسأله را به صورت تحلیلی بررسی می‌کند. معمولاً در مسائل رشد اقتصاد بهینه، فرآیند رشد بی‌پایان در نظر گرفته می‌شود. همین واقعیت، باعث بروز تعمیم‌های مختلفی از اصل بیشینه‌سازی پونتریاگین در افق نامتناهی شده است که لزوماً برخی از آنها صرفاً خاص مسائل اقتصادی نیستند ([۵، ۶، ۷]).

این پایان‌نامه ضمن بیان مختصر اصل بیشینه‌سازی پونتریاگین برای حالت‌های مختلف افق متناهی، به ارایه نوع خاصی از آن که در سال‌های اخیر توسط اسیو[۲] و کریاژیمسکی[۳] ارایه شده می‌پردازد ([۴، ۵]). در نظر گرفتن شرط « چیرگی بر تنزیل[۴]»، ویژگی ممتاز این تعمیم در کاربری آن برای مسائل اقتصادی است. نظر به این که این مباحث کنترلی در افق متناهی پایه و دریچه‌ای برای ورود به بحث اصلی در کل پایان نامه است، لازم است که مروری مختصر بر چگونگی حل مسائل کنترل بهینه متناهی از طریق اصل بیشینه‌سازی پونتریاگین انجام شود.

۱ـ۲ مسأله کنترل بهینه متناهی

نظریه کنترل بهینه که به نوعی تعمیمی از حساب تغییرات است، یک روش بهینه‌سازی ریاضی برای تعیین بهترین سیاست اجرایی می‌باشد. پایه‌ی اصلی در نظریه کنترل بهینه، روش ارایه شده توسط پونتریاگین و همکارانش است که در اینجا به صورت مختصر به شرح این روش در حالت متناهی می‌پردازیم([۲۹]):

---

[۱] L. S. Pontryagin
[۲] Aseev
[۳] Kryazhimskiy
[۴] Dominating Discount

در حالت کلی یک مسأله در نظریه کنترل بهینه متناهی، به صورت زیر است:

$$
\begin{array}{ll}
Max & J(x,u)=\int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t),u(t))dt, \\
 & \dot{x}_i=f_i(x(t),u(t)), \quad u(t)\in U, \quad i=1,2,...,n, \\
 & x(t_0)=x^0, \quad x(t_1)=x^1.
\end{array}
\qquad (۱-۱)
$$

که در این مسأله $x(t)=(x_1(t),...,x_n(t))$ متغیر حالت (مسیر یا تراژکتوری)، $u(t)=(u_1(t),...,u_n(t))$ متغیر کنترل و U زیر ناحیه مشخص شده‌ای از فضای کنترل می‌باشند. منظور از متناهی در اینجا یعنی این که، مسأله روی بازه زمانی متناهی $[t_0,t_1]$ تعریف شده است. همچنین فرض می‌شود که توابع تعریف شده f_i نسبت به متغیرهای $x_1,x_2,...,x_n$ و کنترل $u(t)$، پیوسته و مشتق پذیر باشند. هدف مسأله، تعیین آن کنترل بهینه $u^*(t)$ و مسیر متناظرش $x^*(t)$، به گونه‌ای است که دستگاه از حالت x^0 در زمان $t=t_0$ به حالت x^1 در زمان $t=t_1$ هدایت شود به ترتیبی که مقدار J بیشینه گردد.

این گونه مسائل با استفاده از اصل بیشینه‌سازی پونتریاگین که توسط پونتریاگین در سال ۱۹٦۲ مطرح شد، قابل حل هستند. توجه شود که پونتریاگین روش خود را به صورت یک قضیه ارایه نمود؛ اما از آنجا که این قضیه کاربرد فراوان دارد و زیر بنای نظریه کنترل مدرن تلقی می‌گردد، از آن به عنوان یک اصل نام برده می‌شود (اصل بیشینه‌سازی پونتریاگین[۵]). با توجه به این که زمان نهایی و حالت نهایی (t_1,x^1) ، در مسأله مشخص شده باشند و یا نباشد، اصل بیشینه‌سازی پونتریاگین در چهار حالت مختلف ارایه می‌شود؛ اما قبل از بیان حالت‌های مختلف این اصل، تعریف زیر مورد نیاز است.

