دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

آمار ریاضی

آزمون‌های فشار-مرحله‌ای براساس داده‌های طول عمر گسسته

استاد راهنما

دکتر مصطفی رزمخواه

استاد مشاور

دکتر غلامرضا محتشمی برزادران

نگارنده

احمد عارفی مسکونی

شهریور ۱۳۹۱

پیشگفتار

در اکثر رشته‌های صنعتی، نیاز به اجزاء و مصالح با قابلیت اعتماد بالا برای کارائی طولانی مدت بسیار ضروری است. در محصولات با قابلیت اعتماد بالا بدست آوردن تعداد معقولی مشاهده جهت انجام استنباط آمار معمولاً کار ساده‌ای نیست. یکی از روش‌ها متداول در آزمون‌ها طول عمر، برای بدست آوردن مشاهدات، به کار بردن آن‌ها در شرایطی سخت‌تر از شرایط نرمال است. این روش‌ها را روش‌های آزمون شتاب داده شده طول عمر می‌گویند. در آزمون‌های شتاب داده شده طول عمر، مشاهدات خیلی سریع‌تر از حالتی که واحدها در شرایط نرمال مورد استفاده قرار می‌گیرند به دست می‌آیند و در نتیجه سبب کاهش ویژه در زمان و هزینه آزمون طول عمر می‌شود. یک کلاس خاص این آزمون‌ها، آزمون‌های فشار-مرحله‌ای می‌باشد. در این آزمون‌ها، واحدهای آزمایش تحت چندین سطح فشار در طول زمان آزمون قرار می‌گیرند. از طرفی دیگر، توزیع‌های گسسته بطور گسترده در قابلیت اعتماد هنگامی که اندازه‌های طول عمر مقادیر گسسته‌ای از زمان هستند مورد نیاز می‌باشند. هنگامی که طول عمر محصول را می‌توان بر اساس مقایر صحیح نامنفی از متغیرهای تصادفی توصیف کرد، توزیع‌های گسسته مدل بهتری را فراهم می‌کنند. مشهورترین و پرکاربردترین توزیع طول عمر گسسته توزیع هندسی است. .

هدف از این پایان‌نامه بررسی آزمون‌های فشار-مرحله‌ای برای داده‌های طول عمر گسسته است. اگر چه در بخشی اشاره کوتاهی به آزمون‌های فشار-مرحله‌ای در حالت پیوسته داریم، اما بیشتر مطالب این پایان نامه برای داده‌های طول عمر گسسته می‌باشد. این مجموعه شامل شش فصل به شرح زیر است:

در فصل اول، خلاصه‌ای از مفاهیم و مقدمات مورد نیاز فصل‌های بعد آورده شده است. در این فصل نیز

تاریخچه‌ای مختصری از تحقیقات انجام شده در زمینه آزمون‌های شتاب داده شده آورده شده است.

در فصل دوم، مدل نمایش تجمعی به عنوان پایه‌ای‌ترین اصل آزمون‌های فشار-مرحله‌ای معرفی گشته است و یک مثال از طرح آزمون فشار-مرحله‌ای در حالت پیوسته ارائه شده است.

در فصل سوم، طرح آزمون‌های فشار-مرحله‌ای برای داده‌های طول عمر گسسته از توزیع هندسی مورد بحث قرار داده شده است. در این فصل با استفاده از مفهوم گره-گردش تابع درستنمایی مشاهدات را تحت سانسور نوع یک بدست آورده‌ایم. بعد از معرفی برآوردگرهای درستنمایی ماکسیمم پارامترهای مورد توجه مدل، توزیع دقیق آنها را محاسبه نموده‌ایم. و همچنین با استفاده از تابع مولد گشتاور شرطی، گشتاور اول و دوم برآوردگرهای بدست آمده را محاسبه نموده‌ایم. در پایان این فصل، ساختار فواصل اطمینان دقیق، مجانبی و بوت استرپ پارامترهای مدل را مورد بررسی قرار داده‌ایم.

