دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

# حل عددی معادلات انتگرال نوع اول با استفاده از چند جمله ایهای تیلور

نگارش

حسن فلاحی

استاد راهنما: دکتر حمید صفدری

استاد مشاور: دکتر رضا ملاپور اصل

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی کاربردی

مهر ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحيم

بسمه تعالی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

اصالت اثر تعهدنامه

اینجانب حسن فلاحی متعهد می شوم که مطالب مندرج در این پایان نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این پژوهش از آنها استفاده شده است، مطابق مقررات ارجاع و در فهرست منابع و مأخذ ذکر گردیده است. این پایان نامه قبلاً برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارائه نشده است. در صورت اثبات تخلف(در هر زمان) مدرک تحصیلی صادر شده توسط دانشگاه از اعتبار ساقط خواهد شد.



نام و نام خانوادگی: حسن فلاحی
امضاء

تهران – لویزان – کدپستی۱۶۷۸۸– صندوق پستی۱۶۳ – ۱۶۷۸۵ تلفن ۹– ۲۹۷۰۰۶۰ (داخلی ۲۳۴۷) نمابر ۲۲۹۷۰۰۱۱
پست الکترونیکی
sru@sru.ac.ir

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

# حل عددی معادلات انتگرال نوع اول با استفاده از چند جمله ایهای تیلور

نگارش

حسن فلاحی

استاد راهنما: دکتر حمید صفدری

استاد مشاور: دکتر رضا ملاپور اصل

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی کاربردی

مهر ۱۳۹۱

# تائیدیه هیأت داوران

# تقدیم به

## پدر و مادر مهربانم

## و

## همه کسانی که برایم ذره ای زحمت کشیده اند

*بی تردید این پایان نامه بدون یاری خداوند متعال و حمایت آنها، به سرانجام نمی رسید.*

# تقدیر و تشکر

## من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق

"هر کس از بندگان خداوند تشکر نکند از خداوند تشکر نکرده است"

در اینجا برخود لازم میبینم از زحمات استاد ارجمند آقای دکتر حمید صفدری که با راهنمایی های خود، مرا در انجام این پروژه راهنمایی نمودند قدر دانی و تشکر نمایم. و همچنین از زحمات استاد ارجمند جناب آقای دکتر رضا ملاپور اصل که با مشاوره خویش مرا در انجام این پایان نامه یاری رساندند قدردانی وتشکر نمایم.
در پایان شایسته است از کلیه دوستان صمیمانه قدردانی و تشکر نمایم.

# چکیده

در این پایان نامه حل عددی معادله انتگرال ولترا نوع اول به صورت

$$g(t) = \int_0^t k(t,s)y(s)ds, \qquad t \in I = [0,T]$$

با استفاده از چندجمله ایهای تیلور پیشنهاد شده است.که آن را مورد بررسی قرار می دهیم و در ادامه آن به بررسی خطای روش مذکور و همچنین بررسی همگرایی آن می پردازیم.معادلات انتگرال ولترا نوع اول در زمینه های مختلف علم،از قبیل فیزیک،زیست شناسی،و مهندسی رخ می دهد . در این روش فاصله $I$ را به فاصله های فرعی تقسیم کرده سپس حل تقریبی معادله ی انتگرال ولترای نوع اول در هر فاصله با استفاده از چند جمله ایهای تیلور و در مرحله ی بعد همگرایی این روس مورد بررسی قرار می گیرد و در پایان چند مثال عددی ارائه خواهیم داد. [۲۵]



**واژه های کلیدی:** معادلات انتگرال نوع اول،چندجمله ای تیلور

# فهرست مطالب

# لیست جداول

# لیست تصاویر

# فصل ۱

## تاریخچه

## ۱.۱ مقدمه

نظریه معادلات انتگرال از مهمترین شاخه های آنالیز عددی است و بواسطه تبدیل مسائل مقدار مرزی در تئوری معادلات با مشتقات جزئی بیشتر است و معادلات انتگرال به طور کلی در علومی مانند فیزیک ،میکانیک،پتروشیمی،ساختمان و پل سازی،اشعه ی لیزر،نیروگاههای هسته ای و راکتورها و غیر کاربردهای فراوان دارد.

