بسم الله الرحمن الرحيم

دانشكده رياضي و رايانه
بخش رياضي

پايان‌نامه تحصيلي براي دريافت درجه كارشناسی ارشد

رشته رياضي

گرايش محاسبات نرم - ساختار هاي جبر ي منطقي

كلاس هايي از مشبكه هاي مانده

مولف:

زهرا احمدي مصردشتي

استاد راهنما:

دكتر ارشام برومند سعيد

بهمن ماه ۱۳۹۰

این پایان نامه به عنوان يكي از شرايط درجه به

بخش رياضي- دانشكده رياضي و رايانه
دانشگاه شهيد باهنر كرمان

تسليم شده و هيچگونه مدركي به عنوان فراغت از تحصيل دوره مزبور شناخته نمي شود.

دانشجو: زهرا احمدي مصردشتي　　امضاء:

استاد راهنما: دكترارشام برومند سعيد　　امضاء:

داور اول : دکتر اسفندیار اسلامی　　امضاء:

داور دوم:دکتر عباس حسنخانی　　امضاء:

نماينده تحصيلات تكميلي: دکتر سید ناصر حسینی　　امضاء:

تقـــــــــــــــديم به

تمام آنان که با گـــــــــــرمي نگاهشان مرا يــــــاري کرده اند.

تشكر و قدرداني

با سپاس از خداي متعال كه مرا در لحظه ي كنون قرار داد و با اميد به رحمت بي كرانش تا آخرين لحظه.

خدا را بسيار شاكرم كه شاگردي استاد گرانقدرم، جناب آقاي دكتر ارشام برومند سعيد، را برايم مقدر فرمود.

همچنین از اساتید ارجمند آقایان دکتر اسفندیار اسلامی و دکتر عباس حسنخانی کمال تشکر را دارم که با رهنمود هایشان این جانب را ارشاد کردند.

چکیده

در ابتداي اين پايان نامه به مقدماتي از جبر جامع وساختارهاي جبري از جمله BL - جبر، MV - جبر، شبه BL - جبر و شبه MV - جبر می پردازیم.

در ادامه به بيان مشبكه ي مانده و خاصيت هاي آن پرداخته و سپس فيلتر هاي مشبكه ي مانده و مشبكه ي فيلتر هاي مشبكه ي مانده را بررسي مي كنيم. سپس مشبكه ي مانده ي موضعي و مشبكه ي مانده ي كامل را بيان كرده و راديكال را روي مشبكه ي مانده تعريف مي كنيم.

در انتها به بيان مشبكه ي مانده ي ارشميدسي پرداخته و سپس حالت جابجايي آن را مورد بررسي قرار مي دهيم.

مقدمه

مشبکه ی مانده ی جابجایی اولین بار توسط M. Ward و R.P. Dilworth در سال 1939 معرفی شد. مشبکه ی مانده ی ناجابجایی گاهی اوقات شبه مشبکه ی مانده یا مشبکه ی مانده ی تعمیم یافته نامیده می شود. مطالعه روی مشبکه ی مانده توســـط H. Ono, T. Kowalski, P. Jipsen و C. Tsinakis گسترش یافته است.

هدف از این پایان نامه مطالعه ی بعضی ازکلاس های خاص مشبکه ی مانده از جمله مشبکه ی مانده ی موضعی، کامل و ارشمیدسی می باشد. برای این منظور در فصل اول مقدماتی از جبر جامع و ساختار های جبری را می آوریم.

در فصل دوم تعریف مشبکه ی مانده را بیان می کنیم و ویژگی خوب بودن آن را بررسی می کنیم، همچنین به تعریف مجموعه های فیلتر و فیلتر نرمال روی مشبکه ی مانده می پردازیم و با بررسی بعضی از ویژگی های مشبکه ی فیلتر های مشبکه ی مانده این فصل را خاتمه می دهیم.

در فصل سوم تعریف کلاس های مشبکه ی مانده ی موضعی و مشبکه ی مانده ی کامل، مطالعه و روابط بین آنها ذکر و اثبات می شود و در انتهای این فصل، تعریف رادیکال مشبکه ی مانده را بیان می کنیم.