در فصل چهارم، برای تعیین زمان بهینه تغییر سطح فشار در یک آزمون فشار-مرحله‌ای ساده تحت سانسور نوع یک بر اساس داده‌های از توزیع طول عمر هندسی چندین معیار معرفی نموده‌ایم.

در فصل پنجم، با استفاده از روش بیزی مدل فشار-مرحله‌ای ساده تحت سانسور نوع یک بر اساس داده‌ها از توزیع طول عمر هندسی را مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. همچنین برآورد بیز نقطه‌ای و فاصله‌ای پارامترهای مورد توجه مطالعه شده‌اند.

در فصل ششم، طرح آزمون فشار-مرحله‌ای ساده تحت سانسور نوع دو براساس داده‌ها طول عمر هندسی مورد بررسی قرار گرفته است. در این فصل ضمن بدست آوردن تابع درستنمایی ماکسیمم مشاهدات تحت سانسور نوع دو برآوردگر درستنمایی ماکسیمم و یک فاصله اطمینان تقریبی برای پارامترهای مدل نیز معرفی کرده‌ایم.

احمد عارفی مسکونی

شهریور ۱۳۹۱

فهرست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

1. Arefi, A., Razmkhah, M. and Mohtashami Borzadaran, G. R. (2011). *Bayes Estimation for a Simple Step-stress Model with Type-I Censored Data from the Geometric Distribution.* J. Statist. Res. Iran 8, 149–169.

2. Arefi, A. and Razmkhah, M. (2011), *Bayesian inference for geometric distribution under a simple step-strss model.* Proceedings of the 2th Workshop on Reliability and its Applications, Jun 8-9, 2011, University of Isfahan, Isfahan, 48–52.

3. Arefi, A. and Razmkhah, M. (2012), *Inference for a simple step-stress model under Type-II censored sampling from geometric distributions.* 3th Workshop on Reliability and its Applications, July 3-4, 2012, Ferdowsi University of Mashhad.

4. Arefi, A. and Razmkhah, M. (2012), *Analysis of Simple Step-Stress Accelerated Life Test with Geometric Distribution*, The 11th Iranian Statistical Conference.A-10-348. 140.

5. Arefi, A. and Razmkhah, M. (2012), *Optimal simple step-stress plan for Type-I censored data from geometric distribution.* Submitted.

6. Arefi, A. and Razmkhah, M. (2012), *Statistical analysis for a simple step-stress model with Type-I censored data from the geometric distributions.* Submitted.

علائم و نمادها

آزمون‌های شتاب داده شده طول عمر	ALT
آزمون‌های شتاب داده شده طول عمر فشار-مرحله‌ای	SSALT
برآوردگر درستنمایی ماکسیمم	MLE
میانگین زمان خرابی	MTTF
واریانس مجانبی	AV
تابع زیان کمترین مربعات خطا	SEL
سطح فشار iام	S_i
rامین آماره مرتب از نمونه‌ای به حجم n از جامعه X	$X_{r:n}$
تابع توزیع تجمعی X	$F_X(\cdot)$
تابع چگالی احتمال X	$f_X(\cdot)$
تابع توزیع نمایش تجمعی	$G(\cdot)$
تابع چگالی احتمال پیشین θ	$\pi(\theta)$
تابع چگالی احتمال پسین θ به شرط x	$\pi(\theta\|x)$
تابع زیان δ در برآورد پارامتر θ	$\rho(\theta, \delta)$
تابع زیان متعادل وزنی	$L_{\rho,\omega,\delta_0}(\theta, \delta)$
امید ریاضی X	$E[X]$
واریانس X	$Var[X]$
تابع مولد گشتاور شرطی	$M(\nu\|A)$
تابع درستنمایی	$L(\theta)$
تابع گامای کامل	$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-t} t^{a-1} dt$
تابع بتای کامل	$\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx$
تابع بتای ناقص	$\mathrm{B}(z; \alpha, \beta) = \int_0^z x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx$

