دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد ریاضی

عنوان

خودریختی‌های حاصل‌ضرب مستقیم گروه‌های متناهی

نگارش

منیره سیفی عبدل‌آبادی

استاد راهنما

دکتر سید حیدر جعفری

استاد مشاور

۱۳۹۰

صفحهٔ تصویب نامه توسط هیأت داوران (فرم پیوست ۳ یا ۴ با امضای اصل هیأت داوران مورد قبول است)

قدردانی

شکر و سپاس بیکران خداوندی را

که به من پدری داد که تکیه گاه استوارم باشد

مادری داد که پناهگاه پرمهری برایم باشد

همسری که همواره یار و یاورم باشد

و استادانی که راهنمایم باشند

چکیده

در این پایان‌نامه ساختار و مرتبه گروه خودریختی‌های حاصل‌ضرب مستقیم گروه‌های متناهی را به‌دست می‌آوریم.ما ابتدا نشان می‌دهیم که اگر H و K گروه‌هایی متناهی باشند که هیچ عامل مستقیم مشترکی ندارند و $G = H\times K$، آنگاه ساختار و مرتبه $AutG$ را می‌توان برحسب $AutH$ ، $AutK$ و گروه‌های همریختی مرکزی $Hom(H, Z(K))$ و $Hom(K, Z(H))$ بیان کرد.

در فصل سوم ابتدا گروه خودریختی‌های حاصل‌ضرب مستقیم n نسخه از یک گروه ناآبلی تجزیه‌ناپذیر را می‌یابیم. ما گروه خودریختی‌ها را به‌صورت ماتریس‌هایی با درایه‌هایی که همریختی‌های بین n عامل مستقیم هستند توصیف می‌کنیم. سپس این توصیف را همراه با تعمیم نتیجه ای از بیدول و کاران [1] روی $Aut(H \times K)$ ، که H و K هیچ عامل مستقیم مشترکی ندارند به‌کار می‌بریم تا قضایای ساختار و مرتبه را برای یک حاصل‌ضرب مستقیم دلخواه به‌دست آوریم.

به‌عنوان نتیجه اصلی گروه خودریختی‌های یک حاصل‌ضرب مستقیم متناهی دلخواه $G = H_1^{\beta_1} \times \cdots \times H_n^{\beta_n}$ را توصیف می‌کنیم که H_iها همگی غیرآبلی و تجزیه‌ناپذیرند و $\beta_i \geq 1$ $(1 \leq i \leq n)$. مطالب فصل‌های ۲ و ۳ از منابع [۱۱] و [۱۲] گرفته شده‌اند.

کلمات کلیدی: خودریختی‌ها، حاصل‌ضرب مستقیم، گروه‌های متناهی.

[1] Bidwell,Curran

فهرست مطالب

فصل ۱
مفاهیم اساسی و مقدماتی

۱.۱ تعاریف و نتایج اولیه

در این فصل به بیان تعاریف اولیه و لم‌های مورد نیاز در فصل‌های بعد می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱.۱. مجموعه‌ی همه‌ی همریختی‌های از گروه G به گروه H را با $Hom(G,H)$ نشان می‌دهیم. این مجموعه غیرخالی است زیرا تابع $f:G\to H$ با ضابطه‌ی $f(x)=1$ (به ازای هر x از G) یک همریختی است. (۱ نمایانگر عضو خنثی هر گروه است.)

لم ۲.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه و H یک گروه آبلی باشد. دراین‌صورت $Hom(G,H)$ با عمل زیر یک گروه آبلی است : برای هر f و g در $Hom(G,H)$ و هر x در G ،

$$(f+g)(x)=f(x)g(x).$$

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد. هر همریختی مانند $f:G\to G$ را یک درون‌ریختی G می‌نامیم. مجموعه‌ی همه‌ی درون‌ریختی‌های G را با $End(G)$ نشان می‌دهیم. درصورتی‌که f یک یکریختی از G به G باشد، آن را یک خودریختی G می‌نامیم مجموعه‌ی همه‌ی خودریختی‌های G با عمل ترکیب توابع تشکیل یک گروه می‌دهد که آن را گروه خودریختی‌های G می‌نامیم و با $Aut(G)$ نشان می‌دهیم.

از این پس خودریختی همانی G را که یک درون‌ریختی G نیز هست با علامت ۱ نشان می‌دهیم. همچنین درون‌ریختی بدیهی G را با علامت $\circ$ نمایش خواهیم داد و آن را درون‌ریختی صفر می‌نامیم.

