بسم الله الرحمن الرحيم

١٤٢٣٦١٤

دانشگاه شهید بهشتی

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

گرایش ریاضی کاربردی

عنوان:

کاربرد موجکها در پردازش تصویر

نگارش:

محمد محمدی

استاد راهنما:

دکتر سهرابعلی یوسفی

استاد مشاور:

دکتر اصلاح چی

دی ماه ۱۳۸۸

تاریخ ....

شماره ....

پیوست..........................

دانشگاه شهید بهشتی

«بسمه تعالی»

«صورتجلسه دفاع از پایان نامه دانشجویان دوره کارشناسی ارشد»

تهران ۱۹۸۳۹۶۳۱۱۳ اوین

تلفن: ۲۹۹۰۱

بازگشت به مجوز دفاع شمارهٔ ۲۰۰/۱۰/۶۸۷/د مورخ ۸۸/۱۰/۱۳ جلسه هیأت داوران ارزیابی پایان نامه: **آقای محمد محمدی** شماره شناسنامه: **۰۰۵۶۹۲** صادره از: **افغانستان** متولد: **۱۳۶۳** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد: **ریاضی کاربردی**

با عنوان:

کاربرد موجک‌ها در پردازش تصویر

به راهنمایی:

آقای دکتر سهرابعلی یوسفی

طبق دعوت قبلی در تاریخ **۸۸/۱۰/۲۳** تشکیل گردید و بر اساس رأی هیأت داوری و با عنایت به ماده ۲۰ آئین نامه کارشناسی ارشد مورخ ۷۵/۱۰/۲۵ پایان نامه مزبور با نمره **۱۹(نوزده)** درجه **عالی** مورد تصویب قرار گرفت.

	مرتبه علمی	نام دانشگاه	امضاء
۱- **استاد راهنما:** آقای دکتر سهرابعلی یوسفی	دانشیار	شهید بهشتی	
۲- **استاد مشاور:** آقای دکتر چنگیز اصلاح‌چی	دانشیار	شهید بهشتی	
۳- **داور :** آقای دکتر حسین آذری	استادیار	شهید بهشتی	
۴- **داور:** آقای دکتر کورش پرند	استادیار	شهید بهشتی	
۵- **مدیر گروه:** آقای دکتر سهرابعلی یوسفی	دانشیار	شهید بهشتی	

تقدیم به پدر و مادرم

چکیده

در ایـن پایـان نامـه ابتدا نظریه موجک و آنالیز چند دقتی را بررسی کرده و سپس در مورد کاربرد تبدیل فـوریه و تبدیل فوریه زمان کوتاه و تبدیل موجک در بدست آوردن نمایش زمان – فرکانس در پردازش سیگنال صحبت می کنیم در ادامه در مورد طریقهٔ محاسبهٔ تبدیل موجک برای سیگنالهای یک بعدی و دو بعدی بحث می کنیم.

یکی از کاربردهای مهم تبدیل موجک در پردازش تصویر، بحث فشرده سازی تصویر است. ما ابتدا بطور مختـصر در مـورد فـشرده سـازی صحبت کرده و سپس الگوریتم های EZW و SPIHT و WDR و ASWDR را بررسی کرده و مزایای هر یک را بازگو می کنیم.

کلید واژه: فشرده سازی، تبدیل موجک، الگوریتمهای EZW، SPIHT، WDR، ASWDR.

فهرست مطالب

فصل اول

نظریه موجک

۱-۱ مقدمه:

یکی از مباحثی که در دو دهۀ اخیر، توجه بسیاری از ریاضیدانان، فیزیکدانان و مهندسین را به خود جلب کرده، نظریۀ موجک و کاربردهای آن می باشد. اولین کاربرد موجکها در ژئوفیزیک، برای تحلیل داده های نقشه برداری شده از زلزله بود که در اکتشاف معدن و نفت برای تصویر گرفتن از لایه‌های زیرسطحی صخره ها، استفاده می شود. در حقیقت ژئو فیزیکدانان دوباره به آن پی بردند. حدود بیست سال قبل از آن، ریاضی دانان آنها را برای حل مسائل محض گسترش داده بودند؛ اما کاربردشان در پردازش سیگنال پیش بینی نشده بود.

