بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و رایانه

بخش ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

کدگشایی سریع کدهای فضا-زمان

استاد راهنما:

دکتر حسین مومنایی کرمانی

مولف:

محمد عسکری زاده

شهریور ماه ۱۳۹۰

این پایان نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز کارشناسی ارشد

به

بخش ریاضی - دانشکده ریاضی و رایانه

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو:	محمد عسکری زاده
استاد راهنما:	دکتر حسین مومنایی کرمانی
داور ۱:	دکتر سیامک طالبی
داور ۲:	دکتر عظیم ریواز

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه: دکتر

تقدیم به:

تمام کسانی که وجودشان مایه آرامش است .

تقدیر و تشکر

در حقیقت ، کسانی که گفتند :((پروردگار ما خداست)) و سپس ایستادگی کردند ، فرشتگان بر آنان فرود می آیند و می گویند : هان ، بیم مدارید وغمگین مباشید و به بهشتی که وعده یافته بودید شاد باشید .

سوره مبارکه فصلت ، آیه ۳۰

حمد سپاس خدای یکتا را که عالم را خلق کرد تا انسان با کشف رموزش آن را به خدمت خود در آورد و مسیر بندگی حضرتش را با یقین بیشتر طی کند و شکر خدای را که به من توان داد کاری هرچند کوچک در مسیر کسب علم بردارم.

از آنجا که گفته اند آنکس که شکر زحمت مخلوقی رانتواند شکر خالق را کی تواند بر خود لازم می دانم از جناب آقای دکتر مومنایی برای نصایح راهگشایشان تشکر کرده و از درگاه خداوند یکتا برای ایشان خواستار موفقیت روز افزون را دارم.

محمد عسکری زاده

شهریور۹۰

چکیده

از سال ۱۹۹۸ میلادی استفاده از کدهای فضا-زمان در سیستم های مخابرات بی سیم مطرح شد. این کدها به دلیل مقابله موثر با پدیده های نامطلوب کانال های بی سیم مورد توجه خاص قرار گرفتند. برای مثال محوشدگی کانال های ارسالی جزء لاینفک سیستم های مخابرات بی سیم کنونی می باشد، که سعی می شود با آن مقابله شود.

کدهای طراحی شده ابتدایی دارای گیرنده های ساده بودند، اما نرخ ارسال اطلاعات در آنها پایین بود. برای افزایش نرخ ارسال اطلاعات، کدهای دیگری معرفی شده اند، که پیچیدگی گیرنده آنها زیاد است. هدف این پایان نامه بیان چند کدگشایی سریع با نرخ بالا می باشد.

کلید واژه: کدگشایی، کدگشایی ML، کدگشایی کروی، پیچیدگی، کدهای فضا-زمان انتشار خطی، کانال های چندگانه ورودی چندگانه خروجی، کد الموتی

مقدمه

هدف نهایی از طراحیِ یک سیستم مخابراتی ارسال اطلاعاتی است که به صورت بیت های تصادفی درمنبع اطلاعات تولید می شوند. این اطلاعات می توانند اطلاعاتِ مربوط به تصویر، صدا ، ویدئو و... باشند. یکی از مشکلات پیش روی مخابرات بیسیم تاثیر پدیده ی محوشدگی سیگنال در کانال می باشد. این مسئله به خصوص وقتی بیشتر خود را نشان می دهد که نرخ ارسالی داده افزایش می یابد.

نشان داده شده است که چندگانگی یکی از روش های موثر مقابله با محو شدگی سیگنال می باشد. چندگانگی به معنی ارسال نسخه های مختلف سیگنال از طریق مسیرهای مستقل از هم می باشد. بنابراین، هرچه تعداد مسیرهای مستقل که سیگنال ها از طریق آن ارسال می شوند، بیشتر باشند، چندگانگی موثرتر می باشد.

