بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه لرستان
دانشکده علوم پایه
گروه آمار و علوم کامپیوتر

عنوان

کران های قابلیت اعتماد سیستم های منسجم با مؤلفه های مستقل

گرد آورنده

منیژه قیصری گودرزی

استاد راهنما

دکتر محمد حسین پورسعید

استاد مشاور

دکتر نادر اسدیان فیلی

پایان نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته آمار ریاضی

بهمن ماه ۱۳۹۲

همه ی امتیازات این پایان نامه به دانشگاه لرستان تعلق دارد. در صورت استفاده از تمام یا بخشی از مطالب در مجلات، کنفرانس ها یا سخنرانی ها، باید نام دانشگاه لرستان (یا استاد یا اساتید راهنمای پایان نامه) و نام دانشجو با ذکر مأخذ و ضمن کسب مجوز کتبی از دفتر تحصیلات تکمیلی دانشگاه ثبت شود. در غیر این صورت مورد پیگرد قانونی قرار خواهد گرفت.

تقدیم به او که گوهر آموختن را در وجودم نهاد.

سپاسگزاری

سپاس خدای مهربان که فرصت ارتقای علمی را به من داد.
سپاس و مراتب قدردانی ام را به پیشگاه استاد فرزانه ام جناب آقای دکتر محمد حسین پورسعید تقدیم می دارم که در مسیر علم و تحقیق همواره الگو و راهنمای من بوده اند و زحمات بسیاری را در این خصوص متقبل شده اند. همچنین از استاد گرانقدر جناب آقای دکتر اسدیان به خاطر نقطه نظرات دانشمندانه ای که در انجام این پایان نامه ایراد نمودند تشکر و قدردانی می نمایم. همچنین از استاد گرانقدر جناب آقای دکتر شکوری که در دوره ی کارشناسی ارشد افتخار شاگردی ایشان را داشته ام نیز قدردانی می نمایم و از استاد بزرگوار جناب آقای دکتر قاسمی که زحمت داوری پایان نامه را عهده دار شدند، سپاسگزارم.
در پایان لازم می دانم تشکر ویژه ام را به دوست عزیزم سرکار خانم دکتر شفیعی که مرا در نوشتن این پایان نامه یاری رساندند تقدیم نمایم.
امیدوارم که توانسته باشم ذره ای از علم لایتناهی را در صفحه ای گنجانده باشم.

فهرست مطالب

فهرست مطالب الف

۱ مفاهیم مقدماتی **۱**
۱.۱ مقدمه ۱
۲.۱ نمادها و علایم اختصاری ۲
۳.۱ آشنایی با مفاهیم اساسی احتمال ۳
۱.۳.۱ اصول احتمال و بعضی قاعده های آن ۳
۲.۳.۱ پیشامدهای مستقل ۴
۴.۱ برخی از تعاریف و مفاهیم ریاضی ۵
۵.۱ تعاریف و مفاهیم قابلیت اعتماد ۶

۲ قابلیت اعتماد سیستم های منسجم و برخی از کران های آن **۸**
۱.۲ مقدمه ۸
۲.۲ ساختار سیستم ۸
۳.۲ سیستم های منسجم ۱۱
۱.۳.۲ نمایش سیستم های منسجم بر اساس مجموعه های مسیر و قطع کننده ۱۳
۴.۲ قابلیت اعتماد سیستم های منسجم ۱۴
۱.۴.۲ محاسبه ی دقیق قابلیت اعتماد سیستم ۱۵
۲.۴.۲ وابستگی مجموعه ای از متغیرهای تصادفی ۱۶
۵.۲ کران های پروشان و ایزاری برای قابلیت اعتماد سیستم های منسجم ۱۸

۳ کران های قابلیت اعتماد برای سیستم های منسجم با مؤلفه های مستقل **۲۱**
۱.۳ مقدمه ۲۱
۲.۳ کران های قابلیت اعتماد سیستم ها ۲۲