هرگاه α و β دو درون‌ریختی G باشندآنگاه حاصل‌ضرب $\alpha\beta$ (ترکیب دو تابع α و β) نیز یک درون‌ریختی G است. یعنی مجموعه‌ی $End(G)$ نسبت به عمل ضرب (=ترکیب) درون‌ریختی‌ها بسته است. این عمل شرکت‌پذیر نیز هست. پس $End(G)$ با عمل ضرب یک نیم‌گروه است.

لم ۴.۱.۱. اگر $\theta, \phi \in Hom(G, H)$ ، نگاشت $\phi+\theta : G \to H$ که بصورت $(\phi+\theta)(g) = \phi(g)\theta(g)$ تعریف می‌شود یک همریختی است اگر $Im\phi$ و $Im\theta$ با یکدیگر جابجا شوند.

اثبات. برای هر $g, g' \in G$ چون ϕ و θ همریختی هستند و تصاویر آن‌ها جابجا می‌شود، داریم

$$\begin{aligned}
(\phi+\theta)(gg') &= \phi(gg')\theta(gg') \\
&= \phi(g)\phi(g')\theta(g)\theta(g') \\
&= \phi(g)\theta(g)\phi(g')\theta(g') \\
&= (\phi+\theta)(g)(\phi+\theta)(g')
\end{aligned}$$

$\square$

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم G_1 و ... و G_n ، n گروه باشند. در مجموعه $G_1 \times \cdots \times G_n$ عمل دوتایی زیر را چنین تعریف می‌کنیم:

$$(g_1, \ldots, g_n)(g'_1, \ldots, g'_n) = (g_1g'_1, \ldots, g_ng'_n),$$

که در آن برای هر i، g_i و g'_i در G_i اند. به آسانی ملاحظه می‌شود که مجموعه $G_1\times\cdots\times G_n$ با عمل فوق یک گروه است. این گروه را حاصل‌ضرب مستقیم (خارجی) گروه‌های G_1 و ... و G_n می نامند و آن را با همان علامت $G_1\times\cdots\times G_n$ نشان می‌دهیم. هر G_i را یک عامل مستقیم G گوییم.

قضیه ۶.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد و G_1 و ... و G_n زیرگروه هایی از آن باشند به‌طوری‌که

۱. به ازای هر i ، $1 \le i \le n$ ، $G_i \lhd G$ ؛

۲. $G = G_1 \ldots G_n$ ؛

۳. به ازای هر i ، $1 \le i \le n$ ، $G_i \cap G_1 \ldots G_{i-1}G_{i+1}\ldots G_n = 1$.

دراین‌صورت $G \cong G_1\times\cdots\times G_n$.

اثبات. به [۳] رجوع شود.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنیم $x, g \in G$. عضو $g^{-1}xg$ را مزدوج x توسط g می‌نامیم و با x^g نشان می‌دهیم.

به آسانی معلوم می‌شود که به ازای هر g از G ، تابع $i_g : G \to G$ با ضابطه $i_g(x) = x^g$ یک خودریختی G است. این خودریختی را خودریختی داخلی G القا شده توسط g می نامیم. مجموعه‌ی همه‌ی خودریختی‌های داخلی G ، که آن را با $Inn(G)$ نشان می‌دهیم ، یک زیرگروه نرمال $Aut(G)$ است. به علاوه تابع $\tau : G \to Aut(G)$ با ضابطه $\tau(g) = i_g$ یک همریختی است که هسته آن مجموعه اعضایی از G است که با هر عضو G جابه‌جا می‌شوند

و تصویر τ عبارت است از $Inn(G)$. بنابراین،

$$G/Z(G) \cong Inn(G).$$

هر خودریختی G را که داخلی نباشد، خارجی گوییم.

لم ۸.۱.۱. اگر G یک گروه باشد و $H \leqslant Z(G)$ آنگاه $H \lhd G$.

اثبات. بدیهی است. $\square$

لم ۹.۱.۱. اگر $A \leq G$ و $H \leq Z(G)$ ، آنگاه AH ناآبلی است اگر و تنها اگر A ناآبلی باشد.

