بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه ی دکتری رشته ی ریاضی گرایش آنالیز روی خمینه‌ها

تحدب تعمیم یافته روی خمینه‌های ریمانی

استاد راهنما:

دکتر محمدرضا پوریای ولی

استاد مشاور:

دکتر صغری نوبختیان

پژوهشگر:

علی بارانی

فرودین ماه ۱۳۸۷

شیوه نگارش پایان نامه رعایت شده است.
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه دکتری رشته ریاضی گرایش آنالیز روی خمینه ها آقای علی بارانی

تحت عنوان:

تحدب تعمیم یافته روی خمینه های ریمانی

در تاریخ ...۸۷/۱/۲۸..... توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ....عالـــی.......... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر محمدرضا پوریای ولی	با مرتبه علمی دانشیار	امضاء
۲- استاد مشاور پایان نامه	دکتر صغری نوبختیان	با مرتبه علمی دانشیار	امضاء
۳- استاد داور خارج گروه	دکتر بیژن ظهوری زنگنه	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۴- استاد داور خارج گروه	دکتر علیرضا بحرینی	با مرتبه علمی استادیار	امضاء
۵- استاد داور داخل گروه	دکتر سعید اعظم	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۶- استاد داور داخل گروه	دکتر مجید فخار	با مرتبه علمی استادیار	امضاء

مهر و امضای مدیر گروه..........................

چکیده

در این پایان نامه مفهوم تحدب روی خمینه‌های ریمانی تعمیم داده می‌شود. زیرمجموعه های اینوکس خمینه های ریمانی به عنوان تعمیمی از مجموعه‌های محدب بیان می‌شود. توابع اینوکس و پیش‌اینوکس روی یک مجموعه اینوکس نسبت به نگاشت‌های خاص تعریف است. رابطه بین اینوکسیتی و پیش‌اینوکسیتی برای توابع تعریف شده روی خمینه ها مورد مطالعه قرار خواهد گرفت. با بکار بستن زیردیفرانسیل پروکسیمال نتایج مشخصی درباره نقاط اکسترمم توابع پیش اینوکس غیرهموار روی زیرمجموعه‌های اینوکس مورد مطالعه قرار می‌گیرد. نامساوی مقدار میانگین و قضیه مقدار میانگین در آنالیز اینوکس برای توابع دیفرانسیل پذیر مرتبه اول و دوم روی خمینه‌های کارتان هادامارد تعمیم داده می‌شود.

مفاهیم مختلفی از میدانهای برداری پایا و میدانهای برداری اینوکس نما مورد مطالعه قرار می‌گیرد. مفاهیمی از اینوکسیتی برای توابع روی خمینه های ریمانی و روابط آنها با میدانهای یکنوای برداری پایا مورد مطالعه قرار گرفته است. این مفاهیم تعمیمی از میدانهای برداری یکنوا و اکیداً یکنوا روی خمینه‌های ریمانی می‌باشند. مثالهایی از میدانهای برداری یکنوای پایا ارائه گردیده است.

علاوه بر این مشتق‌پذیری جهت‌دار توابع به همراه مثالهایی در هر مورد در آنالیز اینوکس روی خمینه ها بیان شده است. این نوع مشتق‌پذیری در واقع تعمیمی از مشتق پذیری توابع غیرهموار در آنالیز محدب می‌باشد. به عنوان مثال مفهوم d-اینوکسیتی برای توابع تعریف شده روی زیرمجموعه های اینوکس خمینه‌های ریمانی تعمیم داده شده است. برخی شرایط که تحت آنها مشتق جهت‌دار موجود است مورد بررسی قرار می‌گیرد. سپس این مفهوم برای بررسی شرایط لازم و کافی در مسائل بهینه‌سازی برداری روی خمینه‌های ریمانی مورد استفاده قرار گرفته است.

کلمات کلیدی: مجموعه‌های محدب- توابع محدب- مجموعه‌های اینوکس- توابع اینوکس- توابع پیش اینوکس- میدانهای برداری یکنوا- میدانهای برداری یکنوا پایا- خمینه‌های ریمانی.