کدگذاری فضا–زمان یکی از روش های بسیار مناسب برای سیستم های مخابرات بیسیم می باشد. دلیل این امر این است که این سیستم ها امنیت زیاد و ظرفیت بالا را به خوبی تامین می کنند و همچنین با پدیده ی محوشدگی کانال به خوبی مقابله می کنند. با استفاده از کدگذاری فضا–زمان سمبل های مختلف و یا ترکیب خطی آن ها در زمان های مختلف و از آنتن های مختلف که با فاصله مناسبی از یکدیگر قرار داده شده اند، ارسال می شوند. در نتیجه می توان از نرخ ارسال بالا و همچنین مخابرات قابل اعتماد در حضور پدیده ی محوشدگی سیگنال بهره برد. بر اساس این دیدگاه، تا کنون تعداد زیادی کد فضا–مکان پیشنهاد شده اند. الموتی یک کد با نرخ یک، برای دو آنتن ارسالی پیشنهاد کرد [۱] یکی از خصوصیات جالب این کد گیرنده ی ML بسیار ساده ی آن می باشد. پس از آن خانواده ی کدهای فضا–زمان متعامد معرفی شدند.[۲۹] این کدها هر چند که از سادگی گیرنده بهره می برند، اما نرخ ارسالی آن ها برای تعداد آنتن ارسالی بیشتر از دو به ۳/۴ محدود می باشد[۳۵] . بنابراین نیاز به طراحی کدهای جدیدی که نرخ ارسال آن ها بالا می باشد، احساس می شد.

برای این خواسته کدهای شبه متعامد [۱۸]طراحی شدند، این کدها دارای نرخ ارسال بالاتر از کدهای متعامد می باشند اما به بهای از دست دادن چندگانگی کامل.

با استفاده از تئوری اعداد جبری و جبرهای تقسیمی کدهایی طراحی شدند که دارای نرخ کامل و چندگانگی کامل می باشند، اما این کدها معمولا دارای پیچیدگی کدگشایی بالایی می باشند.

از آنجایی که برای سیستم های مخابرات بیسیم، داشتن گیرنده با پیچیدگی کم اهمیت زیادی دارد، طراحی کدهای فضا–زمان بر اساس گیرنده های خطی ZF و $MMSE$ ضروری به نظر می رسد.

اما آنچه هدف این پایان نامه است، معرفی خانواده هایی از کدهای فضا–زمان می باشد که علاوه بر نرخ کامل و چندگانگی کامل، دارای پیچیدگی کدگشایی ML پایین نیز می باشند. در اینجا نگاهی کلی و یکجا به خانواده هایی از کدهای فضا–زمان ۲×۲ می شود که دارای نرخ کامل، چندگانگی کامل و دارای پیچیدگی کدگشایی ML پایین (با توجه به ساختار کدگشایی کروی یکسان) می باشند. از آن جمله می توان به کدهای ([۳۲]، [۳۳]، [۵]) اشاره کرد.

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف و قضایا

۱.۱ مقدمه

در این فصل به بیان قضایا، تعاریف و مفاهیم مهمی می پردازیم که در فصل های آینده مورد استفاده قرار می گیرند. از آنجا که ساختار مشبکه ها، در حضور محوشدگی تحت تاثیر زیادی قرار نمی گیرد، و دوباره یک مشبکه البته با پایه متفاوتی خواهیم داشت و این امر باعث پایین آمدن پیچیدگی در عملیات کدگشایی خواهد شد. بنابراین مشبکه ها نقش بسیار مهمی در مخابرات بیسیم بازی می کنند. ناگزیر تعریف آن، و چند خاصیت مهم آن را بیان می کنیم.

در ادامه قضایای مهمی از جبرخطی مانند تجزیه چولسکی و تجزیه QR که اساس کدگشایی کروی را تشکیل می دهند، بیان می کنیم. و در پایان فصل تعاریفی از احتمال آورده شده است.

۲.۱ تعاریف و قضایا

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید $V_۱, V_۲, \dots, V_m$ یک مجموعه مستقل خطی از بردارها در $\mathbb{R}^n$ $(m \leq n)$ باشد، مجموعه نقاط

$$\Lambda = \left\{ X = \sum_{i=۱}^{m} \lambda_i V_i \quad , \lambda_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

یک مشبکه m بعدی نامیده می شود. و $\{V_۱, V_۲, \dots, V_m\}$ یک پایه برای مشبکه می باشد.

به آسانی از تعریف دیده می شود که یک مشبکه، یک مجموعه از نقاط گسسته در $\mathbb{R}^n$ می باشد.