اثبات. فرض کنیم AH ناآبلی باشد، دراین‌صورت اعضایی مانند $a_1h_1, a_2h_2 \in AH$ موجودند به‌طوری‌که $[a_1h_1, a_2h_2] \neq 1$. اما داریم $h_1, h_2 \in H \subseteq Z(G)$ لذا $[a_1h_1, a_2h_2] = [a_1, a_2]$،. پس $[a_1, a_2] \neq 1$ که $a_1, a_2 \in A$. پس A ناآبلی است. بالعکس فرض کنیم A ناآبلی باشد، دراین‌صورت $a_1, a_2 \in A$ موجودند به‌طوری‌که $[a_1, a_2] \neq 1$ از طرفی داریم $a_1, a_2 \in AH$ پس AH نیز ناآبلی است. $\square$

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد. زیرگروه H از G را یک زیرگروه مشخصه گوییم اگر برای هر $\alpha \in Aut(G)$ داشته باشیم $\alpha(H) = H$. بعنوان مثال $Z(G)$ یک زیرگروه مشخصه G است.

تعریف ۱۱.۱.۱. خودریختی σ از G را خودریختی مرکزی گوییم اگر σ با هر خودریختی در $Inn(G)$ جابجا شود. مجموعه‌ی همه‌ی خودریختی‌های مرکزی G را با $Aut_c(G)$ نشان می‌دهیم.

لم ۱۲.۱.۱. فرض کنید $\sigma \in Aut(G)$. دراین‌صورت σ یک خودریختی مرکزی است اگر و فقط اگر برای هر $g \in G$ داشته باشیم $g^{-1}\sigma(g) \in Z(G)$.

اثبات. فرض کنیم σ یک خودریختی مرکزی باشد، دراین‌صورت برای هر $g \in G$ ، σ با خودریختی داخلی $i_g : G \to G$ ،که هر $x \in G$ را به $g^{-1}xg$ می برد، جابه‌جا می‌شود. پس داریم $i_g\sigma = \sigma i_g$. لذا برای هر $x \in G$ داریم $i_g(\sigma(x)) = \sigma i_g(x)$. بنابراین

$$g^{-1}\sigma(x)g = \sigma(g^{-1}xg) = \sigma(g^{-1})\sigma(x)\sigma(g)$$

با ضرب g از چپ و $\sigma(g^{-1})$ از راست در رابطه فوق داریم $\sigma(x)g\sigma(g^{-1}) = g\sigma(g^{-1})\sigma(x)$. بنابراین $g\sigma(g^{-1})$ با هر $\sigma(x)$ جابه‌جا می‌شود و چون $\{\sigma(x)|x \in G\} = G$ پس $g\sigma(g^{-1})$ با هر عضو G جابه‌جا می‌شود. لذا $g\sigma(g^{-1}) \in Z(G)$. برهان عکس به‌طور بازگشتی برقرار است. □

لم ۱۳.۱.۱. $Aut_c(G)$ یک زیرگروه نرمال $Aut(G)$ است.

اثبات. فرض کنید $\alpha \in Aut(G)$ و $\sigma \in Aut_c(G)$. داریم

$$\begin{aligned}
x^{-1}((\alpha^{-1}\sigma\alpha)(x)) &= x^{-1}\alpha^{-1}(\sigma(\alpha(x))) \\
&= x^{-1}\alpha^{-1}(\alpha(x)(\alpha(x)^{-1}\sigma(\alpha(x))) \\
&= x^{-1}\alpha^{-1}(\alpha(x))\alpha^{-1}(\alpha(x)^{-1}\sigma(\alpha(x))) \\
&= x^{-1}x\ \alpha^{-1}(\alpha(x)^{-1}\sigma(\alpha(x))) \\
&= \alpha^{-1}(\alpha(x)^{-1}\sigma(\alpha(x)))
\end{aligned}$$

حال چون $\sigma \in Aut_c(G)$ لذا $\alpha(x)^{-1}\sigma(\alpha(x)) \in Z(G)$ و چون $Z(G)$ یک زیرگروه مشخصه است لذا $\alpha^{-1}(\alpha(x)^{-1}\sigma(\alpha(x))) \in Z(G)$. بنابراین $\alpha^{-1}\sigma\alpha \in Aut_c(G)$. لذا $Aut_c(G) \lhd Aut(G)$. □

تعریف ۱۴.۱.۱. گروه G را یک گروه به‌طورمحض ناآبلی گوییم اگر در هر تجزیه G هیچ عامل آبلی وجود نداشته باشد.