در فصل آخر کلاس مشبکه ی مانده ی ارشمیدسی را در دو حالت جابجایی و نا جابجایی تعریف می کنیم و با آوردن یک مثال، نتیجه مهم این پایان نامه را نشان می دهیم که عموما مشبکه ی مانده ی ارشمیدسی جابجایی نیست.

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمات و پیش نیاز ها

در این فصل به بیان پیشنیاز ها وتعاریف مورد نیاز می پردازیم وخواننده را جهت مطالعه ی بیشتر به منابع [11, 14] ارجاع می دهیم.

تعریف ۱.۰.۱. [۲] براي مجموعه ي ناتهي A و عدد صحیح نامنفي n تعـــریف مي کنیم $A^{\circ} = \{\emptyset\}$ براي $n > \circ$، A^n یک مجموعه ي n - تایي از عناصر A است. یک عمل (تابع) n - تایي روي A ، تابع f از A^n به A است؛ n مرتبه ي f مي باشد. تصویر $\langle a_1, \ \ldots, \ a_n \rangle$ تحت یک عمل n تایي f با $f(a_1, \ \ldots, \ a_n)$ نمایش داده مي شود. عمل f روي A ، عمل صفر تایي نامیده مي شود اگر مرتبه ي آن صفر باشد و بوسیله ي $f(\emptyset)$ در A از تنها عنصر $\emptyset$ در A° نشان داده مي شود. بنابراین عمل صفر تایي عضوي از مجموعه ي A است. یک عمل f روي A صفر تایي، دوتایي یا سه تایي مي باشد اگر مرتبه ي آن ۰، ۲ یا ۳ باشد

مثال ۲.۰.۱. جبر $(G, \ *, \ ^{-1}, \ 1)$ با یک عمل دوتایي، یک عمل یکتایي و یک عمل صفر تایي، گروه نامیده مي شود هر گاه در شرایط زیر صدق کند:

(G_1) $x * (y * z) = (x * y) * z$.

(G_2) $x * 1 = 1 * x = x$.

(G_3) $x * x^{-1} = x^{-1} * x = 1$.

تعریف ۳.۰.۱. [۵] یک دستگاه جبري $(A, \ \vee, \ \wedge)$ از نوع $(2, \ 2, \ \circ, \ \circ)$ را یک مشبکه گوییم، هر گاه در شرایط زیر صدق کند :

۱- $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ ، $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$.

۲- $x \wedge y = y \wedge x$ ، $x \vee y = y \vee x$.

۳- $x \wedge x = x$ ، $x \vee x = x$.

۴- $x \wedge (x \vee y) = x$ ، $x \vee (x \wedge y) = x$.

تعریف ۴.۰.۱. [۵] یک دستگاه جبري $(A, \ \vee, \ \wedge, \ \circ, \ 1)$ از نوع $(2, \ 2, \ \circ, \ \circ)$ را یک مشبکه ي کراندار گوییم، هرگاه:

۱- $(A, \ \vee, \ \wedge)$ یک مشبکه باشد.

۲- براي هر $x \in A$ ، $x \wedge \circ = \circ, \ x \vee 1 = 1$.

تعریف ۵.۰.۱. [۵] فرض کنید P یک مشبکه باشد اگر براي هر $S \subseteq P$ ، $\bigvee S$ و $\bigwedge S$ (که به ترتیب سوپریمم و اینفیمم مجموعه ي S مي باشند) وجود داشته باشد، آنگاه P مشبکه ي کامل نامیده مي شود.

تعریف ۱.۰.۶. [۵] مشبکه ي L را توزیع پذیر گوییم، هرگاه براي هر $x,\ y,\ z \in L$ داشته باشیم:

(D_1) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

(D_2) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

تعریف ۱.۰.۷. [۳]، [۱۲] ۱- مشبکه ي کامل $L = (L,\ \wedge,\ \vee)$ براوري نامیده مي شود اگر شرط $a \wedge (\bigvee_{i\in I} b_i) = \bigvee (a \wedge b_i)$ براي هر $a,\ b \in L$ برقرار باشد.