۳.۳ مثال ۳۲
۱.۳.۳ روش بن فرونی ۳۸
۴.۳ قضیه های حدی ۴۳
۵.۳ کاربردها ۵۴
۱.۵.۳ قابلیت اعتماد سیستم ها با مجموعه های قطع کننده ی مینیمال ۵۵
۲.۵.۳ سیستم های به طور متوالی متصل ۶۰
۳.۵.۳ کاربرد ها و مثال ها ۶۰
پیوست ۶۸
واژه نامه انگلیسی به فارسی ۷۳
مراجع ۷۷

چکیده

نام خانوادگی: قیصری گودرزی	**نام:** منیژه
عنوان پایان نامه: کران های قابلیت اعتماد سیستم های منسجم با مؤلفه های مستقل	
استاد راهنما: دکتر محمد حسین پورسعید **استاد مشاور:** دکتر نادر اسدیان فیلی	
درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد **محل تحصیل:** دانشگاه لرستان **تاریخ فارغ التحصیلی:** بهمن ماه ۱۳۹۲	**رشته:** آمار ریاضی **دانشکده:** علوم پایه **تعداد صفحه:** ۹۳
کلیدواژه‌ها: سیستم منسجم، کران های قابلیت اعتماد، مجموعه های قطع کننده، مجموعه های مسیر، قضایای حدی	
چکیده: سالهای اخیر، حوزه قابلیت اعتماد سیستم های منسجم، توجه بسیاری از پژوهشگران را به سوی خود جلب کرده است. در این تحقیق، یک کران پایین با استفاده از مسیرهای مینیمال و یک کران بالا با استفاده از قطع کننده های مینیمال برای قابلیت اعتماد سیستم های منسجم در حالتی که مؤلفه ها مستقل (نه الزاماً مشابه) هستند بدست آورده شده است. تلفیق این کران ها با کران های ایزاری و پروشان (۱۹۶۳)، زمینه ی ارائه ی برخی از قضایای حدی را برای قابلیت اعتماد سیستم های منسجم بزرگ، در حالت کلی، فراهم می کند.	

پیشگفتار

"انما یخشی الله من عباده العلماء" فاطر ۲۸ (و تنها بندگان دانا و دانشمند از خدا، ترس آمیخته با تعظیم دارند.) خدایا ! می دانم که نمی دانم، به ذره ای از علم بیکرانت، دانایم کن...

با توجه به این که در سال های اخیر قابلیت اعتماد توانسته است نقش زیادی در مقالات تحقیقاتی و کتاب های مربوطه ایفا نماید، لذا نظریه ی قابلیت اعتماد نیازمند آن است که جایگاه مهمی در آمار مدرن پیدا کند. بحث قابلیت اعتماد از جالب ترین مباحث آمار است که برای هر نوع سلیقه و ضرورت های علمی مطلبی ارزنده دارد. قابلیت اطمینان، چالش کیفیت در قرن ۲۱ و از شاخص ترین ابعاد مرغوبیت کالا و خدمات می باشد. زیرا به خاطر پیچیدگی طراحی سیستم ها، هزینه ضمانت محصول رو به افزایش است. قابلیت اطمینان پایین شدیداً بر مرز زیرین بقاء تأثیر گذاشته و مانع توانایی شرکت در کسب و حفظ سهم بازار می شود. بنابراین برای حضور مستمر و دستیابی به نام ماندگار، باید نگرانی استفاده کننده از محصول در طول زمان در مورد درست کار کردن محصول کاهش یابد.

البته در گذشته قابلیت اطمینان دغدغه ی صنایع حساس و پیچیده مانند صنایع نظامی، هسته ای و هوا فضا بود که عدم قابلیت اطمینان آنها می توانست آسیب های جبران ناپذیری وارد نماید. در سال های اخیر، حوزه ی قابلیت اعتماد سیستم های منسجم توجه بسیاری از پژوهشگران را به سوی خود جلب کرده است. مطالعه ی دانشمندان آماری در حوزه ی قابلیت اعتماد و آنالیز بقاء موجب شده ویژگی های قابلیت اعتماد، بویژه کران های قابلیت اعتماد سیستم های منسجم توجه بسیاری را به سوی خود جلب کند. مقالات و کتب بسیاری توسط محققان، طی دهه های اخیر درباره قابلیت اعتماد سیستم ها و ویژگی های آنها نوشته شده است که از جمله آنها می توان به نوشته های بارلو و پروشان [۱] (۱۹۷۵) اشاره کرد. ریچلیک [۲] (۱۹۵۵) سیستم های دارای مؤلفه های وابسته با توزیع های متفاوت را مورد بررسی قرار داده و برای قابلیت اعتماد آنها کران هایی ارائه نموده است. همچنین فو و کوتراس [۳] (۱۹۹۵) کران های قابلیت اعتماد سیستم های منسجم با مؤلفه های مستقل را مورد بررسی قرار دادند.