فرض کنید مختصات بردارهای پایه

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید مختصات بردارهای پایه

$$V_i = (v_{i۱}, v_{i۲}, \ldots, v_{in}) \qquad ۱ \leq i \leq m$$

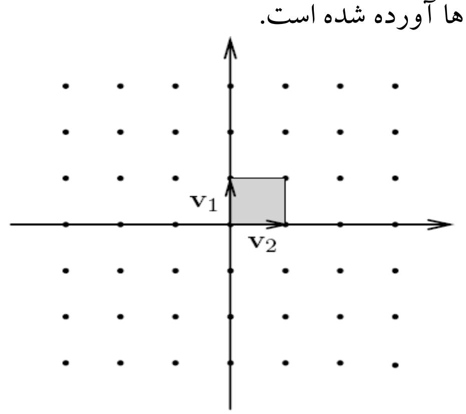
باشند،ماتریس

$$M = \begin{pmatrix} v_{۱۱} & v_{۱۲} & \ldots & v_{۱n} \\ v_{۲۱} & v_{۲۲} & \ldots & v_{۲n} \\ \ldots & & \ldots & \\ v_{m۱} & v_{m۲} & \ldots & v_{mn} \end{pmatrix}$$

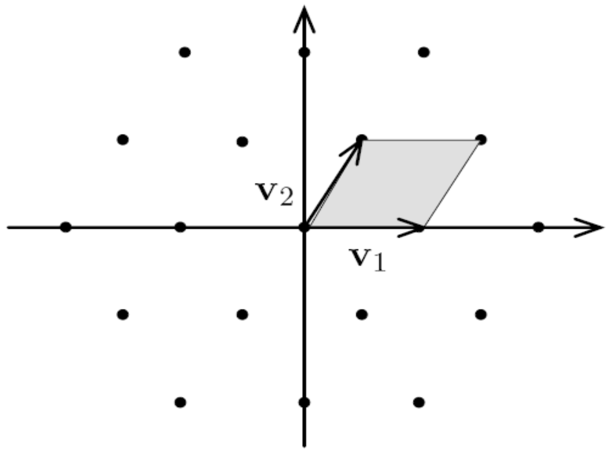
را اصطلاحا ماتریس تولیدکننده مشبکه می گویند. و همین طور ماتریس $G = MM^\top$ ماتریس گرام مشبکه نامیده می شود.

با کمی دقت می توان مشبکه Λ را به وسیله ماتریس تولیدکننده آن، همچون $\Lambda = \{X = \lambda M | \lambda \in \mathbb{Z}^m\}$ تعریف کرد.

دو مثال از مهمترین مشبکه ها آورده شده است.

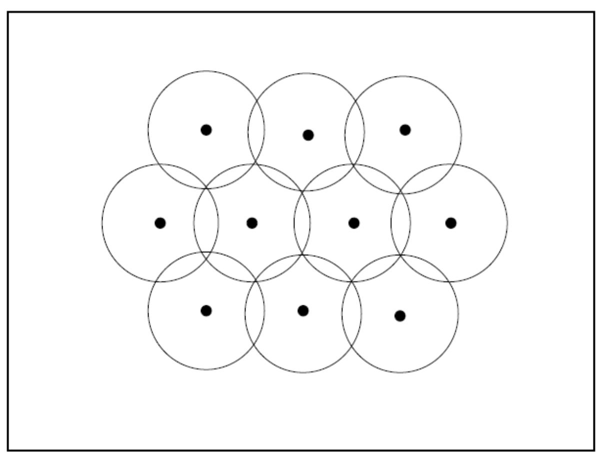


مشبکه $\mathbb{Z}^۲$



مشبکه $A_۲$

تعریف ۳.۲.۱. برای یک مشبکه رتبه کامل در $\mathbb{R}^n$، R شعاع پوششی مشبکه Λ نامیده می شود، در صورتی که کوچکترین شعاع کره های روی هم افتاده، به مرکز نقاط مشبکه باشد، که تمام فضا را می پوشانند.



پوشش بهینه مشبکه دو بعدی

تعریف ٤.۲.۱. یک فضای نرم دار، در صورتی که هر دنباله کشی در آن همگرا باشد، تام گفته می شود.

تعریف ۵.۲.۱. اگر فضای برداری H به همراه متری که از ضرب داخلی تعریف می شود تام باشد، به آن فضای برداری، فضای هیلبرت گفته می شود.