تعریف ۱.۱: الف) برای مسأله (۱—۱)، تابع

$$\mathcal{H}(t,x(t),u(t),\psi(t),\psi_0)=\sum_{i=0}^{n}\psi_i f_i(x(t),u(t))$$

را تابع همیلتونی پونتریاگین استاندارد می‌نامند که در آن $\psi(t)=(\psi_1,...,\psi_n)$ برداری غیر

[۵] Pontryagin Maximum Principle

بدیهی است و ψ_i ها در معادلات زیر که معروف به معادلات هم وضعیت (هم حالت) هستند، صدق می‌کنند:

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i}, \quad i = ۰, ۱, ۲, ..., n. \tag{۲−۱}$$

ب) تابع همیلتونی H به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(t, x(t), \psi(t), \psi_۰) = \sup_{u \in U} \mathcal{H}(t, x(t), u(t), \psi(t), \psi_۰).$$

۱−۲−۱ بیان اصل بیشینه‌سازی پونتریاگین در حالات مختلف

حالت اول:

فرض کنید $u^*(t)$ یک کنترل قابل قبول بوده و مسیر متناظر آن $x^*(t) = (x_۱^*(t), x_۲^*(t))$ باشد، آن چنان که دستگاه را از $x^۰$ در زمان $t = t_۰$ به $x^۱$ در زمان غیر مشخص $t = t_۱$ هدایت کند. برای این که (x^*, u^*) بهینه باشند، لازم است برداری غیر صفری نظیر $\psi(t) = (\psi_۱(t), \psi_۲(t))$ که در (۱−۲) صدق می‌کند و نیز تابع عددی $\mathcal{H}(\psi, x, u) = \psi_۰ f_۰(x, u) + \psi_۱ f_۱(x, u) + \psi_۲ f_۲(x, u),$ موجود باشند به طوری که

(الف) به ازای هر $t_۰ \leq t \leq t_۱$ ، تابع $\mathcal{H}$ به بیشینه خود نسبت به u در $u = u^*(t)$ برسد؛ یعنی

$$\mathcal{H}(t, x(t), u^*(t), \psi(t), \psi_۰) = H(t, x(t), \psi(t), \psi_۰).$$

(ب) $\mathcal{H}(t, x^*(t), u^*(t), \psi^*(t)) = ۰$ و در $t = t_۱$ ، $\psi_۰ \geq ۰$ ، جایی که $\psi^*(t)$ جواب (۱−۲) به ازای $u = u^*(t)$ است. به علاوه نتیجه می‌شود که، $\mathcal{H}(t, x^*(t), u^*(t), \psi^*(t))$ و $\psi_۰(t)$ همواره ثابت هستند و به ازای هر نقطه روی مسیر بهینه داریم $\mathcal{H} = ۰$ و

$\psi_\circ(t) \geq \circ$.

حالت دوم:

اگر مسیر $x^*(t) = (x^*_1(t), x^*_2(t))$ دستگاه را از نقطه x° در زمان $t = t_\circ$ به نقطه x^1 در زمان $t = t_1$ منتقل کند، در این صورت برای این که زوج (x^*, u^*) برای مسأله (۱–۱) جواب بهینه باشد، لازم است که بردار غیر صفر $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))$ چنان موجود باشد که این بردار در (۱–۲) صدق کرده و با تابعک $\mathcal{H}(\psi, x, u) = \psi_\circ f_\circ(x, u) + \psi_1 f_1(x, u) + \psi_2 f_2(x, u),$ در شرایط زیر صدق کنند:

(الف) به ازای هر $t_\circ \leq t \leq t_1$، $\mathcal{H}$ بیشینه مقدار خود را نسبت به u در $u = u^*(t)$ کسب کند؛ یعنی، $\mathcal{H}(t, x(t), u^*(t), \psi(t), \psi_\circ) = H(t, x(t), \psi(t), \psi_\circ)$.

(ب) در $t = t_1$، $\psi_\circ \geq \circ$.

به علاوه نتیجه می‌شود که $\mathcal{H}(t, x^*(t), u^*(t), \psi^*(t))$ و $\psi_\circ(t)$ ثابت هستند و در هر نقطه روی مسیر بهینه، $\mathcal{H}$ تابعی ثابت بوده و $\psi_\circ(t) \geq \circ$ خواهد بود.