فهرست مطالب

پیشگفتار

تحدب نقشی اساسی در بهینه سازی دارداین مفهوم درفضاهای توپولوژیکی خطی به امکان اتصال هر دو نقطه با یک پاره خط در آن فضا بستگی دارد. از آنجائیکه در مسائل واقعی تحدب رخ نمی دهد پیشنهاد تعمیم پاره خط معمولی مورد توجه زیاد قرار گرفته تا فرض تحدب راضعیف نمایند. در سال ۱۹۸۱ هانسن [۲۳] مفهوم اینوکسیتی را که تفاضل $\eta(x,y)$ در تعریف تحدب را به یک تابع $\eta(x,y)$ تعمیم می داد بیان نمود. او تابع دیفرانسیل پذیر $f:\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}$ که برای آن تابع $\eta:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}^n$ وجود دارد و برای هر $x,y\in\mathbb{R}^n$ رابطه

$$f(x)-f(y)\geq\langle\nabla f(y),\eta(x,y)\rangle \qquad (۱.۰.۰)$$

برقراراست را در نظر گرفت. در اینجا $\langle.,.\rangle$ ضرب داخلی معمولی در $\mathbb{R}^n$ است. از آنجا به بعد مقالات زیادی در این زمینه ارایه شد که تعمیم های بیشتر و کاربردهای این موضوع را نشان می دادند . برای اطلاع ازتعمیم های جدید در زمینه تحدب تعمیم یافته می توان به [۳۸] مراجعه نمود. بن ایسرال و موند در [۷] تعمیم جدیدی از مجموعه ها و توابع محدب ارائه دادند سپس کراون آن ها را به ترتیب مجموعه ها و توابع اینوکس نامید. گویند مجموعه $S\subseteq\mathbb{R}^n$ اینوکس نسبت به تابع $\eta:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}^n$ است هرگاه برای هر $x,y\in S$ داشته باشیم

$$y+t\eta(x,y)\in S \quad t\in[۰,۱] \text{ برای هر }. \qquad (۲.۰.۰)$$

یک زیرمجموعه محدب از $\mathbb{R}^n$ در واقع مجموعه ای اینوکس است که $\eta(x,y)=x-y$ انتخاب شود. اما عکس این مطلب درست نیست. فرض $S\subseteq\mathbb{R}^n$ مجموعه ای اینوکس نسبت به $\eta:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}^n$ باشد. تابع $f:S\rightarrow\mathbb{R}$ را η- پیش اینوکس گویند هرگاه برای هر

یک زیر گرادیان v از f در نقطه $\bar{x}$ به وسیله نامساوی زیر مشخص می‌گردد.

$$\langle v, y\rangle \leq f'(\bar{x}, y), \quad y \in \mathbb{R}^n \text{ برای هر }.$$

در اینجا $f'(\bar{x}, y)$ مشتق جهت دار f در نقطه $\bar{x}$ در جهت y با تعریف زیر است

$$f'(\bar{x}; y) := \lim_{t\to \circ^+} \frac{f(\bar{x}+ty)-f(\bar{x})}{t}$$

که خود تابعی محدب از y است. اگر f محدب نباشد آنگاه $f'(\bar{x}; .)$ در حالت کلی محدب نیست و نتایج نهایی در شرایط بهینه سازی قابل دسترسی نیست. پیشنهادی که اکنون طرح می‌شود جایگزین کردن $f'(\bar{x}; .)$ با تابعی است که رفتار بهتری داشته باشد.

یک قدم قاطع برای این جایگزینی به وسیله کلارک برداشته شد [۱۰]. او مفهوم و مشتق جهتی تعمیم یافته را برای توابع موضعاً لیپشیتس بیان نمود و یک حساب دیفرانسیل موثر و به همان صورت شرایط بهینه قابل استفاده بااستفاده از اصطلاحات زیر دیفراسیل خود برای این رده از توابع بیان نمود. این مفهوم برای مسایلی در حساب تغییرات و نظریه کنترل نیز بکار رفته است.