قلب آنالیز موجک، آنالیز چند دقتی[۱] می باشد. آنالیز چند دقتی یک سیگنال (و یا تصویر) را به زیر سیگنالهایی[۲] (زیر تصویرها[۳]) با سطوح دقت[٤] متفاوت تجزیه می کند. برای تجزیۀ سیگنال به این زیر سیگنالها، از تبدیل موجک استفاده می شود. در این پایان نامه سعی شده که به کاربرد تبدیل موجکها[٥] در فشرده سازی تصویر پرداخته شود. به این منظور چهار الگوریتم را انتخاب کرده‌ایم و به بررسی این چهار الگوریتم و خواص آن می پردازیم.

تاریخچه موجک:

در سال ۱۸۰۷ فوریه نشان داد که می توان توابع متناوب را برحسب توابع نمایی مختلط متناوب بسط داد. سالها بعد این ایده برای توابع نامتناوب نیز گسترش یافت. بعد از این تعمیم، آنالیز فوریه یک ابزار مناسب برای مهندسین شد. و با کشف الگوریتم FFT [۱]در سال ۱۹٦۵، که محاسبات را برای بدست آوردن تبدیل فوریه کاهش می دهد، این ابزار محبوبتر هم شد. با توسعه معنای توابع و همگرایی سری

---
۱ . multiresolution analysis.
۲ . subsignals.
۳ . subimages.
٤ . resolution.
٥ . wavelet transform.

فوریه و سیستم های متعامد، ریاضیدانان به تدریج از آنالیز فرکانس (آنالیز فوریه) به آنالیز مقیاس متمایل شدند. منظور از آنالیز مقیاس، آنالیز تابع توسط ساختارهای ریاضی با مقیاس متغیر است.

اولین بار در سال ۱۹۰۹ هار به موجک اشاره کرد و موجک haar ، متعامد و محمل فشرده و ناپیوسته می باشد.

در سال ۱۹۳۰، فیزیکدانان پی بردند که برای مطالعه جزئیات پیچیده و کوچک در حرکت براونی، توابع پایه ای هار از توابع پایه ای فوریه بهتر عمل می کند.

در سال ۱۹۸۵ مالات [۵] کاربرد موجکها را در پردازش سیگنالهای دیجیتال ارائه کرد او برخی از روابط بین الگوریتم های هرمی و موجک متعامد و فیلتر مزدوج قرینه ای (QMF) را کشف کرد.

دابیشز[۲] با استفاده از نتایج کار مالات توابع پایه ای متعامد، پیوسته و محمل فشرده را تحت عنوان موجکهای دابیشز ارائه داد.

در این پایان نامه روی فشرده سازی تصویر با استفاده از تبدیلات موجک متمرکز می شویم، و در این راستا از مقالات متعدد بویژه [۱۵] بهره بردیم.

---

۱. fast fourier transform.
۲. Ingrid Daubechies.

۱-۲ تعاریف مقدماتی

فضای برداری

فضای برداری روی میدان C، یک مجموعه با دو عمل جمع برداری و ضرب اسکالری است که خواص زیر را دارد:

$1)\forall u,v\in V,\quad u+v\in V,$

$2)\forall u,v\in V,\quad u+v=v+u,$

$3)\forall u,v,w\in V,\quad (u+v)+w=u+(v+w),$

$4)\exists 0\in V,\forall v\in V,\quad 0+v=v+0=v,$

$5)\forall v\in V,\exists -v\in V,\quad v+(-v)=0,$

$6)\forall \alpha\in C,v\in V,\quad \alpha.v\in V,$

$7)\forall v\in V,\quad 1.v=v,$

$8)\forall \alpha,\beta\in C,\forall u\in V,\quad \alpha.(\beta.u)=(\alpha\beta).u,$