حالت سوم:

اگر مسیر $x^*(t) = (x^*_1(t), x^*_2(t))$، دستگاه را از نقطه x° در زمان $t = t_\circ$ به نقطه‌ای روی منحنی هدف φ با معادله $g(x) = \circ$ در زمان $t = t_1$ هدایت کند، در این صورت برای این که (x^*, u^*) بهینه باشند، لازم است که بردار غیر صفر $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))$ که در (۱–۲) صدق می‌کند و همچنین تابعک $\mathcal{H}(\psi, x, u) = \psi_\circ f_\circ(x, u) + \psi_1 f_1(x, u) + \psi_2 f_2(x, u),$ موجود باشند که

(الف) به ازای هر t که $t_\circ \leq t \leq t_1$ ، H بیشینه مقدار خود را نسبت به u در $u = u^*(t)$ برگزینند؛ یعنی، $\mathcal{H}(t, x(t), u^*(t), \psi(t), \psi_\circ) = H(t, x(t), \psi(t), \psi_\circ)$.

(ب) $\mathcal{H}(t, x^*(t), u^*(t), \psi^*(t)) = \circ$ و در $t = t_1$ داریم $\psi_\circ \geq \circ$.

(ج) بردار $(\psi_1(t_1), \psi_2(t_2))^T$ بر خط مماس بر φ در نقطه $(x_1^*(t_1), x_2^*(t))$ عمود باشد.

همچنین نتیجه می‌شود که $\mathcal{H}(t, x^*(t), u^*(t), \psi^*(t))$ و $\psi_0(t)$ ثابت هستند و در هر نقطه روی مسیر بهینه، $\mathcal{H} = 0$ و $\psi_0(t) \geq 0$ خواهد بود.

حالت چهارم:

اگر در حالت پیشین، وضعیت در زمان نهایی $t = t_1$ نامعین باشد، آنگاه شرط تراگردی زیر باید برقرار باشد: $(\psi_1(t_1), \psi_2(t_2))^T = 0$. در صورت نیاز، برای کسب اطلاعات بیشتر در زمینه اصل بیشینه‌سازی پونتریاگین و حالت‌های آن می‌توان به مراجع [۴۲، ۲۹، ۱۷] رجوع نمود.

۱—۳ مروری بر تحقیقات پیشین

کنترل بهینه یکی از فعالترین موضوعات پژوهشی می‌باشد که در دهه‌های اخیر کاربردهای بسیار زیادی در زمینه‌های مختلف داشته است؛ از جمله فیزیک (نتسو[۶] و همکارانش ۲۰۰۸ در [۲۸]) ، اقتصاد (تانگ[۷] و همکارانش ۲۰۰۹ در [۳۷])، هوا فضا(گرارد[۸] و جردن ۱۹۷۷ در [۲۰])، مهندسی شیمی ([۲۶]). همان گونه که ذکر گردید، یکی از مهمترین روش‌ها در حل مسائل کنترل بهینه متناهی، اصل بیشینه‌سازی پونتریاگین است که در سال ۱۹۶۲ توسط پونتریاگین و همکارانش پیشنهاد شد. اما روش مطرح شده توسط او، در حالت نامتناهی کارساز نمی‌باشد. در واقع، اصل بیشینه‌سازی پونتریاگین برای چنین مسائلی نمی‌تواند اطلاعاتی را درباره رفتار متغیر الحاقی در بی‌نهایت و شرط تراگردی فراهم کند؛ لذا موجب بوجود آمدن مجموعه بزرگی از اکسترمال‌ها (مسیرهای مشکوک به بهینگی) می‌شود. توجه شود که شرط تراگردی در حالت چهارم از اصل بیشینه‌سازی پونتریاگین ذکر شده در بخش ۱—۲—۱، بیان

[۶] Notsu
[۷] Tang
[۸] Garrard and Jordan

می‌کند که چه نقطه‌ای از منحنی φ و کنترل متناظرش، به تابع هدف بیشترین مقدار را نسبت می‌دهد. این شرط تنها در اصل بیشینه‌سازی پونتریاگین مهم نمی‌باشد، بلکه از لحاظ اقتصادی نیز معنی‌دار است و مشخصه مهمی از رشد اقتصاد بهینه را ایجاد می‌کند برای مثال، از انباشت عواملی چون موجودی سرمایه و یا بدهی در پایان دوره جلوگیری می‌کند.