لم ۱۵.۱.۱. فرض کنید G یک گروه به‌طورمحض ناآبلی باشد و $\phi \in Hom(G, Z(G))$ ، دراین‌صورت برای هر $g \in G$ ، نگاشت $\sigma : G \to G$ ، با ضابطه‌ی $\sigma(g) = g\phi(g)$ یک خودریختی مرکزی G است.

اثبات. برای هر $g \in G$ داریم

$$g^{-1}\sigma(g) = g^{-1}g\phi(g) = \phi(g) \in Z(G)$$

پس بنا به لم ۱۲.۱.۱ σ ، یک خودریختی مرکزی است. □

تعریف ۱۶.۱.۱. اگر G یک گروه باشد و $x, y \in G$ ، آنگاه $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ را جابجاگر x و y می‌نامیم. زیرگروه G تولید شده به وسیله‌ی تمام جابجاگرهای اعضای G را زیرگروه جابجاگر G می‌نامیم و آن را با G' نمایش می‌دهیم (گاهی G' را زیرگروه مشتق شده از G یا زیرگروه مشتق G می‌نامیم).

لم ۱۷.۱.۱. فرض کنیم K یک گروه دلخواه و H یک گروه آبلی باشد و $\beta \in Hom(K, H)$ دراین‌صورت داریم $K' \subset Ker\beta$.

اثبات. فرض می‌کنیم $[a, b] \in K'$ مولد دلخواهی از K' باشد، دراین‌صورت چون $Im\beta \subseteq H$ و H آبلی است، داریم

$$\beta([a, b]) = \beta(a^{-1}b^{-1}ab) = \beta(a^{-1})\beta(b^{-1})\beta(a)\beta(b) = 1$$

پس $[a, b] \in ker\beta$. □

لم ۱۸.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه دلخواه و H یک گروه آبلی باشد دراین‌صورت:

$$Hom(G,H) \cong Hom(G/G',H).$$

اثبات. فرض کنید $\phi : G \to H$ یک همریختی باشد. بنا به لم ۱۷.۱.۱ داریم $G' \leq Ker\phi$. لذا همریختی $\bar{\phi} : G/G' \to H$ با ضابطه $\bar{\phi}(gG') = \phi(g)$ متناظر با ϕ موجود است . برای بررسی خوش تعریفی $\bar{\phi}$ فرض می‌کنیم $g_1G' = g_2G'$. دراین‌صورت $g_2^{-1}g_1G' = G'$ در نتیجه $g_2^{-1}g_1 \in G' \leq Ker\phi$ پس $\phi(g_2^{-1}g_1) = 1$ لذا $\phi(g_1) = \phi(g_2)$. بنابراین $\bar{\phi}(g_1G') = \bar{\phi}(g_2G')$. در این صورت نگاشتی که هر $\phi \in Hom(G,H)$ را به $\bar{\phi}$ نظیر می‌کند یک یکریختی است. $\square$

نتیجه ۱۹.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه دلخواه باشد دراین‌صورت:

$$Hom(G,Z(G)) \cong Hom(G/G',Z(G))$$

اثبات. کافی‌است در لم ۱۸.۱.۱ به جای H از $Z(G)$ استفاده کنیم. $\square$

لم ۲۰.۱.۱. فرض کنیم G و H_1 و ... و H_t گروه‌هایی آبلی باشند. دراین‌صورت داریم:

$$Hom(H_1 \times \cdots \times H_t, G) \cong Hom(H_1,G) \times \cdots \times Hom(H_t,G)$$

و

$$Hom(G, H_1 \times \cdots \times H_t) \cong Hom(G,H_1) \times \cdots \times Hom(G,H_t).$$

اثبات. بدیهی است . $\square$

لم ۲۱.۱.۱. فرض کنیم H_1 و ... و H_t گروه‌هایی دلخواه باشند، دراین‌صورت داریم

$$(H_1 \times \cdots \times H_t)' = (H_1' \times \cdots \times H_t')$$

اثبات. کافیست برای حالت ۲ $= t$ و برای مولدهای $H'_۱ \times H'_۲$ و $(H_۱ \times H_۲)'$ثابت کنیم.
برای هر $([a_۱, b_۱], [a_۲, b_۲]) \in H'_۱ \times H'_۲$ داریم