---

[۱] Barlow , Proschan

[۲] Rychlik

[۳] Fu , Koutras

در این رساله کران هایی برای قابلیت اعتماد سیستم های منسجم مورد بررسی قرار گرفته است. در فصل اول، تعاریف و مفاهیم مورد نیاز و قضایای مورد استفاده آورده شده است. در فصل دوم برخی از توابع ساختار سیستم های منسجم و قابلیت آنها بیان شده است. در فصل سوم کران های قابلیت اعتماد سیستم های منسجم با مؤلفه های مستقل بیان شده و همچنین قضایای حدی کلی را برای محاسبه ی قابلیت اعتماد سیستم محاسبه خواهیم کرد. مقاله ی اصلی در این پایان نامه

$$"J.C.Fu, M.V.Koutras, Reliability\ bounds\ for\ coherent\ structures\ with\ independent$$

$$components,\ Satistics\ \ Probability\ Letters,\ ۲۲(۱۹۹۵)۱۳۷-۱۴۸."$$

می باشد.

در آخر، پیوست، واژه نامه ی انگلیسی به فارسی و مراجع استفاده شده در این پایان نامه درج شده است.

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

۱.۱ مقدمه

در این فصل برخی از نمادها و مفاهیم مقدماتی که در فصل های دیگر مورد استفاده قرار می گیرند و همچنین برخی از قضایای مفید ارائه شده است.
ابتدا بعضی نمادها و علائم اختصاری در قالب یک جدول آورده شده و سپس مفاهیم اساسی احتمال و قواعد و اصول احتمال و برخی از تعاریف و مفاهیم ریاضی بیان شده اند. در پایان نیز به تعریف و بیان مفاهیم اساسی درباره ی قابلیت اعتماد پرداخته شده است.

۲.۱ نمادها و علایم اختصاری

تعریف	نماد
تابع توزیع X	$F(x) = P(X \leq x)$
تابع قابلیت اعتماد سیستم	$R(t) = P(T > t)$
تابع بقاء توزیع F	$\overline{F}(t)$
طول عمر سیستم	T
مستقل و هم توزیع	iid
امید ریاضی	$E(.)$
اندازه احتمال	$P(.)$
به شرط آنکه	$\|$
توزیع شرطی X به شرط رخداد واقعه A	$X\|A$
تابع چگالی احتمال	$f(x)$
عملگر مجموعه ای سوپریمم	$\sup$
عملگر مجموعه ای ماکزیمم	$\max$
عملگر مجموعه ای مینیمم	$\min$
تابع ساختار سیستم	$\phi(\mathbf{x})$
مجموعه ی تمام مؤلفه های سیستم	I
مجموعه ی مؤلفه های n امین سیستم	I_n
پیشامد این که تمام مؤلفه های B خراب باشند و متمم آن سالم باشند	E_B
تعداد مؤلفه ها و حفره که به طور مستقیم به مؤلفه ی jام $(1 \leq j \leq n)$ وصل اند	k_j
حالت مؤلفه ی j ام. یعنی اگر j کار کند $X_j = 1$ و در غیر این صورت $X_j = 0$.	X_j
مجموعه ی مرتب متشکل از مجموعه های قطع کننده ی مینیمال	$\mathbf{C}$
متمم B نسبت به I ؛ یعنی $B' = I - B$	B'
$C_k \cap C'_{m+1}$; $k = 1, ..., m$; $m = 1, ..., N$; $(C_{N+1=\emptyset})$	D_m^k
پیشامد این که $\{X_j = 0 \ , \ j \in D_m^k\}$ $k = 1, 2, ..., m$ ؛ $m = 1, 2, ..., N$	E_m^k
پیشامد این که {برای حداقل یک $X_j = 1 \ , \ j \in D_m^k\}$	$E_m^{k\prime}$
احتمال این که سیستم فعال باشد ؛ $R = 1 - P\{E_N^1 \cup ... \cup E_N^N\}$	R