قضیه ۱.۲.۱. فرض کنید M یک زیر فضای بسته از فضای هیلبرت H باشد، دو نگاشت یکتا و خطی

$$P:\mathrm{H}\longrightarrow M \quad , \quad Q:\mathrm{H}\longrightarrow M^{\top}$$

وجود دارند به طوری که $\forall x\in \mathrm{H}$ ، $x=Px+Qx$ و خواص زیر را نیز دارا می باشند :

$$\begin{aligned}
&(a)x\in M\Longrightarrow Px=x \quad , \quad Qx=\circ\\
&(b)x\in M^{\top}\Longrightarrow Px=\circ \quad , \quad Qx=x\\
&(c)\|x-Px\|=dist(x,m)\equiv inf\left\{\|x-m\|:m\in M\right\}\\
&(d)\|x-Qx\|=dist(x,q)\equiv inf\left\{\|x-q\|:q\in M^{\top}\right\}\\
&(e)\|Px\|^{۲}+\|Qx\|^{۲}=\|x\|^{۲} \quad , \quad \forall x\in \mathrm{H} \qquad (۱.۱)
\end{aligned}$$

تعریف ۶.۲.۱. تبدیل خطی $f:V\longrightarrow W$ را در نظر بگیرید، که V,W دو فضای برداری نرم دار دلخواه باشند، f را یک تشابه با ضریب c می نامیم، هر گاه

$$\|f(v)\|=c\|v\| \quad , \quad \forall v\in V$$

تذکر: M_n مجموعه ماتریس های $n\times n$ می باشد.

قضیه ۲.۲.۱. هر ماتریس $B\in M_n$ که به شکل $B=A^*A$ ، $A\in M_n$ باشد، می تواند به صورت

$B = LL^*$ نوشته شود، به طوری که L یک ماتریس پایین مثلثی با درایه های قطری نامنفی می باشد. که به آن تجزیه چولسکی ماتریس B گفته می شود.

قضیه ۳.۲.۱. اگر $A \in M_{m,n}$ و رتبه A برابر با k باشد، سپس می تواند به صورت زیر تجزیه شود،

$$A = V \sum W^* \quad (۲.۱)$$

به طوری $V \in M_m, W \in M_n$ ماتریس یکانی می باشند. و $\sum = [\sigma_{ij}] \in M_{m,n}$ که در آن

$$\sigma_{ij} = ۰ \quad , \quad i \neq j$$

$$\sigma_{۱۱} \geqslant \sigma_{۲۲} \geqslant \ldots \geqslant \sigma_{kk} \gneqq \sigma_{k+۱k+۱} = \ldots = \sigma_{qq} = ۰ \quad , \quad q = min\{m, n\} \quad (۳.۱)$$

اعداد $\{\sigma_{ii}\}$ ریشه دوم مقادیر ویژه نامنفی AA^* می باشند، که به صورت یکتا تعیین می شوند. ستون های V بردارهای ویژه AA^* و ستون های W بردارهای ویژه A^*A می باشند. این تجزیه را، تجزیه مقادیر منفرد A می گوییم.

قضیه ۴.۲.۱. فرض کنید $A \in M_{m,n}$ و $A = V \sum W^*$ تجزیه ماتریس با استفاده از قضیه قبل باشد، آنگاه شبه معکوس آن برابر است با

$$A^{\dagger} = W \sum^{\dagger} V^*$$

که در این رابطه $\sum^{\dagger}$ ، ترانهاده$\sum$ می باشد، که در آن σ_{ii} (۳.۱) با مقادیر $\frac{۱}{\sigma_{ii}}$ جایگزین شده اند. توجه داشته باشید در صورتی که A معکوس پذیر باشد، $A^{-۱} = A^{\dagger}$.

قضیه ۵.۲.۱. فرض کنید $A \in M_{m,n}$ و $(n \geq m)$ می توان ماتریس را به صورت زیر تجزیه کرد

$$(A = QR)$$

که در آن ماتریس $Q \in M_{m,n}$ با ستون های متعامد یکه و $R \in M_m$ یک ماتریس بالا مثلثی می باشد. در صورتی که $m = n$، Q به یک ماتریس یکانی تبدیل می شود. و اگر A معکوس پذیر هم باشد، سپس R به گونه ای انتخاب می شود که همه درایه های قطر اصلی آن مثبت می باشند. این تجزیه معروف به تجزیه QR ماتریس می باشد.

تعریف ۷.۲.۱. نرم تعریف شده به صورت

$$\|A\|_۲ \equiv \left(\sum_{i,j=۱}^{n} |a_{i,j}|^۲ \right)^{\frac{۱}{۲}}$$

را نرم اقلیدسی و وقتی برای ماتریس ها به کار می رود گاهی نرم فریبنیوسی گفته می شود و با $\| \quad \|_F$ نمایش داده می شود.