فهرست مطالب

لیست تصاویر

لیست جداول

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

۱.۱ آزمون‌های شتاب داده شده طول عمر

در اکثر رشته‌های صنعتی، نیاز به اجزاء و مصالح با قابلیت اعتماد بالا برای کارائی طولانی مدت بسیار ضروری است. برای مثال، در صنعت هواپیمائی و هوافضا، همچنین در صنعت اتومبیل و صنعت الکترونیک و بسیاری دیگر از رشته‌های غیر مهندسی مثل علوم پزشکی قابلیت اعتماد بسیار بالا مورد نیاز است . از سوی دیگر، قابلیت اعتماد بالا (طول عمر زیاد) حدود غیر قابل قبولی از زمان و هزینه را برای آزمون‌های طول عمر، تحت شرایط استفاده، موجب شده است. چون بسیاری از محصولات بدون هیچ گونه خرابی، معمولا برای یک سال یا بیشتر کار می‌کنند. در آزمون‌های شتاب داده شده طول عمر (ALT)[۱] ، اجزاء و مصالح آزمایش تحت شرایط بسیار سختگیرانه‌تری از حالت استفاده در شرایط نرمال قرار داده می‌شوند و این باعث می‌گردد محصول بسیار سریعتر از آنچه باید، خراب شود و در نتیجه سبب کاهش ویژه در زمان و هزینه آزمون قابلیت اعتماد می‌شود. به طور کلی، می‌توان هر عاملی را که هم بر طول عمر اثر داشته باشد و هم تحت کنترل محقق باشد، از قبیل دما، ولتاژ، رطوبت و وزن را به عنوان یک سطح فشار در نظر گرفت. این آزمون‌ها مدل مناسبی برای رابطه طول عمر محصول و سطح فشار ارائه می‌کنند. به طور شهودی ALT دارای یک مفهوم ساده است و آن بدست آوردن مشاهدات، سریع‌تر از حالت استفاده در شرایط نرمال است. اما باید تأکید کنیم مکانیزم شکست واحدها در شرایط غیر نرمال باید کاملاً مشابه با مکانیزم شکست در شرایط نرمال باشد. تنها تفاوت این است که آزمایش طول عمر سریع‌تر انجام می‌شود. این امر که زمان شکست سریع‌تر اتفاق می‌افتد در واقع نوعی انتقال مقیاس زمان است.

در یک طرح ALT می‌توان واحدهای نمونه را به دو دسته یا بیشتر تقسیم نمود و هر دسته را در یک سطح فشار تا خاتمه آزمایش قرار داد و زمان خرابی هر واحد از نمونه به عنوان یک مشاهده ثبت گردد. این طرح از آزمون‌های شتاب داده شده طول عمر، آزمون‌های شتاب داده شده طول عمر با فشار ثابت نام دارند. یکی دیگر از مهمترین انواع این آزمون‌ها، آزمون‌های فشار–مرحله‌ای هستند که در بخش بعد توضیح داده

[۱] Accelerated life testing

می‌شوند.

۲.۱ آزمون‌های شتاب داده شده طول عمر فشار-مرحله‌ای

با ظهور تکنولوژی بسیار پیشرفته در صنایع، فراهم کردن یک نمونه به اندازه کافی از زمان‌های خرابی در یک طرح ALT با فشار ثابت مشکل است، زمان‌های خرابی در ALT معمولا پراکنده هستند. بنابراین، ALT با فشار متغیر به عنوان یک چاره برای ALT با فشار ثابت ضروری است. آزمون‌های شتاب داده شده طول عمر فشار-مرحله‌ای (SSALT)[۲] یکی از اساسی‌ترین طرح‌های ALT با فشار متغیر می‌باشد. در یک طرح SSALT واحدهای آزمایش تحت چندین سطح فشار در طول زمان آزمون قرار می‌گیرند. معمولا سطوح فشار بطور صعودی مرتب می‌شوند؛ یعنی آزمایش در پایین‌ترین سطح فشار آغاز می‌شود و سپس در زمان‌های از پیش تعیین شده سطح فشار مرحله به مرحله افزایش می‌یابد و آزمون معمولا تا وقتی همه واحدهای آزمایش خراب شوند (بدون سانسور)، یا برای بدست آوردن تعدادی مشخصی از شکست‌ها (سانسور نوع دو)، یا تا یک زمان مشخص (سانسور نوع یک) و یا ترکیبی از اینها (سانسور هیبریدی) ادامه می‌یابد. بواسطه SSALT می‌توان بر تعداد کم شکست‌ها و طولانی شدن زمان آزمون در سطوح فشار پایین غلبه کرد.