۳.۱ آشنایی با مفاهیم اساسی احتمال

۱.۳.۱ اصول احتمال و بعضی قاعده های آن

اصل موضوع ۱. احتمال یک پیشامد، عددی حقیقی نامنفی است، یعنی برای هر زیر مجموعه ی A در فضای نمونه ای S ، $P(A) \geq ۰$.

اصل موضوع ۲. $P(S) = ۱$.

اصل موضوع ۳. اگر $A_۱, A_۲, ...$, دنباله ای متناهی یا نامتناهی از پیشامد های دو به دو ناسازگار S باشند، آنگاه

$$P(A_۱ \cup A_۲ \cup ...) = P(A_۱) + P(A_۲) + ...$$

با استفاده از سه اصل موضوع احتمال، می توانیم بسیاری از قاعده های دیگر که کاربرد های مهمی دارند را نتیجه بگیریم. برای اثبات این قضایا به کتاب آمار ریاضی جان فروند [۲۳] ، مراجعه شود.

قضیه ۱.۳.۱. اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه ای S باشند، آنگاه

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \tag{۱.۱}$$

قضیه ۲.۳.۱. اگر A ، B ، C ، سه پیشامد دلخواه در فضای نمونه ای S باشند، آنگاه

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C). \tag{۲.۱}$$

قضیه ۳.۳.۱. اگر A و B دو پیشامد دلخواه در فضای نمونه ای S باشند و $P(A) \neq ۰$ ، آنگاه

$$P(A \cap B) = P(A).P(B|A) \tag{۳.۱}$$

قضیه ۴.۳.۱. اگر $A_۱$ ،...، A_n ، n پیشامد دلخواه در فضای نمونه ای S باشند و $P(A_i) \neq ۰$ برای $i = ۱, ..., n$ ، آنگاه

$$P\Big(\bigcap_{i=۱}^{n} A_i\Big) = P(A_۱) \prod_{j=۲}^{n} P\Big(A_j \Big| \bigcap_{i=۱}^{j-۱} A_i\Big). \tag{۴.۱}$$

۲.۳.۱ پیشامدهای مستقل

با بیانی شهودی، دو پیشامد A و B را مستقل می گویند اگر رخ دادن یا رخ ندادن هر یک از آنها در احتمال رخ دادن دیگری تأثیری نداشته باشد. به طور نمادی، دو پیشامد A و B مستقل اند اگر

$$P(A|B) = P(A) \quad , \quad P(B|A) = P(B) \tag{۵.۱}$$

و موقعی که هر دو احتمال شرطی موجود باشند، یعنی وقتی $P(A)$ و $P(B)$ صفر نباشند، می توان نشان داد که هر یک از این برابریها دیگری را نتیجه می دهد.

تعریف ۱.۳.۱. دو پیشامد A و B مستقل اند اگر و تنها اگر

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) \tag{۶.۱}$$

قضیه ۵.۳.۱. اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند، آنگاه دو پیشامد A و B' نیز مستقل اند.

تعریف ۲.۳.۱. پیشامدهای A_1، A_2، ...، A_k مستقل اند اگر و تنها اگر احتمال اشتراک هر۲،۳،...، یا k تا از این پیشامدها مساوی حاصلضرب احتمال های مربوط به هر پیشامد باشد.

قضیه ۶.۳.۱. اگر پیشامد A از پیشامد B و پیشامد A از پیشامد C مستقل باشند، آنگاه پیشامد A از پیشامد $B \cup C$ مستقل است. همچنین پیشامد A از $B \cap C$ نیز مستقل می باشد.