۲-عنصر a از L فشرده نامیده مي شد اگر براي بعضي $a \leq \vee X,\ X \subseteq L$ باشد آنگاه زیر مجموعه ی متناهی $X_1 \subseteq X$ وجود داشته باشد، بطوریکه $a \leq \vee X_1$ باشد.

۳-یک مشبکه کامل ، جبري نامیده مي شود اگر هر عنصر آن فشرده باشد.

مثال ۱.۰.۸. هر زنجیر یک مشبکه ي براوري است.

تعریف ۱.۰.۹. [۱۳] جبر $A = (A,\ \vee,\ \wedge,\ \odot,\ \ \rightarrow,\ 0,\ 1)$ از نوع $(2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 0,\ 0)$ یک BL -جبر است، هر گاه براي هر $x,\ y,\ z \in A$ شرایط زیر برقرار باشند:

(BL_1) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$, $\quad x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$.

(BL_2) $x \wedge y = y \wedge x$, $\quad x \vee y = y \vee x$.

(BL_3) $x \wedge x = x$, $\quad x \vee x = x$.

(BL_4) $x \wedge (x \vee y)$ $\quad x \vee (x \wedge y) = x$,.

(BL_5) $x \vee 1 = 1$ $\quad x \wedge 0 = 0$,.

(BL_6) $x \odot y = y \odot x$.

(BL_7) $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$.

(BL_8) $x \odot 1 = x$.

(BL_9)

$z \odot x \leq y \Longleftrightarrow x \leq z \rightarrow y$.

(BL_{10}) $x \wedge y = x \odot (x \rightarrow y)$.

(BL_{11}) $(x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x) = 1$.

مثال ۱.۰.۱۰. فرض کنیم $B = \{0,\ a,\ b,\ 1\}$ که $0 < b < a < 1$ است. اعمال $\odot,\ \ \rightarrow$ با جداول زیر داده شده اند :

$\odot$	۰	a	b	۱
۰	۰	۰	۰	۰
a	۰	a	b	a
b	۰	b	۰	b
۱	۰	a	b	۱

$\to$	۰	a	b	۱
۰	۱	۱	۱	۱
a	۰	۱	b	۱
b	b	۱	۱	۱
۱	۰	a	b	۱

آنگاه $B=(B,\ \vee,\ \wedge,\ \odot,\ \ \to,\ 0,\ 1)$ یک BL -جبر است.

تعریف ۱.۰.۱۱. [۱۷]
جبر

$(L,\ \vee,\ \wedge,\ \odot,\ \ \to,\ \ \rightsquigarrow,\ 0,\ 1)$ از نوع $(2,2,2,2,2,0,0)$ را یک شبه BL -جبر مي گوييم هر گاه در شرایط زیر صدق کند:

L_1) $(L,\ \wedge,\ \vee,\ 0,\ 1)$ یک مشبکه ي کراندار باشد.

L_2) $(L,\ \odot,\ 1)$ یک تکگون ناجابجايي باشد.

L_3) $x\odot y\leq z \Longleftrightarrow x\leq y\to z \Longleftrightarrow y\leq x\rightsquigarrow z$.

L_4) $(x\to y)\odot x = x\odot(x\rightsquigarrow y)=x\wedge y$.

L_5) $(x\to y)\vee(y\to x)=(x\rightsquigarrow y)\vee(y\rightsquigarrow x)=1$.

تعریف ۱.۰.۱۲. [۱۴] یک BL -جبر ضعیف (MTL -جبر)، یک مشبکه ي کراندار است هر گاه در شرط زیر صدق کند:

$$\forall x,\ y\ \ (x\to y)\vee(y\to x)=1.$$

تعریف ۱.۰.۱۳. [۱۷] یک شبه BL - جبر، موضعاً متناهي ناميده مي شود هرگاه همه ي عنصر هاي غير يكه ي آن مرتبه ي متناهي داشته باشد.