$9)\forall \alpha\in C,\forall u,v\in V,\quad \alpha.(u+v)=\alpha.u+\alpha.v,$

$10)\forall \alpha,\beta\in C,\forall u\in V,\quad (\alpha+\beta).u=\alpha.u+\beta.u.$

زیرفضای برداری

اگر V فضای برداری باشد، $W\subset V$ و W را زیرفضای V می نامیم هرگاه

$0+w=w\in W, w\in W,$
$\alpha w+v\in W,\quad (v,w\in W,\alpha\in C).$

فضای تولید شده توسط U

اگر V فضای برداری و $U\subset V$ باشد. فضای تولید شده توسط U مجموعه تمام ترکیب های خطی اعضای U است. اگر U مجموعه متناهی $U=\{u_1,u_2,...,u_n\}$ باشد.

$$span\ U=\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_i:\alpha_i\in C, for\ all\ i=1,2,...,n\right\}.$$

می توان همچنین $span\, U$ را به صورت اشتراک تمام زیرفضاهای V که شامل U می باشند، در نظر گرفت.

پایه

یک مجموعه $U \subset V$ به عنوان یک پایه برای V در نظر گرفته می شود اگر

الف. U مستقل خطی باشد

ب. $span\, U = V$

بعد فضای برداری

بعد فضای برداری برابر با تعداد اعضای پایهٔ آن است.

ضرب داخلی

اگر V یک فضای برداری روی C باشد، یک ضرب داخلی مختلط نگاشت

$$\langle .,. \rangle : V \times V \to C$$

است به طوری که خواص زیر را دارا می باشد:

$$\begin{aligned}
&\forall u,v,w \in V, \quad \langle u+v,w \rangle = \langle u,w \rangle + \langle v,w \rangle,\\
&\forall \alpha \in C, \forall u,v \in V, \quad \alpha \langle u,v \rangle = \langle \alpha u,v \rangle,\\
&\forall u,v \in V, \quad \langle u,v \rangle = \overline{\langle v,u \rangle},\\
&\forall u \in V, \quad \langle u,u \rangle \geq 0 \quad , \quad \langle u,u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0.
\end{aligned}$$

فضای ضرب داخلی (مختلط)

یک فضای برداری با ضرب داخلی (مختلط) را فضای ضرب داخلی (مختلط) می نامند.

نرم

اگر V یک فضای ضرب داخلی (مختلط) باشد برای هر $v \in V$ نرم به صورت

$$\| \bullet \| : V \to R,$$
$$\|v\| = (\langle v, v\rangle)^{\frac{1}{2}}.$$

تعریف می شود.

فضای $l^2(Z)$:

$$l^2(Z) = \left\{ \{a_j\}_{j\in Z} : a_j \in C, \forall j \in Z, \sum_{j\in Z} |a_j|^2 < \infty \right\}$$

ضرب داخلی در این فضا به صورت

$$\langle z, w\rangle = \sum_{j\in Z} z_j \overline{w}_j, \qquad \left(z = \{z_j\}_{j\in Z}, w = \{w_j\}_{j\in Z} \in l^2(Z)\right)$$

تعریف می شود.

فضای $L^2([-\pi و \pi])$ و $L^2(R)$:

$$L^2([-\pi و \pi]) = \left\{ f : [-\pi, \pi] \to C : \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt < \infty \right\},$$

و ضرب داخلی در این فضا به صورت

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)} dt, \qquad \left(f, g \in L^2([-\pi, \pi])\right)$$

تعریف می شود.

$$L^2(R) = \left\{ f : R \to C : \int_R |f(t)|^2 \, dt < \infty \right\},$$

و ضرب داخلی در این فضا به صورت

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)} dt, \qquad \left(f, g \in L^2(R)\right)$$

تعریف می شود.