تعریف ۳.۳.۱. اگر S یک فضای نمونه ای با یک اندازه احتمال و X یک تابع حقیقی-مقدار باشد که روی عناصر S تعریف شده است، آنگاه X متغیر تصادفی نامیده می شود.

تعریف ۴.۳.۱. گوییم متغیرهای X و Y مستقل از هم اند اگر برای هر $x, y \in R$ ،

$$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$$

در این صورت شرط بالا معادل با شرط زیر است:

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y) \quad , \quad \forall x, y \in R$$

به طریق مشابه استقلال n متغیر تصادفی $X_1, ..., X_n$ تعریف می شود.

۴.۱ برخی از تعاریف و مفاهیم ریاضی

قضیه ۱.۴.۱. (قضیه فشردگی): اگر I بازه ای شامل نقطه ی a باشد و f و g و h توابعی باشند که بر I به جزء احتمالاً در خود نقطه ی a تعریف شده اند، با فرض این که برای هر x مخالف a در بازه ی I داشته باشیم:

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

همچنین با فرض این که

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

آنگاه

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

تعریف ۱.۴.۱. (کوچکترین کران بالا): اگر S یک مجموعه ی مرتب و E زیر مجموعه ای از S باشد که از بالا کراندار است و همچنین عنصری مانند a از S با خواص زیر وجود داشته باشد؛
الف) a یک کران بالایی E باشد.
ب) هر گاه $b < a$ ، آنگاه b یک کران بالایی E نباشد
در این صورت a کوچکترین کران بالایی یا سوپریمم E نامیده می شود و به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$a = \sup E$$

تعریف ۲.۴.۱. (بزرگترین کران پایین): اگر S یک مجموعه ی مرتب و E زیر مجموعه ای از S باشد که از پایین کراندار است و همچنین عنصری مانند a از S با خواص زیر وجود داشته باشد؛
الف) a یک کران پایینی E باشد.
ب) هر گاه $b > a$ ، آنگاه b یک کران پایینی E نباشد در این صورت a بزرگترین کران پایینی یا اینفیمم E نامیده می شود و می توان گفت

$$a = \inf E.$$

۵.۱ تعاریف و مفاهیم قابلیت اعتماد

موتور یک اتومبیل، یک وسیله ی الکتریکی مانند انواع لامپ ها، یک قطعه ی الکترونیکی مانند IC و بسیاری دیگر، همگی مثال هایی از یک سیستم هستند، همواره تلاش محققان این بوده است که سیستم را از جنبه های مختلف ارتقاء دهند. یکی از زمینه های همین گونه تلاش ها، بررسی میزان کارکرد یک سیستم از لحظه ی شروع به کار آن تا لحظه ای که سیستم از کار کردن باز می ماند بوده است. در واقع از این نقطه نظر هدف آنها بهینه سازی طول عمر یک سیستم است.

نظریه های ریاضی، احتمالی و آماری بسیاری راجع به بهینه سازی زمان کارکرد سیستم های مختلف ثبت شده اند، که مجموعه ی آنها را می توان در چارچوب مبحث قابلیت اطمینان یافت.

در اغلب اوقات سیستم ها دارای یک ساختار چند جزئی هستند. یعنی آنها از چند جزء ساده تر تشکیل شده اند، به هر کدام از اجزای ساده ی یک سیستم، مؤلفه گفته می شود. بنابراین لازم است برای بررسی طول عمر یک سیستم ابتدا به بررسی طول عمر مؤلفه ها بپردازیم. پایه و اساس تعریف تابع قابلیت اعتماد و سایر توابع مرتبط، متغیر طول عمر می باشد. احتمال موفقیت یا احتمال اینکه سیستمی بدون شکست به وظایف تعیین شده در طراحی (در یک محدوده زمانی و مکانی) عمل کند را قابلیت اعتماد آن سیستم می نامیم. واژه قابلیت اعتماد برای بیان درجه ی معینی از اطمینان بکار می رود که بر اساس آن یک دستگاه در محیط مشخص و دوره ی زمانی معین به طور موفقیت آمیز عمل خواهد کرد. در مبحث قابلیت اعتماد مشخصه ی مورد مطالعه، زمان شکست یا طول عمر دستگاه (فرد) می باشد. طول عمر یک دستگاه (فرد) عبارت است از طول فاصله ی زمانی از فعالیت اولیه تا زمان شکست. منظور از شکست وضعیتی است که دستگاه (فرد) نتواند کار محوله را در زمان مورد نظر به طور رضایت بخشی انجام دهد. بنابراین احتمال اینکه سیستم به طور موفقیت آمیزی کار کند، قابلیت اعتماد سیستم یا احتمال بقاء سیستم گویند.