## ۲.۱ مروری بر پیشینه تحقیق

در ابتدا حل معادله انتگرال تحت عنوان معکوس گیری از انتگرال تلقی می شد ولیکن برای اولین بار اصطلاح معادلات انتگرال توسط ریموند، [۱] پیشنهاد شد.

از سال ۱۷۸۲ لاپلاس،[۲] یک تبدیل انتگرال را بصورت زیر بیان کرد.

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt \tag{۱.۱}$$

در جریان تکامل و پیشرفت ریاضیات، فوریه، [۳] در سال ۱۸۱۱، روی نظریه حرارت کار کرد و تئوری انتگرال فوریه در این سالها شکل گرفت، لذا معمولا گفته میشود که مبدا معادلات انتگرال به تئوری انتگرال فوریه بر می گردد . در سال ۱۸۲۳ آبل در مسائل خود که به مسائل مکانیکی آبل، [۴] معروف

[۱] Reymond
[۲] Laplase
[۳] Fourier
[۴] Abel

است، کاربرد معادلات انتگرال را در چنین مسائلی مطرح نمود. در سال ۱۸۲۶ پواسون، [۵] به معادله انتگرال زیر دست یافت که این معادله قبلا توسط فوریه نیز بدست آمده بود.

$$f(x) = g(x) + \lambda \int \Gamma(x,s) f(s) ds \tag{۲.۱}$$

لیوویل[۶]، در سال ۱۸۲۳ بطور مستقل دسته خاصی از معادلات انتگرال را حل کرد و یک قدم مهم در راه توسعه معادلات انتگرال توسط وی برداشته شد و آن چگونگی حل بعضی از معادلات دیفرانسیل به کمک معادلات انتگرال بود.

اصطلاح نوع اول ودوم که امروزه در مورد معادلات انتگرال بکار برده می شود، اولین بار توسط هیلبرت، [۱] پیشنهاد شد، البته قبل از کار هیلبرت، معادله آبل به فرم زیر مطرح بود.

$$f(x) = g(x) + \int_a^x k(x,y) f(y) dy \tag{۳.۱}$$

پوانکاره [۲]، در سال ۱۸۹۶ معادله انتگرال زیر را که متناظر با معادلات دیفرانسیل جزئی می باشد، بدست آورد.

حرکت موج:

$$\nabla^2 x + \lambda x = f(x,y) \tag{۴.۱}$$

$$u(x) + \lambda \int_a^b k(x,y) x(y) d(y) = f(x) \tag{۵.۱}$$

بعد از گذشت چند سال یعنی در حدود سالهای ۱۹۰۳–۱۹۰۰ یک ریاضیدان سوئدی بنام فردهلم

[۵] Poason
[۶] Liou Vile
[۱] Hilbert
[۲] H.poin Care

[3]، جهت بدست آوردن جواب مسئله فوق تحقیقاتی را انجام داد و این تحقیقات منجر به ارائه قضایای فردهلم که از قضایای بنیادی معادلات انتگرال هستند، گردید. و در اواخر قرن نوزدهم ولترا[4]، نظریه عمومی معادلات انتگرال را ارائه نمود.

ارائه یک سخنرانی توسط اریک هولمگر[5]، در سال۱۹۰۷ روی کارهای فردهلم علاقه هیلبرت را به تحقیق در مورد معادلات انتگرال بر انگیخت و او در بسیاری از مسائل ریاضی فیزیک از معادلات انتگرال بهره گرفت. یکی از کارهای مهم او فرموله کردن مسائل مقدار مرزی به صورت یک معادله انتگرال است.

ارتباط معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال و یا مثالهای دیگری در ریاضی فیزیک، یک تکنیک مهم را جهت حل مسائل مقدار اولیه و مقدار مرزی در تئوری معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات با مشتقات جزئی بوجود آورد که یکی از دستاوردهای مهم مطالعه معادلات انتگرال است. ابتدا قضایای فردهلم برای هسته های پیوسته ارائه شد، لیکن بعدها توسط افراد دیگری نظیرکارلمان[1]، و ریس[2]، برای هسته های کلی تر تعمیم یافت.