برای توابع غیر لیپشیتس مفهوم مشابه مشتق پیشنهاد گردد. برای توابع نیم پیوسته پایینی تقریب هموار موضعبی از چندین وایین منجر به مفاهیم زیردیفرانسیل های وروکسیمال و فرشه شده است. از طرف دیگر یک خمینه فضایی خطی نیست و تعمیم روش ها و مفاهیم از فضاهای خطی به خمینه های ریمانی امری طبیعی به نظر می رسد. مفهوم تحدب روی خمینه های ریمانی به طور وسیعی مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است [۸] را ببینید. مقالات [۲۴، ۲۵، ۲۶] مقدمه ای بسیار خوب در مورد تحدب روی خمینه های ریمانی را در بر دارند. با وجود تکثر انتشار مطالب در زمینه تحدب روی خمینه های ریمانی نظریه

حساب دیفرانسیل غیرهموار برای توابع تعریف شده روی چنان خمینه های تاکنون در بحث های مرتبط مورد توجه کافی قرار نگرفته است. در [۳] مفهوم زیردیفرانسیل فرشه بیان و نظریه‌ای از حساب دیفرانسیل زیردیفراسیل ها روی خمینه هامنظور شده است. این نظریه برای نشان دادن وجود جواب و یکتایی جوابهای ویسکاسیتی برای معادلات همیلتون — ژاکوبی که روی خمینه های ریمانی تعریف شده اند مورد استفاده واقع شده است. در [۵] زیردیفرانسیل پروکسیمال روی خمینه های ریمانی بیان شده و یک حساب دیفرانسیل برای توابع غیرهموار که روی خمینه ها تعریف شده اند تعمیم داده شده است. سپس به عنوان یک کاربرد دیفرانسیل پذیری و خواص هندسی تابع فاصله برای زیرمجموعه بسته یک خمینه ریمانی توضیح داده شده است. سپس چندین مفهوم مهم آنالیز غیرهموار از فضاهای هیلبرت به خمینه های ریمانی تعمیم داده شده ([۴، ۱۸، ۲۱، ۲۹] را ببینید).

در حالت غیرهموار رابطه بین یکنوایی و تحدب عملگرهای زیردیفرانسیلی به عنوان کاربردی از قضیه تقریب مقدار میانگین در [۳۴] مورد مطالعه قرار گرفته است. راب شاک و ادریش یکنوایی گرادیان توابع ژئودزی محدب را بررسی کردند. خواننده علاقمند می‌تواند به کتابهای [۳۴، ۴۱] و منابع در این زمینه مراجعه نماید. مفهوم میدانهای برداری یکنوا روی خمینه های ریمانی به عنوان تعمیمی از عملگرهای یکنوا به وسیله نمت در [۳۲] بیان شده است. از آن به بعد موارد زیادی در این زمینه به چاپ رسیده که بیانگر تعمیم و کاربردهای بیشتری از میدانهای برداری یکنوا روی خمینه ها می‌باشد. [۱۴، ۱۹] را ببینید.

هدف اصلی این پایان نامه معرفی مجموعه های اینوکس و چندین مفهوم از توابع اینوکس تعمیم یافته روی خمینه های ریمانی است. سپس مفهوم میدانهای برداری یکنوای پایاروی خمینه های ریمانی را مورد مطالعه قرار می دهیم. فصل یک به تعاریف و مفاهیمی مورد نیاز

در طول این پایان نامه اختصاص داده شده است. در فصل دو مجموعه های اینوکس توابع اینوکس و پیش اینوکس به همراه چندین مثال از این مفاهیم معرفی می‌شوند. سپس تعمیم هایی از قضیه مقدار میانگین مرتبه اول و دوم را خمینه های کارتان — هادامارد ارائه خواهیم داد. همچنین خاصیت انتگرال پذیری تابع و رابطه بین توابع محدب و توابع اینوکس مورد مطالعه قرار می گیرد.

در فصل ۳ چندین مفهوم مختلف از اینوکسیتی تعمیم یافته برای توابع تعریف شده روی خمینه های ریمانی را به همراه مثال هایی در هر مورد ارائه می دهیم. سپس میدانهای برداری یکنوای پایا و میدانهای برداری یکنوای پایای تعمیم یافته را روی خمینه تعریف مکنیم. رابطه یکنوایی پایای دیفرانسیل یک تابع دیفرانسیل پذیر را با مفاهیم اینوکسیتی تعمیم یافته بیان می نماییم.