بیشتر کارها و تحقیقات مربوط به ALT و SSALT بر دو جنبه وسیع استنباط آماری و طرح آزمایش‌ها متمرکز شده‌اند. از طریق روش‌های استنباط آماری، پارامترهای توزیع طول عمر یا دیگر فاکتورهای معنی‌دار مدل برآورد و تفسیر می‌شوند. یک طرح آزمون بهینه را می‌توان با مینیمم کردن واریانس مجانبی برآوردگرهای درستنمایی ماکسیمم پارامترهای مورد توجه مدل یا معیارهای دیگر مشخص نمود. در حالت کلی، اهمیت مسئله طراحی SSALT در تعیین مقدار و تعداد سطوح فشار، زمان تعویض و تعداد واحدهای آزمایش در هر سطح فشار و یا چگونگی سطح فشار می‌باشد.

[۲] Step- stress accelerated life testing

۳.۱ تاریخچه

سیدایکین[۳] (۱۹۶۶) مدل نمایش تجمعی را برای یک طرح SSALT با دو سطح فشار معرفی نمود که بعدها توسط باگدانویچ[۴] (۱۹۷۸) و نلسون[۵] (۱۹۸۰) تعمیم داده شد. در سال (۱۹۸۳) میلر[۶] و نلسون بدون هیچ سانسوری بر داده‌ها طرح آزمون با فشار ثابت و آزمون فشار-مرحله‌ای را برای توزیع نمایی مقایسه نمودند و زمان بهینه تغییر سطح فشار را برای یک آزمون SSALT با دو سطح فشار طراحی کردند. معیار بهینه سازی میلر و نلسون حداقل سازی واریانس مجانبی برآوردگرهای درستنمایی ماکسیمم در چارک دلخواه بود. خمیس[۷] (۱۹۹۷) طرح ALT با فشار ثابت و SSALT را برای توزیع وایبل با پارامتر شکل معلوم مقایسه نمود. خمیس و هیجینس[۸] (۱۹۹۸) برخی تعمیم سازی‌ها را برای توزیع وایبل انجام دادند. بای و کیم[۹] (۱۹۹۳) یک طرح فشار-مرحله‌ای را برای توزیع وایبل مورد بررسی قرار دادند. زیانگ[۱۰] (۱۹۹۸) مدل فشار-مرحله‌ای ساده را برای توزیع نمایی تحت سانسور نوع دو مورد مطالعه قرار داد. زیانگ و میلیکان[۱۱] (۱۹۹۹) یک طرح SSALT براساس داده‌های طول عمر نمایی برای زمان‌های تعویض سطح فشار متغیر، در نظر گرفتند. آنها فرض کردند لگاریتم طول عمر واحدهای آزمایش تابع خطی از سطوح فشار باشد. بالاکریشنان و همکاران (۲۰۰۷) یک مدل فشار-مرحله‌ای ساده را تحت سانسور نوع دو برای داده‌ها طول عمر نمایی با تحت مدل لگ-خطی مورد مطالعه قرار دادند. نویسندگان با استفاده از تابع مولد گشتاور شرطی توزیع برآوردگرهای درستنمایی پارامترها را بدست آوردند. آنها سه روش ساختن فاصله اطمینان برای پارامترها پیشنهاد کردند: روش دقیق، روش تقریبی و روش بوت استرپ پارامتری. بالاکریشنان و همکاران