در اوایل نیمه دوم قرن اخیر، تحقیقات زیادی روی جواب معادله انتگرال بوسیله هرمن ویل، [3] در ارتباط با معادله انتگرال صورت گرفت. لیکن از آنجا که در حالت کلی قادر به حل بسیاری از معادلات انتگرال که در عمل با آنها مواجه می شویم نیستیم، لذا از آن سالها ، نیاز به روشهای تقریبی و عددی جهت حل معادلات انتگرال آشکار شد.

---

[3] Ivar Fredholm
[4] Vita Voltra
[5] Erick Holmger
[1] F.Carleman
[2] F.Rise
[3] Herman Weyl

# فصل ۲

# مفاهیم مقدماتی

## ۱.۲ مقدمه

در این فصل ما ابتدا تعاریف معادلات انتگرال و متداولترین معادلات انتگرال را بیان می کنیم، و سپس پیش نیاز هایی از معادلات انتگرال را عنوان می کنیم.

تعاریف این بخش بیشتر از مرجع [۱، ۳، ۲۶، ۲۷] آورده شده است.

**تعریف ۱.۱.۲.** ([۱]). یک معادله انتگرال معادله ای است که در آن تابع مجهول در زیر یک یا چند علامت انتگرال قرار دارد.

نمونه هایی از معادلات انتگرال عبارتند از:

$$f(x) = \int_a^b k(x,t)g(t)dt \tag{۱.۲}$$

$$g(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t)g(t)dt \tag{۲.۲}$$

$$g(x) = \int_a^b k(x,t)[g(t)]^2dt, a \leq x \leq b, a \leq t \leq b \tag{۳.۲}$$

که در آنها تابع $g(x)$ نامعلوم و توابع دیگر معلوم هستند .

معادلات انتگرال بسته به نوع تابع مجهول از حیث خطی و غیر خطی بودن و همچنین حدود انتگرال گیری و اینکه تابع مجهول به غیر از زیر علامت انتگرال جای دیگری ظاهر می شود یا نه،

انواع مختلفی دارد. که با توجه به کاربردهای وسیع و متنوع معادلات انتگرال در صنعت ، فیزیک، بیولوژی ، شیمی ، مهندسی و غیره و با نامهای خاصی ظاهر می شوند. مراجع [۲] و [۴] منابع خوبی برای پی بردن به منشا ظهور این گونه معادلات می باشند.

## ۲.۲ انواع معادلات انتگرال

**تعریف ۱.۲.۲.** ([۲۹]). فرم کلی معادلات انتگرال به شکل زیر است :

$$g(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)u(t)dt, \alpha(x) \leq t, x \leq \beta(x) \qquad (۴.۲)$$

که در آن $k(x,t)$ هسته معادله انتگرال و $u(x)$ تابع مجهول می باشند. $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ حدود انتگرال $k(x,t)$ و $f(x)$ و $g(x)$ توابع معلوم هستند.

در کتابهای مختلف معادلات انتگرال را بصورتهای گوناگونی تقسیم بندی می کنند که متداولترین تقسیم بندی معادلات انتگرال بصورت زیر است :

### ۱.۲.۲ معادلات انتگرال خطی فردهلم

**تعریف ۲.۲.۲.** ([۲۹]). درمعادله (۴.۲) اگر $\alpha(x) = a$ و $\beta(x) = b$ توابعی ثابت باشند، معادله را معادله انتگرال فردهلم می نامند. که به صورت زیردسته بندی می شوند :
الف- اگر $g(x) = 0$ آن را معادله انتگرال فردهلم نوع اول می نامند.

$$0 = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt, \qquad a \leq t, x \leq b \qquad (۵.۲)$$

ب- اگر $g(x) \neq 0$ باشد که در این صورت بدون اینکه خللی در کلیت وارد شود می توان فرض کرد $g(x) = 1$ و آن رامعادله انتگرال فردهلم نوع دوم می نامند.