تعریف ۱.۵.۱. (موجود): در بحث قابلیت اعتماد منظور از موجود، یک قطعه، یک کالا و یا یک سیستم می باشد.

تعریف ۲.۵.۱. (قابلیت اعتماد یک موجود): عبارت است از احتمال اینکه موجود کار مورد نظر را تحت شرایط معین در فاصله زمانی مشخص بدون خرابی انجام دهد.

تعریف ۳.۵.۱. (خرابی یا شکست): متوقف شدن توانایی موجود برای انجام کار معین تحت شرایط لازم را شکست یا خرابی می نامند.

تعریف ۴.۵.۱. (تابع قابلیت اعتماد): فرض کنیم T متغیر تصادفی نامنفی پیوسته ای است که عمر مفید (یا طول عمر، یا زمان پیش از خرابی) یک موجود را نشان می دهد. تابع قابلیت اعتماد که آن را

با $R(t)$ نمایش می دهیم عبارت است از احتمال اینکه موجود مورد نظر لااقل t واحد زمان کار کند و به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$R(t) = P(T > t) = ۱ - F(t) = \int_t^\infty f(x)dx \quad , \quad t > ۰ \tag{۷.۱}$$

که در آن f و F به ترتیب تابع چگالی و تابع توزیع T می باشند.
در حقیقت تابع قابلیت اعتماد احتمال عملکرد مطلوب یک مؤلفه (فرد ، دستگاه) در یک فاصله ی زمانی را تعیین می کند، عملکرد مطلوب بدین معنی است که مؤلفه در فاصله ی زمانی (t, ∞) به طور موفقیت آمیزی کار کرده و در این فاصله به تعویض قطعه یا هر گونه عملیات تعمیراتی نیاز نداشته باشد.

تذکر ۱.۵.۱. متغیر تصادفی طول عمر یک مؤلفه را زمان از کار افتادگی نیز می گویند.

فصل ۲

قابلیت اعتماد سیستم های منسجم و برخی از کران های آن

۱.۲ مقدمه

در این فصل به تعریف سیستم منسجم و بیان انواع آن پرداخته شده است. همچنین تابع ساختار سیستم های منسجم معرفی شده اند، سپس به بیان و محاسبه ی قابلیت اعتماد سیستم منسجم پرداخته شده است و در پایان این فصل کران هایی برای قابلیت اعتماد سیستم های منسجم ارائه شده است.
مطالب و اثبات قضایای این فصل را می توانید در کتاب بارلو وپروشان (۱۹۷۵)[۱] ،[۳] ، ببینید.

۲.۲ ساختار سیستم

همان طور که گفته شد هر سیستم از چندین مؤلفه تشکیل می شود. بنابراین به منظور بررسی طول عمر یا زمان از کار افتادگی آن باید به بررسی طول عمر یا زمان از کار افتادگی مؤلفه هایی که سیستم از آنها تشکیل شده است بپردازیم. به منظور بررسی زمان از کار افتادگی سیستم ها، مسئله ی مهم این است که سیستم تحت چه ساختاری از مؤلفه های خود تشکیل شده است. به عبارت ساده تر مؤلفه ها چگونه در کنار هم قرار گرفته اند.

تذکر ۱.۲.۲. در آغاز اشاره می کنیم که منظور از مرتبه یک سیستم تعداد مؤلفه های مجزایی است که سیستم را تشکیل می دهند.