[۳] Sedykin

[۴] Bagdanavicius

[۵] Nelson

[۶] Miller

[۷] Khamis

[۸] Higgins

[۹] Bai and Kim

[۱۰] Xiong

[۱۱] Mlilliken

(۲۰۰۹) مسئله مشابهی را تحت سانسور نوع یک مطالعه کردند. همچنین بالاکریشنان و کی هوا ژی [۱۲] (۲۰۰۷) مسئله مشابهی را برا ی توزیع نمایی تحت سانسور هیبریدی نوع دو بررسی کردند. کاتری[۱۳] و بالاکریشنان (۲۰۰۸) طرح فشار-مرحله‌ای ساده را برای توزیع وایبل مطالعه نمودند. چون نتوانستند فرم بسته‌ای برای برآوردگرهای درستنمایی ماکسیمم بدست آورند با استفاده از الگوریتم نیوتن-رافسون در یک مثال مقدار عددی آنها را حساب کردند. همچنین آنها فاصله اطمینان تقریبی و بوت استرپ پارامترهای توزیع وایبل تحت مدل فشار-مرحله‌ای ساده را بدست آوردند. در سال (۱۹۷۹) دگروت و گل [۱۴] برآورد بیز نقطه‌ای برای یک آزمون فشار-مرحله‌ای ساده بدست آوردند. آنها همچنین یک طرح بهینه ارائه دادند. بای، کیم و لی[۱۵] (۱۹۸۹) تحقیقاتی را برای زمان بهینه انجام دادند. یو و تانگ[۱۶] (۱۹۹۹) تحقیقات انجام شده توسط بای و همکارانش را گسترش دادند. ون دورپ[۱۷] و همکاران (۱۹۹۶) یک مدل استنباط بیزی را برای طرح SSALT با فرض اینکه زمان‌های خرابی داری توزیع نمایی باشند، ارائه کردند. آنها توزیع پیشین دریخله ترتیبی[۱۸] را برای پارامترهای مدل در نظر گرفتند. در سال (۲۰۰۴) ون دروپ و مازوچی[۱۹] این مدل را برای توزیع نمایی در حالت کلی‌تری بررسی کردند. همچنین آنها در سال (۲۰۰۵) این طرح را برای توزیع وایبل ارائه نمودند. گوانا و همکاران (۲۰۰۴) مسئله تعیین نقطه بهینه برای تغییر سطح فشار در یک طرح کلی SSALT با k سطح فشار را با فرض اینکه نمونه با حجم بزرگ از داده‌های سانسور پیش‌رونده[۲۰] نوع یک در دسترس هستند مورد مطالعه قرار دادند. فرد و لی[۲۱] (۲۰۰۹) یک طرح بهینه SSALT ساده با زمان‌های خرابی از توزیع وایبل هنگامی که داده‌ها از سانسور نوع یک آمده‌اند مورد مطالعه قرار دادند.

[۱۲] Qihao Xie

[۱۳] Kateri

[۱۴] DeGroot and Goel

[۱۵] Lee

[۱۶] Yeo and Tang

[۱۷] Van Dorp

[۱۸] Ordered Dirichlet

[۱۹] Mazzuchi

[۲۰] Progressively

[۲۱] Fard and Li

بالاکریشنان و هان[۲۲] (۲۰۰۹) مسئله بهینگی را در یک طرح SSALT با k سطح فشار تحت داده‌های سانسور پیش‌رونده نوع یک از توزیع نمایی بررسی نمودند. وانگ و یو[۲۳](۲۰۰۹) یک طرح SSALT ساده را تحت داده‌های سانسور پیش‌روند نوع دو از توزیع نمایی بررسی کردند. همچنین آنها نقطه بهینه تغییر سطح فشار را بر اساس مینیمم کردن واریانس برآوردگرهای نااریب مشخص کردند. لینگ[۲۴] و همکارن (۲۰۱۱) نقطه بهینه تغییر سطح فشار را در یک طرح SSALT ساده تحت داده‌های سانسور هیبرید نوع یک پیدا کردند. کاتری[۲۵] و همکاران (۲۰۱۱) این مسئله را برای سانسور نوع دو تحقیق کردند.

