دانشگاه تربیت معلم تهران

دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض

(شاخهٔ جبر)

عنوان:

مطالعهٔ همبافت کوزین از دیدگاه همبافت دوگانی شرایط متناهی بودن همولوژی مدولهای آن

استادراهنما:

پروفسور حسین ذاکری

تدوین:

میترا دسته‌گلی

۱۳۸۸

تابستان

پیشکش

تقدیم به:

روشنی بخش زندگیم

دخترم روشا

عشق و امید زندگیم

همسرم امیر

و

دو گوهر گرانبهای زندگیم

پدر و مادر بزرگوارم

سپاس

با سپاس صمیمانه ازهمه عزیزان و رهپویان وادی دانش.

وظیفه خود می‌دانم از استاد ارجمند و گرانقدر جناب آقای پروفسور حسین ذاکری که در طول مراحل پژوهش در نهایت صمیمت و بزرگواری از هیچگونه مساعدت و راهنمایی دریغ نداشته و با تمام صبر و وارستگی و رخصت استفاده از راهنمایی‌های سازنده و توصیه‌های عالمانه و آگاهانه همواره راه را برایم میسر وممکن ساخته‌اند سپاسگزاری و قدردانی نمایم و برای آن فرزانه ارزشمند آرزوی توفیق بیش از پیش دارم.

دین عظیمی که همسر و همسفر زندگیم آقای امیر نیکجو که براستی یاورم بوده، بر من دارند گرانبارتر از آن است که با الفاظ و کلمات قابل ادا باشد ولی این کمترین کاری است که از من ساخته است.

همچنین از دوست فرهیخته‌ام سرکار خانم راحله جعفری جزه بخاطر همه خوبی‌هایش سپاسگزارم.

از برادر مهربان و بردبارم مهران سپاس دارم که با همکاری‌های صمیمانه‌اش در سختیهای راه تنهایم نگذاشت.

در اینجا لازم است از پدر و مادر بزرگوارم که مشوقان همیشگی من بوده‌اند و همچنین از اساتید ارجمندی که در طول سالها از آنها کسب فیض کرده‌ام از جلمه آقای دکتر اسماعیل یوسفی و سرکار خانم دکتر شراره تهمتن سپاسگزاری می‌کنم.

آقای دکتر محمدتقی دیبایی و دکتر صمدحاج جباری داوری این پایان نامه را بر عهده داشتند که بدین وسیله از ایشان قدردانی می‌نمایم.

نهایت اینکه زحمات سرکار خانم گلزاری را برای تایپ این مجموعه ارج می‌نهم.

چکیده

دراین پایان‌نامه ابتدا همبافت کوزین، همبافت دوگانی و مدول کانونی را معرفی کرده و سپس به بررسی متناهی بودن همولوژی مدول‌های همبافت کوزین برای مدول‌های خاص می‌پردازیم. در ادامه با به کارگیری این مفاهیم ویژگی‌های دوگان موضعی و انژکتیو بودن جملات همبافت کوزین را مطالعه می‌کنیم. همچنین وجود مدول کانونی برای حلقه‌های نوتری غیرموضعی و همبافت کوزین آن‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

رده‌بندی موضوعی: 13D45; 13H10; 13D25.

واژه‌های کلیدی: همبافت کوزین، همبافت دوگانی، مدول کانونی، مدول گرنشتاین.

مقدمه

جبر همولوژی ابزاری توانمند در مطالعه نظریه حلقه‌ها و مدول‌ها به شمار می‌رود. مفهوم همبافت[1] یکی از مفاهیم اساسی و قدرتمند جبر همولوژی است که می‌توان آن را تعمیم معقول و ماهرانه‌ای از مفهوم مدول دانست. فرض کنیم A حلقه‌ای جابجایی باشد. همبافت $M^\bullet$، دنباله‌ای از Aـ مدول‌های $(M^i)_{i\in I}$ و نگاشت‌های Aـخطی $(d^i : M^i \longrightarrow M^{i+۱})_{i\in I}$،

$$M^\bullet : \cdots \longrightarrow M^i \xrightarrow{d^i} M^{i+۱} \xrightarrow{d^{i+۱}} M^{i+۲} \longrightarrow \cdots$$

است که $d^{i+۱}d^i = ۰$. از میان همبافت‌های شناخته شده بسیاری که در جبر مطرح هستند می‌توان به همبافت کوزین[2] و همبافت دوگانی[3] اشاره کرد که علاوه بر این که هر یک دارای کاربردهای مهمی در جبر جابجایی و همولوژی می‌باشند، بررسی رابطهٔ بین آن‌ها روی برخی حلقه‌ها نیز خود یکی از موضوعات جالب و قابل مطالعه است.