تعریف ۸.۲.۱. متغیر تصادفی X تابعی است که به هر خروجی از یک تجربه یک عدد حقیقی $X\left(\xi\right)$ نسبت می دهد و در شرایط زیر صدق می کند :

۱)مجموعه $\{X \leq x\}$ یک پیشامد برای هر x باشد.

۲) احتمالات پیشامدهای $\{X = \infty\}$ و $\{X = -\infty\}$ برابر صفر باشد.

تعریف ۹.۲.۱. دنباله ای از متغیرهای تصادفی که مستقل خطی باشند و دارای توزیع احتمال یکسانی باشند را اصطلاحا $i.i.d$ [۱] می گویند.

[۱] $Identical \quad independent \quad distribution$

تعریف ۱۰.۲.۱. گوییم متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس $\sigma^۲$ می باشد، هرگاه تابع احتمال آن بدین شکل باشد :

$$f(x) = \frac{۱}{\sigma\sqrt{۲\pi}} \exp^{\frac{-۱}{۲\sigma^۲}(x-\mu)^۲} \tag{۴.۱}$$

و با نماد $X \sim N\left(\mu, \sigma^۲\right)$ نمایش داده می شود.

تعریف ۱۱.۲.۱. در تئوری احتمال، کواریانس میزان ارتباط دو متغیر تصادفی را نشان می دهد. واریانس یک حالت خاص از کواریانس می باشد، در حالتی که دو متغیر تصادفی یکسان می باشند.

کواریانس بین دو متغیر تصادفی حقیقی مقدار X, Y به صورت زیر تعریف می شود :

$$\begin{aligned} Cov\left(X, Y\right) &= E\left[\left(X - E\left[X\right]\right)\left(Y - E\left[Y\right]\right)\right] \\ &= E\left[XY\right] - E\left[X\right]E\left[Y\right] \end{aligned}$$

برای بردارهای تصادفی $X_{m\times۱}, Y_{n\times۱}$ ماتریس کواریانس برابر است با :

$$\begin{aligned} Cov\left(X, Y\right) &= E\left[\left(X - E\left[X\right]\right)\left(Y - E\left[Y\right]\right)^\top\right] \\ &= E\left[XY^\top\right] - E\left[X\right]E\left[Y\right]^\top \end{aligned}$$

که درایه (i, j) ام ماتریس برابر است با $Cov\left(X_i, Y_j\right)$.

فصل ۲

کدگذاری منبع

۱.۲ مقدمه

در این فصل ابتدا مفهوم کدگذاری و کدگشایی منبع را بیان می کنیم، و چند نمونه از این نوع کدگذاری را به اجمال می آوریم. و سپس قضایای وجودی برای ساخت چنین کدهایی را می آوریم. در ادامه به تعریف کانال اطلاعات و سپس به تعریف کانال های گوسی و مدل آنها که در سراسر این پایان نامه استفاده می شود، پرداخته می شود.

نرخ ارسال بالا و پیچیدگی پایین از خواسته های مخابرات بیسیم می باشد، برای رسیدن به این خواسته ها با پدیده ی مهمی به نام محوشدگی باید مقابله کرد. یکی از بهترین روش های پیشنهاد شده، استفاده از ساختار $MIMO$ می باشد. در ادامه فصل به تعریف ساختار $MIMO$ می پردازیم و در انتهای فصل به تعریف یکی از موفقترین روش های $MIMO$ که ساختار کدهای فضا-زمان می باشد، پرداخته شده است.

۲.۲ کدگذاری منبع

تعریف ۱.۲.۲. یک کد منبع C، برای یک متغیر تصادفی X، تابعی از $\mathcal{X}$ (برد متغیر تصادفی) به D^* (رشته های به طول متناهی از سمبلها که این سمبل ها از یک الفبای D-تایی انتخاب می شود) می باشد.

$$C : \mathcal{X} \longrightarrow D^*$$

$$x \longmapsto C(x)$$

$C(x)$ کدکلمه متناظر به x و $l(x)$ را طول $C(x)$ می نامند.

مثال ۱.۲.۲. $C(blue) = 11 \quad , \quad C(red) = 00$ یک کد منبع می باشد، برای