همگرایی یک دنباله:

اگر X یک فضای ضرب داخلی باشد یک دنباله $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ در X همگرا به $x \in X$ است اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ یک $M \in N$ وجود داشته باشد به قسمی که

$$\|x_n - x\| < \varepsilon, \quad (\forall n > M).$$

فضای کامل

فضای ضرب داخلی کامل نامیده می شود اگر هر دنباله کوشی در X به عضوی از آن فضا همگرا باشد.

فضای هیلبرت

فضای ضرب داخلی مختلط کامل، فضای هیلبرت نامیده می شود.

فضاهای $l^2(Z)$ و $L^2([-\pi و \pi])$ و $L^2(R)$ هیلبرت می باشند.

تعامد

بردارهای u,v در فضای ضرب داخلی V متعامد نامیده می شوند اگر $\langle u,v \rangle = 0$.

مجموعه متعامد و متعامد یکه

اگر $B \subset V$ و به ازای هر $u,v \in B$ که $u \neq v$، $\langle u,v \rangle = 0$ آنگاه B مجموعه متعامد نامیده می شود.

اگر B یک مجموعه متعامد بوده و به ازای هر $v \in B$، $\|v\| = 1$ آنگاه B مجموعه متعامد یکه نامیده می شود.

مکمل متعامد

اگر V یک فضای ضرب داخلی باشد و W زیرفضای V باشد آنگاه مکمل متعامد W به صورت

$$W^{\perp} = \{v \in V : \langle v,w \rangle = 0 \ \forall w \in W\}$$

تعریف می شود. به عبارت دیگر $W^{\perp}$ شامل بردارهایی در V است که با هر عضو در W متعامد باشد.

پیچش[۱]:

برای $f,g \in L^2(R)$ پیچش بصورت $(f*g)(x)=\int_R f(x-y)g(y)dy$ تعریف می شود.

دوره تناوب (T): برای تابع g، کوچکترین عددی که در شرط زیر صدق می کند را دورهٔ تناوب g گویند:

$$\mathbf{g(t)=g(t+T),\quad \forall t.}$$

به هر زیر بازه‌ی به طول T یک دور کامل گویند.

فرکانس (f): تعداد دور کامل که در واحد زمان روی می دهد را فرکانس گویند، و رابطه ی عکس با دوره‌ی تناوب دارد یعنی:

$$f=\frac{1}{T}.$$

مثال: از آنجا که $e^{2\pi i(t+1)}=e^{2\pi i t}$ می باشد، نتیجه می‌گیریم که تابع $e^{2\pi i t}$ دارای فرکانس ۱ می باشد و به همین صورت تابع $e^{2\pi i \alpha t}$ دارای فرکانس $\frac{1}{\alpha}$ می باشد.

فرکانس زاویه ای (ω): فرکانس زاویه ای بصورت زیر تعریف می شود:

$$\omega=2\pi f,$$

در ادامه منظور ما از فرکانس، همان فرکانس زاویه ای است، البته با توجه به اینکه تنها تفاوت این دو، یک ضریب ثابت می باشد بنابراین براحتی با کمی تغییر در ضرایب ثابت می توان نتایج را برای فرکانس هم بدست آورید.

تبدیل فوریه:

در قرن نوزدهم ریاضیدان فرانسوی فوریه نشان داد که توابع متناوب را می توان به صورت بسط نامتناهی از توابع نمایی مختلط نمایش داد. سالها بعد این ایده برای توابع نامتناوب و سپس برای سیگنالهای متناوب و نامتناوب تعمیم یافت.

---

[۱]. convolution.

فوریه نشان داد که هر تابع $h \in L^2([-\pi,\pi])$ را می توان به صورت زیر بسط داد:

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\text{int}},$$

که در آن ضریب c_n بصورت زیر، مشخص می شود:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(t) e^{-\text{int}} dt.$$

نکته: این بسط ما را قادر می سازد تا فرکانسهای موجود در تابع h را پیدا کنیم.

سالها بعد این ایده به توابع $L^2(R)$ گسترش یافت که بصورت زیر می باشد.