$$([a_۱, b_۱], [a_۲, b_۲]) = (a_۱^{-۱} b_۱^{-۱} a_۱ b_۱, a_۲^{-۱} b_۲^{-۱} a_۲ b_۲) = (a_۱^{-۱}, a_۲^{-۱})(b_۱^{-۱}, b_۲^{-۱})(a_۱, a_۲)(b_۱, b_۲)$$

$$= [(a_۱, a_۲), (b_۱, b_۲)] \in (H_۱ \times H_۲)'$$

برهان عکس به‌طور بازگشتی برقرار است. □

لم ۲۲.۱.۱. اگر G گروهی آبلی باشد و $H_۱$ و ... و H_t گروه‌هایی ناآبلی باشند آنگاه

$$Hom(H_۱ \times \cdots \times H_t, G) \cong Hom(H_۱, G) \times \cdots \times Hom(H_t, G)$$

اثبات. با استفاده از لم‌های ۱۸.۱.۱ ، ۲۰.۱.۱ و ۲۱.۱.۱ داریم

$$Hom(H_۱ \times \cdots \times H_t, G) \cong Hom(\frac{H_۱ \times \cdots \times H_t}{H'_۱ \times \cdots \times H'_t}, G)$$
$$\cong Hom(\frac{H_۱}{H'_۱} \times \cdots \times \frac{H_t}{H'_t}, G)$$
$$\cong Hom(\frac{H_۱}{H'_۱}, G) \times \cdots \times Hom(\frac{H_t}{H'_t}, G)$$
$$\cong Hom(H_۱, G) \times \cdots \times Hom(H_t, G)$$

□

لم ۲۳.۱.۱. اگر p و q دو عدد اول و r و s دو عدد صحیح مثبت باشند و $l = min\{r, s\}$ ،
آنگاه $Hom(C_{p^m}, C_{q^n}) \cong \begin{cases} ۱ & (p \neq q) \\ C_{p^l} & (p = q) \end{cases}$

اثبات. به [۴] رجوع شود. □

لم ۲۴.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد، دراین‌صورت :

۱. $G' \lhd G$ و G/G' گروهی آبلی است.

۲. اگر $N \lhd G$ ، آنگاه G/N آبلی است اگر و تنها اگر $G' \leqslant N$.

اثبات. به [۱] رجوع شود. □

تعریف ۲۵.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه و p یک عدد اول باشد. گروه G را یک p-گروه می‌نامیم درصورتی‌که مرتبه هر عضو G توانی از p باشد. زیرگروه H از G را یک p-زیرگروه G گوییم درصورتی‌که H یک p-گروه باشد.

گزاره ۲۶.۱.۱. اگر G یک p-گروه متناهی باشد آنگاه مرتبه G به صورت p^n است که در آن n یک عدد صحیح نامنفی است. همچنین اگر G گروهی متناهی و مرتبه اش توانی از عدد اول p باشد آنگاه G یک p-گروه خواهد بود.

قضیه ۲۷.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه آبلی متناهی باشد. دراین‌صورت دنباله متناهی $(p_1^{s_1}, \dots, p_m^{s_m})$ از اعداد صحیح مثبت وجود دارد به‌طوری‌که با صرف نظر از ترتیب اعضا منحصربفرد است و $G \cong Z_{p_1^{s_1}} \oplus \cdots \oplus Z_{p_m^{s_m}}$ (p_1 ، ... ،p_m اعدادی اول (نه لزوماً متمایز) و $s_m, \dots, s_1$ اعداد صحیح مثبت (نه لزوماً متمایز) هستند.)

اثبات. به [۵] رجوع شود. □

هر $p_i^{s_i}$ را که در قضیه ۲۷.۱.۱ بیان شد یک مقسوم علیه مقدماتی G می‌نامیم.

تعریف ۲۸.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه و X مجموعه‌ای ناتهی باشد. فرض کنیم به ازای هر g از G و هر x از X، عضو یکتایی از X که آن را با علامت $x * g$ نشان می‌دهیم وجود داشته باشد به‌طوری‌که

۱. به ازای هر x از X، $x * ۱ = x$.

۲. به ازای هر $g_۱$ و $g_۲$ از G و هر x از X، $x * (g_۱ g_۲) = (x * g_۱) * g_۲$

دراین‌صورت گوییم G بر X عمل می‌کند و $*$ را عمل G بر X گوییم.