۴.۱ روش استنباط آماری در قابلیت اعتماد

بیشتر روش‌های آماری در مدل‌بندی و آنالیز آزمون‌های طول عمر قابلیت اعتماد از جمله ALT و SSALT بکار برده می‌شوند، برای مثال، دگروت و گول (۱۹۷۹)، نلسون (۱۹۸۰)، بای[۲۶] و همکاران (۱۹۸۹)، بای و همکاران (۱۹۹۱)، و میتر[۲۷] و میکر (۱۹۹۴) را ببینید. با استفاده از روش‌های آماری، چگونگی زمان‌های خرابی محصول، بر اساس داده‌های بدست آمده در شرایط بسیار سختگیرانه‌تر از شرایط معمولی، برآورد می‌شود. هر دو روش اصلی استنباط آماری؛ یعنی روش کلاسیک و بیزی در تحلیل مدل‌های ALT مورد توجه قرار گرفته‌اند. بیشتر محققین و مهندسین روش کلاسیک را بر اساس برآورد درستنمای ماکسیمم (MLE)[۲۸] مورد توجه قرار داده‌اند. اگر چه بعضی محققان در چهار چوب بیزی عمل نموده‌اند، این روش بخاطر پیچیدگی ذاتی و سختی محاسبات در کاربردهای عملی صنعتی داری محدودیت می‌باشد. هر چند، اخیرا، ورود الگوریتم‌های پیچیده شبیه سازی، مانند زنجیر مارکف مونت کارلو (MCMC)[۲۹] منجر به بکارگیری

[۲۲] Han

[۲۳] Wang and Yu

[۲۴] Ling

[۲۵] Kateri

[۲۶] Bai

[۲۷] Meeter

[۲۸] Maximum likelihood estimation

[۲۹] Markov chain Monte Carlo

روش استنباط بیز در آزمون‌های پیچیده طول عمر شده است.

۵.۱ روش درستنمایی ماکسیمم

روش درستنمایی ماکسیمم یکی از قدیمی‌ترین و پراهمیت‌ترین روش‌ها در نظریه برآوردهاست. این روش که متداول‌ترین روش در بین محققین و استفاده کنندگان علم آمار است، اولین بار توسط گوس[۳۰] (۱۸۲۱) به کار گرفته شد و پس از آن بطور گسترده توسط فیشر[۳۱] مورد استفاده قرار گرفت. روش درستنمایی ماکسیمم عبارت از دستورالعملی برای بدست آوردن برآوردگری به نام MLE و مبتنی بر تابعی به نام تابع درستنمایی است.

۶.۱ روش بیز

در آمار کلاسیک، روش‌های ارائه شده برای برآورد نقطه‌ای و فاصله‌ای پارامترها، بر این اصل پایه‌ریزی شده‌اند که پارامتر θ یک مقدار ثابت ولی نامعلوم است. اما مسایلی وجود دارند که در آن مقدار پارامتر θ متغیر تصادفی است و نمی‌توان آن را یک مقدار ثابت تلقی کرد. آماری که با این دید پایه‌گذاری شده است را آمار بیز می‌نامند.

- **تابع چگالی احتمال پیشین و پسین**

با توجه به ماهیت اصل بیز فرض کنید پارامتر مجهول θ یافته متغیر تصادفی Θ باشد که مقادیر آن متعلق به فضای پارامتر Ω است، بنابراین داری تابع چگالی احتمال می‌باشد، که آن را چگالی احتمال پیشین[۳۲] Θ نامند و با $\pi(\theta)$ نشان می‌دهیم. تابع چگالی احتمال پیشین با کمک اطلاعات قبلی یا از راه تجربه بر پایه سلیقه و عقیده شخصی تعیین می‌گردد. اکنون متغیر تصادفی مورد بررسی X را در نظر می‌گیریم که تابع

[۳۰] Gauss

[۳۱] Fisher

[۳۲] Prior density

چگالی آن به θ بستگی دارد. در این صورت با دو متغیر تصادفی X و Θ سر و کار داریم که x یافته اولی و θ یافته دومی است، و $f(x,\theta)$ چگالی مشترک X و Θ می‌باشد.
با توجه به اینکه Θ یک متغیر تصادفی با تابع چگالی احتمال پیشین $\pi(\theta)$ و متغیر تصادفی X با تابع چگالی احتمال $f(x|\theta)$ است. نمونه تصادفی $\mathbf{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ را از توزیع $f(x|\theta)$ اختیار و فرض می‌کنیم $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ یافته‌های آن باشد. چگالی احتمال شرطی Θ به شرط داشتن $\mathbf{x}$ چگالی احتمال پسین[۳۳] Θ گویند که آن را با $\pi(\theta|\mathbf{x})$ نشان می‌دهیم.