نویسنگان مقالات اقتصادی معمولاً فرض می‌کنند که شرایط تراگردی در حداقل زمانی که پارامتر تنزیل مثبت می‌باشد، برقرار هستند ([۹، ۱۴]). با این حال، این موضوع همیشه برقرار نیست. حتی در حالتی که پارامتر تنزیل مثبت باشد، مثال‌های ساده‌ای وجود دارند که این فرض را نقض می‌سازند. برخلاف تلاش‌های بسیار زیادی که برای مشخص کردن رفتار متغیر الحاقی در بی‌نهایت انجام شده است، در این راستا نتایج قابل قبول تنها تحت شرایط اضافی محدود کننده‌ای بدست آمده‌اند؛ از جمله نیاز به این که مسأله به صورت کامل محدب باشد. این حقیقت به صورت جدی مانع از کاربرد این نتایج برای مطالعه بسیاری از مدل‌های اقتصادی با معنی شد ([۲۴]). به منظور پر کردن این حفره در نظریه کنترل بهینه، روش‌های متنوعی در جهت گسترش اصل بیشینه‌سازی پونتریاگین برای مسائل کنترل بهینه نامتناهی به وجود آمد که به نمونه‌هایی ازآن‌ها اشاره می‌شود.

در اواخر دهه ۱۹۷۰، آیوبین[۹] در [۱] اصل بیشینه‌سازی پونتریاگین را برای مسائل کنترل بهینه خطی با فرض این که نرخ تنزیل ρ به اندازه کافی بزرگ باشد، به افق نامتناهی گسترش داد. از در اثبات این روش از روش‌های گرادیان و دوگان در آنالیز تابعی استفاده کرده است. این روش، مجموعه کاملی از شرایط لازم بهینگی را برای مسأله کنترل بهینه خطی نامتناهی ایجاد می‌کند. با این وجود هالکین در سال ۱۹۷۴ نشان داد که حد گرفتن از شرط تراگردی بیان شده در حالت متناهی بشدت گمراه کننده است و نمی‌توان آن را بدون در نظر گرفتن هیچ

[۹] J. P. Aubin

محدودیتی به عنوان شرط تراگردی برای مسأله کنترل بهینه نامتناهی تلقی کرد ([۲۱]). این امر منجر به بروز روش‌هایی شد که ترکیبی از اصل بیشینه‌سازی پونتریاگین و استدلال دیگری برای بدست آوردن شرط تراگردی مرتبط با آن بود. در این راستا، مایکل[۱۰] در سال ۱۹۸۲ خاصیت "وقتی $t \longrightarrow \infty$، بیشینه همیلتونی به صفر همگرا باشد" را برای یک مسأله تنزیل شده (تابع هدف مسأله دارای عامل تنزیل باشد) بیان کرد. همچنین نشان داد که هرگاه در طول مسیر بهینه تغییر سرعت توسط کنترل‌ها در همه جهت‌ها ممکن باشد، این خاصیت باعث برقراری شرط تراگردی می‌گردد ([۲۷]).

نظریه‌های برپایه دوگان دگرین برای مسائل تنزیل شده، اولین بار توسط بنونیسته[۱۱] و شینکمن[۱۲] در سال ۱۹۸۲ توسعه یافت. بنونیسته و شینکمن در [۱۱] تحت شرایط مقعر بودن توابع حالت و تابع هدف، شرط تراگردی $\lim_{t\longrightarrow\infty}[-v_{۲}(x(t),\dot{x}(t),t)]x(t) = ۰$ را برای مدل زیر که نسبت به زمان پیوسته می‌باشد تعیین کردند:

$$\begin{array}{ll} Max & J(x,u) = \int_{۰}^{\infty} v(x(t),\dot{x}(t),t)dt, \\ & x(۰) = x_{۰}, \quad (x(t),\dot{x}(t)) \subset (\mathbb{R}^n)^{۲}. \end{array}$$

کامیهیگاشی[۱۳] در سال ۲۰۰۱ این روش را با فرض بی‌کرانی v توسعه داد. همچنین ثابت کرد که فرض همگن بودن تابع هدف برای برقراری شرط تراگردی در حالت نامتناهی کافی است ([۲۳]). پس از آن در سال ۲۰۰۳ لانگ[۱۴] و شیممورا[۱۵] شرط تراگردی را تحت فرضی که v دوبار مشتق‌پذیر و زوج بهینه متعلق به نقاط درونی مجموعه‌ای تحت $(\mathbb{R}^n)^{۲}$ باشد، به صورت $\lim_{t\longrightarrow\infty}[v_{۲}(x(t),\dot{x}(t),t)][x^*(t) - x_{۰}] = ۰$ مطرح کردند ([۲۵]).