در فصل ۴ مفهوم d- اینوکسیتی برای توابع تعریف شده روی خمینه های ریمانی ارائه می گردد. سپس این مفهوم را برای حل مسائل بهینه سازی برداری مورد استفاده قرار می دهیم.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل برخی تعاریف و نتایج هندسه دیفرانسیل که در این پایان نامه مورد نیاز خواهد بود را یادآوری می کنیم.

۱—۱ متریک های ریمانی

در سراسر این پایان نامه M یک خمینه ریمانی است یعنی زوجی مانند (M,g) که M خمینه‌ای است C^∞ که روی یک فضای هیلبرت H (با بعد متناهی یا نامتناهی) مدل بندی شده و $g_p(.,.)$ یک متریک ریمانی روی فضای مماس $T_pM \cong H$ است . بنابراین یک متریک ریمانی یک تخصیص هموار از یک ضرب درونی به هر فضای مماس می باشد. معمول است که برای هر $v,w \in T_pM$ بنویسیم

$$g_p(v,w) = \langle v,w \rangle_p.$$

نرم نظیر با $\|\ \|_p$ نشان داده می شود . یک متریک ریمانی ما را قادر می سازد تا طول هر بردار مماس (همچنین زاویه بین دو بردار مماس با نقطه ابتدایی مشترک) را حساب کنیم. خم

پیوسته $\gamma : [a,b] \to M$ را تکه ای C^∞ گویند هرگاه یک زیرتقسیم $a = t_\circ < \ldots < t_n = b$ از $[a,b]$ موجود باشد بقسمی که $\gamma|[t_{i-1}, t_i]$ خم هایی C^∞ باشند. اکنون طول یک خم تکه ای C^1 را یادآوری می کنیم.

تعریف ۱.۱ فرض $\gamma : [a,b] \to M$ یک خم تکه ای هموار باشد. در این صورت طولش به صورت زیر است

$$L(\gamma) := \int_a^b \|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)} dt$$

این طول تنها به خود خم $\gamma : [a,b] \to M$ بستگی دارد و به مسیری که نقطه $\gamma(t)$ در طول آن حرکت می کند بستگی ندارد. یعنی اگر $h : [\circ, 1] \to [a,b]$ یک تابع یکنوای پیوسته باشد آنگاه $L(\gamma o h) = L(\gamma)$. خم $\gamma : [\circ, T] \to M$ با طول خم پارامتری شده است هرگاه‌برای هر $t \in [\circ, T]$ داشته باشیم $\|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)} = 1$. برای هر دو نقطه $p, q \in M$ تعریف می کنیم

$$d(p,q) := \inf\{L(\gamma) : \gamma\},$$

که در آن γ هر خم تکه ای هموار دلخواه از p به q است. در این صورت d یک فاصله ($g-$ فاصله) روی M است که توپولوژیی یکسان با توپولوژی طبیعی M به عنوان یک توپولوژی خمینه تعریف می کند. برای این متر گوی بسته به مرکز p و شعاع $r > \circ$ به صورت زیر تعریف می شود

$$B(p,r) = \{q \in M : d(p,q) \le r\}.$$

برای یک خمینه M مجموعه همه میدانهای برداری روی M با نماد $\mathfrak{X}(M)$ نشان داده می شود. یادآوری می شود که در هر خمینه ریمانی یک مشتق همورد یکتای طبیعی به نام

هموستار لوی — سویتا وجود دارد. این مشتق را با $\nabla_X Y$ برای هر $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ نشان می دهیم ([۲۷] را ببینید). این متریک نگاشت $f \mapsto \mathrm{gradf} \in \mathfrak{X}(\mathrm{M})$ که به هر تابع دیفرانسیل پذیر f گرادیانش را از طریق قانون $\langle \mathrm{gradf}, \mathrm{X} \rangle = \mathrm{df}(\mathrm{X})$ برای هر $X \in \mathfrak{X}(M)$ اختصاص می دهد را القا می کند. بنابر قاعده زنجیری اگر $\gamma : [a, b] \to M$ یک خم C^1 باشد داریم

$$(fo\gamma)'(t) = df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)).$$

هسیان تابع دیفرانسیل پذیر مرتبه دوم $f : M \to \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می شود

$$\mathrm{Hessf}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) := \langle \nabla_{\mathrm{X}} \mathrm{gradf}, \mathrm{Y} \rangle,$$