• تابع زیان

از ویژگی‌های یک برآوردگر خوب، این است که به مقدار واقعی پارامتر نامعلوم نزدیک باشد به عبارت دیگر، میزان خطا در آن به صفر نزدیک شود، در این صورت اندازه‌ای از شدت خطا مناسب به نظر می‌رسد. کلمه «زیان» به جای کلمه «خطا» و واژه «تابع زیان» به عنوان اندازه «خطا» به کار می‌روند.
فرض کنید Ω فضای پارامتر θ و δ یک برآوردگر برای θ باشد بطوری که $\delta \in D$ (D فضای یافته‌های δ)، در این صورت تابع زیان[۳۴] که آن را با ρ نشان می‌دهند، به صورت تابعی دو متغیره از $\Omega \times D$ به زیر مجموعه‌ای از اعداد حقیقی تعریف می‌شود، یعنی

$$\rho : \Omega \times D \to [0, +\infty]$$

که باید ویژگی‌های زیر را دارا باشد

$$۱)\ \rho(\theta,\delta) \geq 0, \forall\delta \in D,\ \forall\theta \in \Theta$$

$$۲)\ \rho(\theta,\delta) = 0,\ \text{اگر}\ \delta = \theta.$$

[۳۳] Posterior density

[۳۴] Loss function

بنابراین تابع $\rho(\theta,\delta)$ یک متغیر تصادفی است که فاصله دو نقطه θ و δ را اندزه می‌گیرد. وقتی θ درست مقدار پارامتر است، که با δ برآورد شود، $\rho(\theta,\delta)$ برابر با زیانی است که متحمل می‌شویم.

در یک مسأله برآورد مفروضی باید تابع زیان مناسبی، برای مسأله بخصوص تحت مطالعه تعریف کرد که یک اندازه خطا می‌باشد و احتمالاً این اندازه برای خطای بزرگ بزرگتر از خطای کوچک می‌باشد. توابع زیان متعددی تعریف کرده‌اند، یکی از این توابع زیان معروف و شاید معروفترین، تابع زیان مربع خطا[۳۵] (SEL) است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\rho(\theta,\delta)=(\delta-\theta)^{۲}. \qquad (۱.۱)$$

یک رده دیگر از توابع زیان که در سال‌های اخیر معرفی شده است توابع زیان متعادل وزنی[۳۶] نام دارند که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$L_{\rho,\omega,\delta_{\circ}}(\theta,\delta)=\omega q(\theta)\rho(\delta_{\circ},\delta)+(۱-\omega)q(\theta)\rho(\theta,\delta), \qquad (۲.۱)$$

که $\omega\in[\circ,۱)$، $q(\theta)$ یک تابع مثبت وزنی مناسب، $\rho(\delta_{\circ},\delta)$ یک تابع زیان دلخواه و $\delta_{\circ}$ یک برآوردگر از پیش تعین شده برای θ است که برآوردگر هدف[۳۷] نامیده می‌شود. $\delta_{\circ}$ را می‌توان بر اساس برآوردگر درستنمایی ماکسیمم، کمترین مربعات خطا، نااریب یا دیگر برآوردگرها تعیین کرد. تابع زیان معرفی شده در (۲.۱) منعکس کننده میزان تمایل نسبی برآوردگر δ به هر دو مقدار برآوردگر هدف $\delta_{\circ}$ و مقدار نامعلوم پارامتر θ با انتخاب مقدار مناسب ω است. کلاس توابع زیان متعادل وزنی ابتدا توسط زلنر[۳۸] (۱۹۹۴) معرفی شد. جعفری جوزانی[۳۹] و همکاران (۲۰۰۶b) این توابع زیان را به صورت رده (۲.۱) معرفی و توسعه دادند.

[۳۵] Squared error loss function

[۳۶] Weighted balanced loss

[۳۷] Target

[۳۸] Zellner

[۳۹] Jafari Jozani