قضیه ۱.۰.۱۴. [۱۱] فرض کنید A یک شبه BL -جبر موضعا متناهي باشد، آنگاه براي هر $a\in A$، $a^{\sim -}=a^{-\sim}=a$ مي باشد.

تعریف ۱.۰.۱۵. [۱۴] جبر $A=(A,\ \vee,\ \wedge,\ \odot,\ \ \to,\ \ \rightsquigarrow,\ 0,\ 1)$ از نوع $(2,2,2,2,2,0,0)$ را شبه MTL - جبر(شبه BL -جبر ضعیف) مي گوييم هر گاه در شرایط زیر صدق کند:

L_1) $(L,\ \wedge,\ \vee,\ 0,\ 1)$ یک مشبکه ي کراندار باشد.

$L_2)(L,\ \odot,\ 1)$ یک تکگون ناجابجایی باشد.

$L_3)$ $x \odot y \le z \Longleftrightarrow x \le y \to z \Longleftrightarrow y \le x \rightsquigarrow z$.

$L_4)$ $(x \to y) \vee (y \to x) = (x \rightsquigarrow y) \vee (y \rightsquigarrow x) = 1$ برای هر $x,\ y,\ z \in L$.

تعریف ۱.۰.۱۶. [۱۷] جبر $A = (A,\ \oplus,\ \star,\ 0)$ از نوع $(2,\ 1,\ 0)$ یک MV -جبر است، هر گاه برای هر $x,\ y,\ z \in A$ شرایط زیر برقرار باشند:

(MV_1) $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$.

(MV_2) $x \oplus y = y \oplus x$.

(MV_3) $x \oplus 0 = x$.

(MV_4) $x^{\star\star} = x$.

(MV_5) $x \oplus 0^\star = 0^\star$.

(MV_6) $(x^\star \oplus y)^\star \oplus y = (y^\star \oplus x)^\star \oplus x$.

مثال ۱.۰.۱۷. بازه ی $[0,\ 1]$ را با اعمال $\oplus,\ *$ در نظر بگیرید:

$$x \oplus y = min\{1,\ x + y\}, \qquad x^* = 1 - x$$

آنگاه $A = ([0,\ 1],\ \oplus,\ *,\ 0)$ یک MV - جبر است.

تعریف ۱.۰.۱۸. [۱۷] جبر $A = (A,\ \oplus,\ \odot,\ ^-,\ ^\sim,\ 0,\ 1)$ از نوع $(2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0)$ یک شبه MV -جبر است، هر گاه برای هر $x,\ y,\ z \in A$ شرایط زیر برقرار باشند:

$(psMV_1)$ $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$.

$(psMV_2)$ $x \oplus 0 = 0 \oplus x = x$.

$(psMV_3)$ $x \oplus 1 = 1 \oplus x = 1$.

$(psMV_4)$ $1^\sim = 0,\ 1^- = 0$.

$(psMV_5)$ $(x^- \oplus y^-)^\sim = (x^\sim \oplus y^\sim)^-$.

$(psMV_6)$ $x \oplus x^\sim \odot y = y \oplus y^\sim \odot x = x \odot y^- \oplus y = y \odot x^- \oplus x$.

$(psMV_7)$ $x \oplus (x^- \odot y) = (x \oplus y^\sim) \odot y$.

$(psMV_8)$ $x^{-\sim} = x$.

قضیه ۱.۰.۱۹. [۱۷] اگر A یک شبه MV -جبر باشد، آنگاه برای هر $x,\ y,\ z \in A$ خاصیت های زیر برقرار است:

(۱) $y \odot x = (x^{\sim} \oplus y^{\sim})^{-}$.

(۲) $x \oplus y = (y^{-} \odot x^{-})^{\sim} = (y^{\sim} \odot x^{\sim})^{-}$.

(۳) $(x^{\sim})^{-} = x$.

(۴) $۰^{\sim} = ۰^{-} = ۱$

(۵) $x \odot ۱ = ۱ \odot x = x,\ x \odot ۰ = ۰ \odot x = ۰$.

(۶) $x \oplus x^{\sim} = ۱,\ x^{-} \oplus x = ۱$.