مثال. ساده‌ترین مثال از گروهی که بر مجموعه‌ای اثر کند گروه متقارن S_X است. در این‌جا با فرض $f \in S_X$ و $x \in X$ قرار می‌دهیم $x * f = f(x)$. به دو طریق مهم یک گروه می‌تواند بر خودش عمل کند. اگر برای هر $x, g \in G$ قرار دهیم $x * g = xg$ که در آن xg به معنی ضرب دو عضو G است به آن عمل منتظم گوییم و اگر قرار دهیم $x * g = g^{-۱} x g$ به آن عمل تزویج گوییم.

۱.۱.۱ حاصل‌ضرب نیم مستقیم و حلقوی

تعریف ۲۹.۱.۱. فرض کنیم H و K دو گروه و $\phi : H \to Aut(K)$ یک همریختی باشد.(به ازای هر h از H تصویر h توسط ϕ را با ϕ_h نشان می‌دهیم.) در حاصل‌ضرب دکارتی $H \times K$ عمل دوتایی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$(h_۱, k_۱)(h_۲, k_۲) = (h_۱ h_۲, (k_۱ \phi_{h_۲}) k_۲).$$

مجموعهٔ $H \times K$ با عمل فوق تشکیل یک گروه می‌دهد. این گروه را حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم H و K با عمل ϕ می‌نامیم و آن را با علامت $H \times_\phi K$ نشان می‌دهیم. و اصطلاحاً می‌گوییم گروه H بر گروه K با ϕ عمل می‌کند. در حالتی که ابهامی در مورد ϕپیش نیاید، یا مشخص کردن آن مورد نیاز نباشد، به جای علامت مذکور از علامت $H \ltimes K$ استفاده می‌کنیم.

تعریف ۳۰.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه و n یک عدد صحیح مثبت باشد. همچنین فرض کنید $\Gamma \leq S_n$ و $\sigma \in \Gamma$ قرار می‌دهیم $K = \underbrace{G \times \cdots \times G}_{n}$ و تابع زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\sigma^* : K \to K$$

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(n)})$$

به سهولت معلوم می‌شود که $\sigma^* \in Aut(K)$ و تابع $\begin{matrix} \phi : \Gamma \to Aut(K) \\ \sigma \mapsto \sigma^* \end{matrix}$ یک تکریختی است. حاصل‌ضرب نیم مستقیم $\Gamma \times_\phi K$ را حاصل‌ضرب حلقوی G و Γ می‌نامیم و آن را با علامت $Gwr\Gamma$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳۱.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه و H یک گروه متناهی باشد. فرض کنیم $\phi : H \to S_{|H|}$ همریختی متناظر با نمایش جایگشتی H با عمل ضرب از راست باشد و قرار می‌دهیم $\Gamma = \phi(H)$. حاصل‌ضرب حلقوی $GwrH$ را حاصل‌ضرب حلقوی G و H می‌نامیم و آن را با علامت $G \wr H$ نشان می‌دهیم .

واضح است که اگر G متناهی باشد آنگاه $|G \wr H| = |H||G|^{|H|}$.

۲.۱.۱ معرفی گروه‌های D_{2n} و Q_{4n}

تعریف ۳۲.۱.۱. گروه $< a, b | a^n = b^2 = 1, bab^{-1} = a^{-1} >$، $(n \geq 3)$ را گروه دووجهی مرتبه $2n$ می‌نامیم و با D_{2n} نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳۳.۱.۱. گروه $< a, b | a^n = b^2, bab^{-1} = a^{-1} >$، $(n \geq 2)$ را گروه کواترنیون تعمیم یافته (یا چهارگانه) از مرتبه $4n$ می‌نامیم و با Q_{4n} نمایش می‌دهیم.

لم ۳۴.۱.۱.

۱. اگر n زوج باشد آنگاه $Z(D_{2n}) =< a^{n/2} >= \{1, a^{n/2}\}$ از مرتبه ۲ و یکریخت با C_2 است. و اگر n فرد باشد آنگاه $Z(D_{2n}) = 1$.

۲. $Z(Q_{4n}) =< a^n >= \{1, a^n\}$ از مرتبه ۲ و یکریخت با C_2 است.

اثبات. به [۲] رجوع شود. □

لم ۳۵.۱.۱. برای $n \geq 3$ داریم $Z(S_n) = 1$ و برای $n \geq 4$ داریم $Z(A_n) = 1$.