برای هر $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. در این صورت اگر $\gamma : [a, b] \to M$ یک خم C^1 باشد داریم

$$(fo\gamma)''(t) = Hessf_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)).$$

فرض M و N خمینه هایی ریمانی باشند. برای تابع دیفرانسیل پذیر $f : M \to N$ نرم نگاشت مشتق $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ در نقطه $p \in M$ به صورت زیر تعریف می شود ([۳] را ببینید).

$$||df_p||_p := sup\{\zeta(f_p(v)) : v \in T_pM, \zeta \in T_{f(p)}N^*, ||v||_p = 1 = ||\zeta||_{f(p)}\}.$$

یک میدان برداری در طول خم دیفرانسیل پذیر $\gamma : I \to M$ نگاشتی است دیفرانسیل پذیر مانند $V : I \to TM$ بقسمی که برای هر $t \in I$ داریم $V(t) \in T_{\gamma(t)}M$. میدان برداری V در طول خم دیفرانسیل پذیر $\gamma : I \to M$ موازی گفته می شود هرگاه برای هر $t \in I$ داشته باشیم $\nabla_{\gamma'(t)}V = 0$. یادآوری می شود که یک ژئودزی یک خم C^∞ مانند $\gamma : I \to M$ است

بقسمی که برای هر $t \in I$ داشته باشیم

$$\nabla_{d\gamma(t)/dt} d\gamma(t)/dt = \circ.$$

قضیه وجودی معادلات معمولی نتیجه می دهد که برای $v \in TM$ فاصله باز $J(v)$ شامل ∘ و دقیقا یک ژئودزی $\gamma_v : J(v) \to M$ با $d\gamma(\circ)/dt = v$ وجود دارد. بنابراین زیرمجموعه باز $\tilde{T}M$ از TM وجود دارد بقسمی که برای هر $v \in \tilde{T}M$ ژئودزی $\gamma_v(t)$ روی $|t| < ۲$ تعریف شده است. در این صورت نگاشت نمایی $\exp : \tilde{T}M \to M$ به صورت $\exp(v) = J_v(۱)$ تعریف می شود و برای هر $p \in M$ تحدید $\exp$ به تار T_pM با $\exp_p$ نشان داده می شود. برای هر خمینه ریمانی M و هر $p \in M$ عدد $r > \circ$ موجود است به طوری که برای هر $\delta \in (\circ, r]$ نگاشت $\exp_p : B(\circ_p, \delta) \to B(p, \delta)$ یک دیفئومورفیسم C^∞ است. هر خم γ از p به q در M که $L(\gamma) = d(p, q)$ ژئودزی است که یک ژئودزی مینیمال گفته می شود. یک ژئودزی همیشه فاصله بین نقاط به اندازه دلخواه نزدیک به هم را مینیمم می کند.

قضیه ۲.۱ (هاف — رینو) اگر M خمینه ای با بعد متناهی، کامل و همبند باشد آنگاه بین هر دو نقطه حداقل یک ژئودزی مینیمال وجود دارد.

وقتی بعد M نامتناهی باشد قضیه هاف — رینو برقرار نیست. اکلند در [۱۵] ثابت کرد وقتی بعد M نامتناهی باشد مجموعه نقاطی که بین آنها ژئودزی مینیمال وجود دارد در M چگال است. یادآوری می شود که خمینه ریمانی M به طور ژئودزیک کامل گفته می شود هرگاه بازه ماکزیمم تعریف هر ژئودزی در M همه $\mathbb{R}$ باشد. به طور معمول می توان گفت که برای هر $x \in M$ نگاشت نمایی روی همه T_xM تعریف شده است. واضح است که هر خمینه ریمانی کامل به طور ژئودزیک کامل می باشد ([۲۸] را ببینید). چون