---

[۱۰] P. Michel
[۱۱] Benveniste
[۱۲] Scheinkman
[۱۳] Kamihigashi
[۱۴] Long
[۱۵] Shimomura

اسیو و کریاژیمسکی در سال ۲۰۰۷ روش تقریب متناهی را برای استخراج اصل بیشینه‌سازی پونتریاگین در حالت نامتناهی و بخصوص در زمینه مسائل رشد اقتصاد بهینه مطرح کردند. برمبنای این روش، شرایط لازم بهینگی مرتبه اول برای مسائل کنترل بهینه در افق نامتناهی گسترش یافت. ایده این روش، تقریب مسأله کنترل بهینه (P) روی بازه زمانی $[۰,\infty)$ به وسیله دنباله مناسبی از مسائل کنترل بهینه (P_k)، $k = ۱,۲,۳,...$ روی بازه زمانی $[۰,T_k]$ تعریف شده‌اند، می‌باشد؛ بطوریکه وقتی $k \longrightarrow \infty$، $T_k \longrightarrow \infty$. تابع هدف بیشینه شده در مسائل (P_k)، برای $k = ۱,۲,۳,...$، در برگیرنده تابع جریمه خاصی می‌باشد که همگرایی دنباله کنترل‌های بهینه را در مسائل (P_k) برای کنترل بهینه داده شده در مسأله اصلی (P) روی بازه زمانی $[۰,T]$ تضمین می‌کند. شرایط لازم بهینگی برای مساله (P) توسط عبور حد از روابط اصل بیشینه سازی پونتریاگین برای مسأله (P_k) زمانی که $k \longrightarrow \infty$، بدست می‌آید ([٦]).

در این پایان نامه نیز با نوع دیگری از تعمیم اصل بیشینه‌سازی پونتریاگین ارائه شده توسط اسیو و کریاژیمسکی آشنا می‌شویم که دارای خواص زیر می‌باشد:

روش اسیو و کریاژیمسکی وجود جواب بهینه را تضمین می‌کند و به دلیل وجود عامل تنزیل نمایی در تابع هدف، مسائل تحت بررسی این روش، مقدار تابع هدف متناهی و موجود خواهد بود. این روش مسائلی را مورد بررسی قرار می‌دهد که دارای بازه زمانی نامتناهی‌اند؛ لذا اکثر مسائل رشد اقتصاد بهینه به دلیل این که دارای فرآیند رشد بی‌پایان هستند، می‌توانند توسط این روش حل گردند. همچنین حل مسأله با استفاده از این روش منجر به حل یک دستگاه معادلات می‌شود که می‌توان آن رابه کمک نرم افزارهایی نظیر Matlab و Maple به راحتی حل کرد.

۱ــ۴ اهداف پایان‌نامه

از آنجا که نظریه کنترل بهینه در مدل‌های رشد اقتصاد بهینه کاربردهای بسیار زیادی دارد و معمولاً اکثر مسائل رشد اقتصاد بهینه دارای فرآیند رشد بی‌پایان می‌باشند، هدف این پایان‌نامه ارایه کامل و جامع اصل بیشینه‌سازی پونتریاگین ارایه شده توسط اسیو و کریاژیمسکی است که قادر به حل این نوع مسائل می‌باشد. ارایه مثال‌هایی با تعابیر اقتصادی و یا مستقیماً از اقتصاد، جهت نشان دادن کارایی و چگونگی بکارگیری روش مطرح شده، از دیگر اهداف می‌باشد. هدف دیگر این پایان‌نامه بومی‌سازی این روش و به بیانی، پیاده‌سازی روش بیان شده برای مدل لوییس سرون روی اقتصاد ایران است. بدین منظور مدل رشد لوییس سرون[۱۶] که خاصیت‌های این روش را داراست، معرفی می‌گردد ([۳۲]). پارامترهای مورد نیاز مدل از طریق الگوی اقتصادسنجی برآورد شده و در پایان به حل مدل کالیبره شده لوییس سرون برای اقتصاد ایران پرداخته و نتایج حاصل از آن به منظور بیشینه‌سازی رفاه اجتماعی ارایه خواهند شد.

۱ــ۵ مروری بر مطالب پایان‌نامه

جهت دست یابی به اهداف فوق، این پایان‌نامه در ٦فصل تنظیم شده است. به دنبال ارایه اهداف، مقدمات و تاریخچه در فصل اول، به دلیل مرتبط بودن مطالب با آنالیز ریاضی، نظریه کنترل، معادلات دیفرانسیل، اقتصاد کلان و اقتصاد ریاضی، تعاریف و قضایای مورد نیاز دیگر فصل‌ها، این دسته از مطالب در فصل دوم به طور مختصر بیان شده‌اند. فصل سوم به شرح مسأله کنترل بهینه نامتناهی و شیوه حل آن برمبنای روش ارایه شده توسط اسیو و کریاژیمسکی

[۱۶] Luis Serven