(۷) $x \odot x^{-} = ۰,\ x^{\sim} \odot x = ۰$.

(۸) $x \odot (x^{-} \oplus y) = y \odot (y^{-} \oplus x)$.

(۹) $(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$.

قضیه ۱.۰.۲۰. [۱۷] روي MV -جبر، ترتیب طبیعي، یک ساختار مشبکه ي مانده ي کراندار توزیع پذیر را مي سازد.

مثال ۱.۰.۲۱. هر MV - جبر، یک شبه MV -جبر مي باشد.

تعریف ۱.۰.۲۲. [۱۷] یک شبه MV - جبر، موضعاً متناهي نامیده مي شود هرگاه همه ي عنصر هاي غیرصفر آن مرتبه ي متناهي داشته باشد.

قضیه ۱.۰.۲۳. [۱۱] یک شبه BL - جبر A، یک شبه MV - جبر است اگر وتنها اگر براي هر $a^{\sim -} = a^{- \sim} = a,\ a \in A$.

تعریف ۱.۰.۲۴. [۱۷] فرض کنید A یک MV - جبر باشد. یک عنصر $x \in A$ ارشمیدسي نامیده مي شود اگر $n \geq ۱$ وجود داشته باشد، بطوریکه $nx \in B(A)$ باشد.

براي هرMV -جبرA، مجموعه ي همه ي عنصر هاي متمم از$L(A)$ را با$B(A)$ نمایش مي دهیم؛ عنصر هاي $B(A)$عنصر هاي بولینA نامیده مي شوند.

مثال ۱.۰.۲۵. همه ي عناصرMV-جبرمتناهي A، ارشمیدسي هستند.

فصل ۲

مشبكه هاي مانده

۱.۲ مشبکه هاي مانده

در این بخش به تعریف مشبکه ی مانده و ویژگی های آن پرداخته که بر گرفته از منابع [۱۵]،[۱]،[۶]،[۱۰] می باشد.

تعریف ۱.۱.۲. جبر $(L, \vee, \wedge, \odot, \to, \rightsquigarrow, 0, 1)$ از نوع $(2,2,2,2,2,0,0)$ را یک مشبکه ي مانده مي گوييم هر گاه در شرايط زير صدق كند:

L_1) $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ یک مشبکه ي کراندار باشد.

L_2) $(L, \odot, 1)$ یک تکگون ناجابجايي باشد.

L_3) $x \odot y \leq z \Longleftrightarrow x \leq y \to z \Longleftrightarrow y \leq x \rightsquigarrow z$ براي هر $x, y, z \in L$.

L جابجايي ناميده مي شود اگر عمل $\odot$ جابجايي باشد.

مثال ۲.۱.۲. فرض کنیم $L = \{0, a, b, c, 1\}$ باشد و $0 < a < b, c < 1$ که b, c قابل مقايسه نيستند. اعمال $\odot, \to, \rightsquigarrow$ با جداول زير داده شده اند :

$\odot$	۰	a	b	c	۱
۰	۰	۰	۰	۰	۰
a	۰	۰	۰	a	a
b	۰	a	b	a	b
c	۰	۰	۰	c	c
۱	۰	a	b	c	۱

$\to$	۰	a	b	c	۱
۰	۱	۱	۱	۱	۱
a	c	۱	۱	۱	۱
b	c	c	۱	c	۱
c	۰	b	b	۱	۱
۱	۰	a	b	c	۱

$\rightsquigarrow$	۰	a	b	c	۱
۰	۱	۱	۱	۱	۱
a	b	۱	۱	۱	۱
b	۰	c	۱	c	۱
c	b	b	b	۱	۱
۱	۰	a	b	c	۱

آنگاه $L = (L, \vee, \wedge, \odot, \to, \rightsquigarrow, 0, 1)$ یک مشبکه ي مانده است .

مثال ۳.۱.۲. شبه MV-جبر $M = (M, \oplus, ^-, ^\sim, 0, 1)$ با عمل اضافي $x \odot y = (y^- \oplus x^-)^\sim$ را در نظر بگيريد .