$(T_pM, ||\ ||_p)$ فضایی است هیلبرت لذا یک یکسانی ایزومتری خطی بین این فضا و فضای دوگانش یعنی $(T_pM^*, ||\ ||_p)$ وجود دارد. اگر $\gamma : [a, b] \to M$ یک ژئودزی باشد آنگاه برای هر $t_۱, t_۲ \in [a, b]$ هموستار لوی — سویتای ∇، یک ایزومتری $P^{t_۲}_{t_۱,\gamma} : T_{\gamma(t_۱)}M \to T_{\gamma(t_۲)}M$ القا می کند که آن را ترابری موازی در طول γ از $\gamma(t_۱)$ به $\gamma(t_۲)$ گویند. اگر γ یک ژئودزی مینیمال از $x\gamma(t_۱) = y$ به $\gamma(t_۰) =$ باشد نگاشت فوق را با L_{xy} نشان می دهیم. تانسور خمیدگی ریمانی M را با R نشان می دهیم که به هر زوج $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ نگاشت $R(X, Y) : (M) \to \mathfrak{X}(M)$ با تعریف

$$R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z,$$

برای هر $Z \in \mathfrak{X}(M)$ نظیر می کند. خمیدگی برشی هر زیرفضای دوبعدی $\prod$ از T_pM به صورت زیر تعریف می شود:

$$K(X_p, Y_p) := -\frac{\langle R(X_p, Y_p)X_p, Y_p\rangle}{||X_p||^۲||Y_p||^۲ -_p, Y_p\rangle^۲},$$

که در آن $\{X_p, Y_p\}$ یک پایه از $\prod$ است. از نماد $\frac{DV}{dt}(t) := \nabla_{\gamma'(t)}V$ برای میدان برداری V در طول $\gamma : I \to M$ استفاده خواهد شد.

۱—۲ دیفرانسیل نگاشت نمایی

اکنون برخی از خواص تابع $\exp_p : T_pM \to M$ و دیفرانسیل آن یعنی $(d\exp_p)_v : T_v(T_pM) \to T_{\exp_p(v)}M$، $v \in T_pM$ را یادآوری می کنیم.

تابع $f : M \to \mathbb{R}$ را موضعاً لیپشیتز گویند هرگاه برای هر $z \in S$ عدد حقیقی $L_z \geq ۰$ موجود

باشد بقسمی که برای هر x, y در یک همسایگی از z داشته باشیم

$$|f(x)-f(y)| \leq L_z d(x,y).$$

در ابتدا نامساوی مقدار میانگین زیر را یادآوری می نماییم که اثبات آن در [۳] وجود دارد.

قضیه ۳.۱ فرض M و N خمینه های ریمانی بوده و $f: M \to N$ نگاشتی دیفرانسیل پذیر باشد. همچنین فرض ثابت $C > 0$ موجود باشد بقسمی که برای هر $x \in M$ داشته باشیم $\|df(x)\|_x \leq C$. در این صورت f تابعی $C-$ لیپشیتز است یعنی برای هر $p, q \in M$ داریم

$$d_N(f(p), f(q)) \leq C d_M(p,q).$$

واضح است که $(d\exp_p)_{0_p} = id_{T_pM}$ و $(d\exp_p^{-1})_{0_p} = id_{T_pM}$. فرض $C > 1$ و $C = 1+\varepsilon$ برای یک $\varepsilon > 0$. چون تابع $v \mapsto (d\exp_p)_v$ در $v = 0$ پیوسته است $\delta > 0$ موجود است بقسمی که اگر $\|v\| < \delta$ آنگاه $\|(d\exp_p)_v - (d\exp_p)_{0_p}\| < \varepsilon$. بنابراین

$$\|(d\exp_p)_v\| < \|(d\exp_p)_{0_p}\| + \varepsilon = 1+\varepsilon = C.$$

لذا بنابر قضیه (۱.۲.۱) تابع $\exp_p : B(0_p, \delta) \to B(p,\delta)$، $C-$ لیپشیتز است. نتیجه ای مشابه برای تابع $\exp_p^{-1}$ برقرار است. در نتیجه برای هر $C > 1$ عدد $\delta > 0$ موجود است بقسمی که توابع $\exp_p$ و $\exp_p^{-1}$ توابعی $C-$ لیپشیتز روی $B(0_p, \delta)$ هستند. میدان برداری J در طول ژئودزی $\gamma : [0,a] \to M$ یک میدان ژاکوبی گفته می شود هرگاه برای هر $t \in [0,a]$، J در معادله ژاکوبی زیر صدق نماید:

$$\frac{D^2 J}{dt^2}(t) + R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = 0. \qquad (1)$$

همان طور که در قضیه زیر آمده است میدان های ژاکوبی ابزارهایی قوی برای اطلاع از دیفرانسیل تابع نمایی هستند. برای هر $v \in T_pM$ فضاهای T_pM و $T_v(T_pM)$ را یکسان در نظر میگیریم.