---

[۱] Barlow and Proschan

فرض کنیم سیستمی از n مؤلفه تشکیل شده باشد تابع وضعیت مؤلفه ی i ام که $i = ۱, ۲, ..., n$، به صورت زیر است:

$$x_i = \begin{cases} ۱ & \text{اگر مؤلفه } i \text{ ام در حال کار کردن باشد} \\ ۰ & \text{اگر مؤلفه } i \text{ ام در حال کار کردن نباشد} \end{cases} \qquad (۱.۲)$$

قرار می دهیم $\mathbf{x} = (x_۱, ..., x_n)$، در این صورت تابع وضعیت سیستم یا تابع ساختار سیستم را به فرم زیر تعریف می کنیم:

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر کل سیستم فعال باشد} \\ ۰ & \text{اگر کل سیستم غیر فعال باشد} \end{cases} \qquad (۲.۲)$$

در ادامه به معرفی برخی از ساختارهای اساسی می پردازیم.

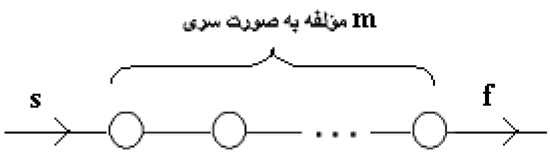
تعریف ۱.۲.۲. (ساختار سری): سیستمی را در نظر بگیرید که وقتی کار می کند که همه ی مؤلفه ها در حال کار کردن باشند یعنی

$$\phi(\mathbf{x}) = ۱ \Longleftrightarrow x_i = ۱, \forall\, i \in \{۱, ..., n\}$$

یا به عبارتی، با توجه به صفر یا یک بودن x_i ها، داریم:

$$\phi(\mathbf{x}) = \prod_{i=۱}^{n} x_i = \min(x_۱, ..., x_n)$$

چنین سیستمی، سیستم سری نامیده می شود و می توان آن را به شکل زیر نشان داد. سیستم کار می کند اگر اتصال میان نقطه سمت چپ شکل (s) و نقطه سمت راست شکل (f) برقرار باشد. اگر یکی از مؤلفه ها از کار بیفتد، اتصال از بین رفته و در نتیجه سیستم از کار می افتد.



شکل ۱.۲: ساختارسری

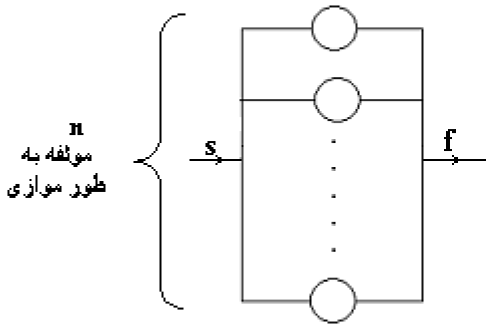
تعریف ۲.۲.۲. (ساختار موازی): سیستمی را در نظر بگیرید که وقتی کار می کند که حداقل یکی از مؤلفه ها در حال کار کردن باشد یعنی

$$\phi(\mathbf{x}) = 1 \iff \exists\, i \in \{1, ..., n\} : x_i = 1$$

یا به عبارتی

$$\phi(\mathbf{x}) = \coprod_{i=1}^{n} x_i = \max(x_1, ..., x_n)$$

چنین سیستمی سیستم موازی نامیده می شود و می توان آن را به صورت شکل زیر نشان داد. تنها کار کردن یکی از مؤلفه ها کافی است تا اتصال بین s و f برقرار شده و در نتیجه سیستم در حال کار کردن باشد.



شکل ۲.۲: ساختار موازی

تذکر ۲.۲.۲. بسیاری از سیستم ها را می توان به صورت ترکیبی از سیستم های سری و موازی در نظر گرفت.

تذکر ۳.۲.۲.

$$\coprod_{i=1}^{n} x_i = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - x_i) \tag{۳.۲}$$

تعریف ۳.۲.۲. (سیستم های $(k - out - of - n$): سیستمی که تا زمانی که حداقل k تا از n مؤلفه ی آن در حال کار کردن باشد، کار می کند، سیستم k از n نامیده می شود.
بنابراین تابع ساختار آن به صورت زیر است

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \sum_{i=1}^{n} x_i \geq k \\ 0 & \sum_{i=1}^{n} x_i < k \end{cases} \tag{۴.۲}$$