ترتيب روي M توسط $x \leq y \Longleftrightarrow x^- \oplus y = 1 (\Longleftrightarrow y \oplus x^\sim = 1)$ تعريف شده است

.

$\vee, \wedge$ را به صورت زير تعريف مي كنيم:

$$x \vee y = x \oplus x^{\sim} \odot y \text{ و } x \wedge y = x \odot (x^{-} \oplus y)$$

مي خواهيم نشان دهيم : $M = (M,\ \vee,\ \wedge,\ \odot,\ \ \rightarrow,\ \ \rightsquigarrow,\ ۰,\ ۱)$ یک مشبکه ي مانده است .

$L_۱$) $(M,\ \wedge,\ \vee,\ ۰,\ ۱)$ یک مشبکه ي توزیع پذیر کراندار است.

با استفاده از قضیه ي ۲۰.۰.۱ برقرار است.

$L_۲$) $(M,\ \odot,\ ۱)$ یک تکگون ناجابجایي است:

$$x \odot ۱ = (۱^{-} \oplus x^{-})^{\sim} = (۰ \oplus x^{-})^{\sim} = x^{-\sim} = x$$
$$۱ \odot x = (x^{-} \oplus ۱^{-})^{\sim} = (x^{-} \oplus ۰)^{\sim} = x^{-\sim} = x$$

باتوجه به قضیه ي ۱۹.۰.۱ در شبه MV -جبرها، $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$ برقرار است .

$L_۳$) اگر تعریف کنیم $x \rightarrow y = y \oplus x^{\sim}$ و $x \rightsquigarrow y = x^{\sim} \oplus y$

آنگاه داریم :

$$x \odot y \leq z \Longleftrightarrow x \leq y \rightarrow z \Longleftrightarrow y \leq x \rightsquigarrow z$$

که $x \odot y \leq z \Longleftrightarrow y \leq x \rightsquigarrow z$ زیرا:

$$\begin{aligned}(x \odot y)^{-} \oplus z = ۱ &\Longleftrightarrow (y^{-} \oplus x^{-}) \oplus z = ۱\\ &\Longleftrightarrow y^{-} \oplus (x^{-} \oplus z) = ۱\\ &\Longleftrightarrow y^{-} \oplus (x \rightsquigarrow z) = ۱\\ &\Longleftrightarrow y \leq x \rightsquigarrow z\end{aligned}$$

و z زیرا: $x \odot y \leq z \Longleftrightarrow x \leq y \to z$

$$\begin{aligned} z \oplus (x \odot y)^{\sim} = ۱ &\Longleftrightarrow z \oplus (y^{\sim} \oplus x^{\sim}) = ۱ \\ &\Longleftrightarrow (z \oplus y^{\sim}) \oplus x^{\sim} = ۱ \\ &\Longleftrightarrow (y \to z) \oplus x^{\sim} = ۱ \\ &\Longleftrightarrow x \leq y \to z \end{aligned}$$

بنابراین $M = (M, \vee, \wedge, \odot, \to, \rightsquigarrow, ۰, ۱)$ یک مشبکه ي مانده است .

نتیجه ۲.۱.۴. ۱-اگر ساختار $L = (L, \vee, \wedge, \odot, \to, \rightsquigarrow, ۰, ۱)$ در اصول زیر صدق کند :

$(L_{۴}$ $(x \to y) \odot x = x \odot (x \rightsquigarrow y) = x \wedge y$(شبه تقسیم پذیر).

$(L_{۵}$ $(x \to y) \vee (y \to x) = (x \rightsquigarrow y) \vee (y \rightsquigarrow x) = ۱$(شبه پیش خطي).

آنگاه L یک شبه BL -جبر است .

۲-اگر در شرایط $(L_{۱}), (L_{۲}), (L_{۳}), (L_{۵})$ صدق کند یک شبه BL -جبر ضعیف (یا شبه MTL -جبر)است .

۳-اگر در شرایط $(L_{۱}), (L_{۲}), (L_{۳}), (L_{۴})$ صدق کند یک rl - تکگون کراندار یا (یا مشبکه ي مانده ي تقسیم پذیر)است.