قضیه ۴.۱ فرض M خمینه‌ای ریمانی و $x \in M$ و $v \in T_xM$. فرض α یک ژئودزی باشد که $\alpha'(\circ) = v$. فرض $w \in T_v(T_pM)$ و $J_w = J_{o,w}$ یک میدان ژاکوبی در طول α باشد بقسمی که

$$J_\circ = o, \qquad \frac{D}{dt}J_w(\circ) = w.$$

در این صورت برای هر $t > \circ$ متعلق به بازه تعریفα داریم

$$(d\exp_x)_{tv}(w) = \frac{\text{۱}}{t}J_w(t).$$

در حالت خاص $(d\exp_x)_{tv} = \circ$ اگر و فقط اگر $J_w(t) = \circ$. علاوه بر این اگر قرار دهیم

$$\sigma(s,t) = \exp_x(s(v+tw)),$$

آنگاه $J_w(s) = \partial_{\text{۲}}\sigma(s,\circ)$.

میدان های ژاکوبی صورتی از لم گاوس را بدست می دهند.

قضیه ۵.۱ فرض M خمینه‌ای ریمانی و $x \in M$ و $v \in T_xM$. اگر نگاشت $t \mapsto \exp_x(tv)$ روی فاصله باز I تعریف شده باشد آنگاه برای هر $w \in T_v(T_pM)$ داریم

$$\langle (d\exp_x)_{tv}(v), (d\exp_x)_{tv}(w)\rangle = \langle v, w\rangle.$$

نتیجه زیربلافاصله از قضیه (۵.۱) بدست می آید.

نتیجه ۶.۱ فرض M خمینه‌ای ریمانی و $x \in M$ و $v \in T_xM$ باشد. اگر تابع نمایی روی یک فاصله باز I تعریف شده باشد و $w \in T_v(T_pM)$ مضرب ثابتی از v باشد آنگاه:

$$||(d\exp_x)_{tv}(w)|| = ||w||.$$

گزاره بعدی الحاقی دیفرانسیل تابع نمایی را توصیف می کند.

گزاره ۷.۱ فرض M خمینه های ریمانی و $x \in M$ و $v \in T_xM$ باشد. همچنین فرض α یک ژئودزی باشد که $\alpha(\circ) = x$ و $\alpha'(\circ) = v$. اگر $z \in T_{\alpha(1)}M$، $w \in T_{\alpha(\circ)}M$ و $v^* := P^{1}_{\circ,\alpha}(-v) = -\alpha'(1)$ آنگاه داریم

$$\langle (d\exp_x)_v(w), z\rangle_{\alpha(1)} = \langle w, (d\exp_{\alpha(1)})(v^*)\rangle_x.$$

اثبات قضیه زیر را میتوان در [۱۷] یافت.

قضیه ۸.۱ فرض M خمینه‌ای ریمانی با خمیدگی برشی ثابت K و $\gamma : [\circ, a] \to M$ یک ژئودزی نرمال باشد. علاوه بر این فرض J یک میدان ژاکوبی در طول γ عمود بر γ' باشد. فرض $w(t)$ یک میدان موازی در طول γ باشد که $\langle\gamma'(\circ), w(t)\rangle = \circ$ و $\langle\gamma'(\circ), w(t)\rangle = \circ$. در این صورت داریم

$$J(t) = \begin{cases} \frac{\sinh(t\sqrt{K})}{\sqrt{K}} w(t) & , K > \circ \\ tw(t) & , K = \circ \\ \frac{\sinh(t\sqrt{-K})}{K} & , K < \circ. \end{cases}$$