فرض کنید $x(t)$ یک سیگنال در فضای $L^2(R)$ باشد آنگاه می توان این سیگنال را به صورت زیر نوشت:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

که در آن $X(\omega)$ همان تبدیل فوریه می باشد که به صورت زیر تعریف می باشد:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt,$$

ω همان فرکانس زاویه ای می باشد.

قضیه: فرض کنید $f, g \in L^1(R) \bigcap L^2(R)$ باشد، آنگاه تبدیل فوریهٔ f و g متعلق به $L^2(R)$ بوده و در عبارت زیر که به «رابطه پارسوال»[۱] مشهور است صدق می کند:

$$\langle f, g \rangle^2 = 2\pi \left\langle \hat{f}, \hat{g} \right\rangle^2,$$

اثبات این قضیه در [۱٤] آمده است.

۱. Parseval Identity.

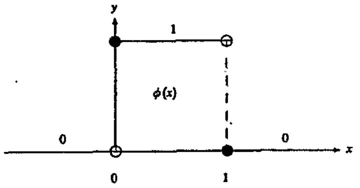
۱-۳ نظریه موجک

تابع مقیاس هار:

دو تابع در آنالیز موجک نقش اصلی دارند: تابع مقیاس ϕ و تابع موجک ψ. این دو تابع گردایه ای از توابع را تولید می کنند که می توانند برای تجزیه و بازسازی سیگنال بکار روند.

تعریف: تابع مقیاس هار چنین تعریف می شود:

$$\phi(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<1\\ 0 & o.w.\end{cases}$$



تصویر ۱-۱: تابع مقیاس هار

نمـودار تابع $\phi(x-k)$ مشابه با $\phi(x)$ می باشد، اما k واحد به سمت راست منتقل شده است. فرض کنید که V_0 فضای تمام توابع به شکل زیر باشد:

$$\sum_k a_k\phi(x-k),\quad a_k\in R.$$

k می تواند روی هر مجموعه متناهی از اعداد صحیح مثبت یا منفی تغییر کند. از آنجا که تابع $\phi(x-k)$ در نقـاط k و $k+1$ ناپیوسته است، می توان V_0 را بدین صورت توصیف کرد: همهٔ توابع تکه ای ثابت با محمل متناهی که در مجموعهٔ اعداد صحیح ناپیوسته هستند. چون k روی یک مجموعهٔ متناهی تغییر می کند، هر عضو از V_0 خارج از یک مجموعهٔ کراندار صفر است، چنین توابعی را «محمل فشرده»[۱] گوییم.

برای تحلیل سیگنالهای با فرکانس بالا به بلوکهایی که باریک هستند، نیاز داریم.

عرض بلوک $\phi(2x)$، نصف تابع $\phi(x)$ می باشد. بنابراین V_1 را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\sum_k a_k\phi(2x-k),\quad a_k\in R.$$

V_1 فضای توابع تکه ای ثابت با محمل متناهی و ناپیوستگی در نقاط $\left\{\frac{k}{2}\mid k\in Z\right\}$ است.

---

۱. compact support.

تعـریف: فـرض کنید j یک عدد صحیح نامنفی باشد. فضای توابع پله ای در سطح j را با V_j نمایش داده و بصورت فضای تولید شده توسط مجموعۀ زیر روی اعداد حقیقی تعریف می شود:

$$\{\phi(2^j x-k) \mid k\in \mathrm{Z}\},$$

بعـبارت دیگـر V_j فـضای توابع تکه ای ثابت با محمل متناهی می باشند که تنها در نقاط زیر می توانند ناپیوسته باشند:

$$H_j=\left\{\frac{k}{2^j} \mid k\in \mathrm{Z}\right\},$$

واضـح است $H_j \subset H_{j+1}$. همانطورکه گفتیم V_0 تابع تکه ای ثابت با ناپیوستگی در نقاط H_0 می باشد و V_1 تابـع تکـه ای ثابـت بـا ناپیوستگی در نقاط H_1 می باشد و چون $H_0 \subset H_1$ بنابراین $V_0 \subset V_1$ می باشد و به راحتی با استقرا می توان ثابت کرد که:

$$V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \ldots,$$

V_j شـامل تمـام اطلاعات مربوط به تجزیۀ مقیاسی از مرتبۀ 2^j است. همانگونه که j بزرگتر می شود، تجزیه نیز ظریفتر می شود، و در نتیجه اطلاعات کمتری از بین می رود.