در مثال ۲.۱.۲ ساختار $L = (L, \vee, \wedge, \odot, \to, \rightsquigarrow, ۰, ۱)$ نه یک شبه BL -جبر است و نه یک rl - تکگون، بخاطر این که شرط $(L_{۴})$ در آن برقرار نیست :

$$(b \to a) \odot b \neq b \odot (b \rightsquigarrow a)$$

نتیجه ۲.۱.۵. ۱- مشبکه ي مانده ي L جابجایي است اگر وتنها اگر $(x \to y) = (x \rightsquigarrow y)$ براي هر $x, y \in L$

۲-فرض کنید $(L, \vee, \wedge, \odot, ۰, ۱)$ ساختاري باشد که در شرایط $(L_{۱}), (L_{۲})$ صدق کند. اگر یک جفت $(\to', \rightsquigarrow')$ از اعمال وجود داشته باشد بطوریکه $(L, \vee, \wedge, \odot, ۰, ۱)$ یک مشبکه ي مانده باشد آنگاه این جفت یکتاست.

۳-اگرمشبکه ي مانده ي L ، زنجیر باشد آنگاه L شبه BL -جبر ضعیف است.

برهان. ۱- فرض کنیم $a \odot b = b \odot a$ براي هر $a,\ b$ از $b \to x \leq b \to x$ داريم :

$x \leq b \odot (b \to x) \odot b$ و چون جابجايي است لذا $b \odot (b \to x) \leq x$ وبا استفاده از خاصيت الحاقي، بدست مي آيد: $(b \to x) \leq b \rightsquigarrow x$

وبطور مشابه از $b \rightsquigarrow x \leq b \rightsquigarrow x$ داريم: $b \odot (b \rightsquigarrow x) \leq x$ با استفاده از فرض بدست مي آيد: $(b \rightsquigarrow x) \odot b \leq x$ و در نتيجه: $(b \rightsquigarrow x) \leq b \to x$

لذا نتيجه مي شود :

$$(x \to y) = (x \rightsquigarrow y)$$

برعكس؛ فرض كنيم $(x \to y) = (x \rightsquigarrow y)$ از $a \odot b \leq a \odot b$ داريم:

$a \leq b \to (a \odot b)$ با استفاده از فرض بدست مي آيد: $a \leq b \rightsquigarrow (a \odot b)$ وبا خاصيت الحاقي حاصل مي شود: $b \odot a \leq a \odot b$

وبطور مشابه بدست مي آيد : $a \odot b \leq b \odot a$.

بنابراين: $a \odot b = b \odot a$.

۲- فرض کنیم جفت $(\rightsquigarrow', \to')$ از اعمال وجود داشته باشد به طوريكه $(L,\ \vee,\ \wedge,\ \odot,\ \to',\ \rightsquigarrow',\ ۰,\ ۱)$ يک مشبکه ي مانده باشد. لذا داريم :

$$a \odot b \leq c \Longleftrightarrow a \leq b \to' c \Longleftrightarrow b \leq a \rightsquigarrow' c$$

از $a \to b \leq a \to b$ داريم : $(a \to b) \odot a \leq b$ و با خاصيت الحاقي نتيجه مي شود: $a \to b \leq a \to' b$.

و از $a \to' b \leq a \to' b$ داريم : $(a \to' b) \odot a \leq b$ و با خاصيت الحاقي بدست مي آيد: $a \to' b \leq a \to b$.

بنابراين:

$$a \to' b = a \to b.$$

و بطور مشابه اثبات مي شود:

$$a \rightsquigarrow b = a \rightsquigarrow' b.$$

۳-چون L زنجير است پس براي هر $x,\ y \in L$ يا $x \leq y$ يا $y \leq x$.

فرض کنیم: $x \leq y$ لذا $۱ \odot x \leq y$ و با خاصيت الحاقي بدست مي آيد: $۱ \leq x \to y$ بنابراين: $x \to y = ۱$ در نتيجه: $(x \to y) \vee (y \to x) = ۱$.