اگر M یک خمینه ریمانی کامل باشد آنگاه تابع $\exp_x$ برای هر $x \in M$ روی کل T_xM تعریف شده است و بین هر دو نقطه M یک ژئودزی مینیمال وجود دارد. در حالت کلی ژئودزیها مینیمال نیستند و ممکن است چندین ژئودزی مینیمال بین دو نقطه وجود داشته باشد. برای مثال دو خمینه فشرده با بعد متناهی هیچ ژئودزی مینیمال با طول بیشتر از قطر نمی تواند مینیمال باشد. به هر حال فرض $\gamma : [\circ, \infty) \to M$ یک ژئودزی نرمال با $\gamma(\circ) = x$ باشد. اگر $t > \circ$ به اندازه کافی کوچک باشد در این صورت $d(\gamma(\circ), \gamma(t)) = t$ یعنی ژئودزی $\gamma([\circ, t])$ مینیمال است. با توجه به پیوستگی تابع فاصله مجموعه نقاط $t > \circ$ که برای آنها $d(\gamma(\circ), \gamma(t)) = t$ شکل $[\circ, t_\circ]$ است یا $[\circ, \infty)$. در حالت اول به $\gamma(t_\circ)$ یک نقطه برش x در طول γ گویند. در حالت دوم گوییم نقطه برش وجود ندارد.

تعریف ۹.۱ فرض M خمینه ای ریمانی باشد و $p \in M$. برش لوکاس p را با $C(p)$ نشان می دهیم و آن را اجتماع همه نقاط برش p در طول همه ژئودزی هایی تعریف می کنیم که از نقطه p شروع می شوند. خواص مهم برش لوکاس و تابع فاصله روی خمینه‌های ریمانی را از [۱۳] و [۱۷] یادآوری می‌کنیم . فرض $p \in M$. تابع فاصله $d_p : M \to \mathbb{R}$ را به صورت $d_p(q) := d(p, q)$ برای هر $q \in M$ تعریف می‌کنیم.

قضیه ۱۰.۱ فرض M خمینه ای ریمانی بوده و $p \in M$ باشد.در این صورت

(i)اگر M با بعد متناهی باشد و $q \in M - C(p)$ آنگاه یک ژئودزی مینیمال یکتا بین p و q وجود دارد.

(ii) d_p روی $M - \{C(p) \cup \{p\}\}$ از کلاس C^∞ است و بردار گرادیانش یعنی ∇d_p در

$q - \{C(p) \cup \{p\}\}$ به صورت زیر داده می شود.

$$\nabla d_p(q) = \gamma'_{p,q}(d(p,q)),$$

که در آن $\gamma_{p,q}$ ژئودزی مینیمال یکتای بین p و q است که با طول قوس پارامتری شده است. مخصوصاً

$$\|\nabla d_p(q)\|_q = ۱$$

۱—۳ تحدب روی خمینه های ریمانی

مفهوم تحدب را برای زیرمجموعه‌های خمینه های ریمانی تعریف می کنیم.

تعریف ۱۱.۱ زیرمجموعه S از خمینه ریمانی M را محدب گوییم هرگاه بین هر دو نقطه متمایز $x,\ y \in S$ یک ژئودزی مینیمال یکتا وجود داشته باشد که تماماً در S بوده و طولش برابر $d(x,y)$ باشد. خمینه ریمانی M محدب موضعی یکنواخت گفته می‌شود هرگاه $c > ۰$ موجود باشد بقسمی که برای هر $x \in M$ و هر $۰ < r < c$ گوی $B(x,r) = \exp_x B(\circ_x, r)$ محدب باشد. هر خمینه ریمانی به مفهوم زیر موضعاً محدب است.

قضیه ۱۲.۱ (وایتهد) فرض M خمینه‌ای ریمانی باشد. برای هر $x \in M$ یک $c > ۰$ وجود دارد بقسمی که برای هر r با $۰ < r < c$ گوی باز $B(x,r) = \exp_x B(\circ_x, r)$ محدب است.

شعاع یک به یکی خمینه ریمانی M در نقطه $x \in M$ را با i_x یا $i(M,x)$ نشان می‌دهیم و آن سوپرمم $r > ۰$ هایی در $\mathbb{R}^+$ است که برای آنها تحدید $\exp_x$ روی $B(\circ_x, r)$ دیفئومورفیسمی