رابطۀ شمول دلیلی برای این است که چرا V_j برحسب $\phi(2^j x)$، به جای $\phi(ax)$ برای عاملهای دیگر a تعـریف شـده اسـت اگـر بطور مثال V_2 را بصورت $\phi(3x-j)$ به جای $\phi(4x-j)$ تعریف کنیم، آنگاه $V_1 \not\subset V_2$.

خواص اساسی تابع مقیاس هار

قضیه: الف. تابع $f(\bullet)\in V_0$ می باشد اگر و تنها اگر $f(2^j\bullet)\in V_j$ باشد.

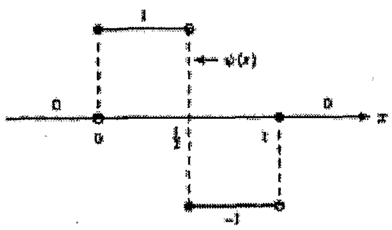
ب. تابع $f(\bullet)\in V_j$ می باشد اگر و تنها اگر $f(2^{-j}\bullet)\in V_0$ باشد.

اثبات. اگر تابع $f(\bullet)\in V_0$ آنگاه $f(\bullet)$ یک ترکیب خطی از $\{\phi(\bullet-k)\,|\,k\in \mathrm{Z}\}$ می باشد. بنابراین $f(2^j\bullet)$ یک ترکیب خطی از $\{\phi(2^j\bullet-k)\,|\,k\in \mathrm{Z}\}$ می باشد و بدین معناست که $f(2^j\bullet)\in V_j$. اثبات عکس و قسمت (ب) به همین صورت است.

قضیه: مجموعهٔ توابع $\left\{2^{\frac{j}{2}}\phi(2^j x-k)\,|\,k\in \mathrm{Z}\right\}$ یک پایهٔ متعامد یکه برای V_j می باشند.

$$\left\langle 2^{\frac{j}{2}}\phi(2^j x-k),2^{\frac{j}{2}}\phi(2^j x-l)\right\rangle_{L^2}=\int_{-\infty}^{\infty}\left(2^{\frac{j}{2}}\phi(2^j x-k)\right)\left(2^{\frac{j}{2}}\phi(2^j x-l)\right)dx=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}(\phi(y-k))(\phi(y-l))dy=\begin{cases}1, & k=l,\\ 0, & k\neq l.\end{cases}$$

تعریف موجک هار:



$$\psi(x)=\phi(2x)-\phi(2x-1).$$

تصویر ۱-۲: تابع موجک هار

حال می خواهیم V_j را بصورت مجموع متعامد از V_{j-1} و مکمل آن، تجزیه کنیم. با $j=1$ شروع می کنیم و می خواهیم مکمل V_0 در V_1 را مشخص نماییم. چون V_0 بوسیلهٔ ϕ و انتقالهایش تولید شده است، انتظار داریم که مکمل متعامد V_0 بوسیلهٔ انتقالهای تابعی مانند ψ تولید شود که این تابع باید دو خصوصیت را دارا باشد:

۱. $\psi\in V_1$: بنابراین داریم: $\psi(x)=\sum_l a_l\phi(2x-l)$

که فقط تعداد متناهی از $a_l(\in R)$ها غیر صفر می باشند.

۲. $\psi\perp V_0$: یعنی $\int\psi(x)\phi(x-k)dx=0\quad \forall k\in \mathrm{Z}$