چنانکه در فصل دوم شرح خواهیم داد، برای هر Aـمدول M و هر صافی F از $\mathrm{Spec}(A)$ می‌توان همبافتی به صورت

$$۰ \longrightarrow M \longrightarrow M^۰ \longrightarrow M^۱ \longrightarrow \cdots$$

ساخت که به همبافت کوزین M معروف است و آن را با $C_A(F, M)$ نشان می‌دهیم. شارپ در سال ۱۹۶۹ ضمن معرفی این همبافت نشان داد که چگونه می‌توان به وسیلهٔ آن حلقه‌های کوهن‌ـمکالی را مشخص کرد و پس از آن در سال ۱۹۷۰ در [۱۹] نتیجه مشابهی را برای مدول‌های کوهن‌ـمکالی و مدول‌های گرنشتاین ارائه داد. بیان این دست‌آوردها ضمن تأئید جایگاه همبافت کوزین در جبر جابجایی، زمینه ساز تعمیم‌ها و نتایج زیبایی در استفاده از این مفهوم شد.

همبافت دوگانی ابتدا توسط گروتندیک[4] و هارتشورن[5] در [۱۳] برای استفاده در هندسه جبری معرفی شد اما به زودی به ابزاری مفید در جبر جابجایی تبدیل شد. یکی دیگر از مفاهیم اساسی که دارای منشأ هندسی بوده و در رابطه نزدیکی با همبافت دوگانی است مدول کانونی[6] (۲ـ۱ تعریف) می‌باشد که اولین بار توسط گروتندیک

1) Complex   2) Cousin Complex   3) Dualizing Complex   4) Grothendieck   5) Hartshorne

6) Canonical Module

در[۱۴] ارائه شد. شاید به جرأت بتوان گفت که مقالهٔ شارپ [۲۱] در سال ۱۹۷۵ نقش اساسی در ورود همبافت دوگانی به جبر جابجایی داشت. وی در این مقاله بدون استفاده از مفاهیم هندسی، به معرفی مناسبی از همبافت دوگانی با روش‌های استاندارد جبر همولوژی، برای حلقه‌های جابجایی نوتری پرداخت.

یک همبافت دوگانی $I^\bullet$ برای حلقهٔ نوتری A، همبافتی است که در شرایط تعریف ۲ـ۳ صدق کند و A دارای همبافت دوگانی است اگر و تنها اگر همبافت دوگانی بنیادی[1] داشته باشد(تذکر ۲ـ۴). بعلاوه همبافت دوگانی بنیادی، در صورت وجود، با تقریب ایزومورفیسم همبافت‌ها و انتقال منحصر به فرد است.

در فصل دوم این پایان‌نامه ابتدا به معرفی همبافت دوگانی، مدول کانونی و همبافت کوزین پرداخته و برخی ویژگی‌های اساسی و مورد نیاز آن‌ها را بررسی می‌کنیم. به طور طبیعی اثبات منحصر به فردی همبافت دوگانی بنیادی، انگیزه یافتن این همبافت را به دنبال دارد. در این راستا دیبایی و طوسی در [۹] نشان دادند اگر حلقهٔ موضعی A در شرط (S_2) صدق کند و دارای مدول کانونی K باشد، آنگاه A همبافت دوگانی دارد اگر وتنها اگر همبافت کوزین K نسبت به صافی بعد، متناهی باشد و در این شرایط این همبافت، یک همبافت دوگانی برای A القا می‌کند. آن‌ها در مقاله [۱۰]، این ویژگی ساختاری مفید را به این صورت تعمیم دادند که اگر M یک مدول با تولید متناهی روی حلقهٔ موضعی A باشد که دارای همبافت دوگانی $I^\bullet$ است، در این صورت تحت شرایطی روی M، $\mathrm{Hom}(M, I^\bullet)$ همبافت کوزین مدول $(H^{\dim A - \dim M}(\mathrm{Hom}(M, I^\bullet))$، $(\dim A - \dim M)$امین همولوژی مدول همبافت $\mathrm{Hom}(M, I^\bullet)$ ، نسبت به یک صافی خاص از $\mathrm{Spec}(A)$ است. آن‌ها همچنین در برهان لم ۳ـ۱ از [۱۰] روشی برای یافتن همبافت کوزین M توسط همبافت دوگانی ارائه دادند (۲ـ۴۷ لم). با توجه به این نتایج، انتظار داریم که همبافت کوزین چنین مدول‌هایی، برخی خواص همبافت دوگانی حلقه را حفظ کند. دیبایی در [۸]، نشان داد که اگر M یک مدول با تولید متناهی روی حلقهٔ موضعی و نوتری A (لزوماً دارای همبافت دوگانی نیست) که دارای فیبرهای رسمی کوهن‌ـمکالی است، باشد، به طوری که M در شرط (S_2) صدق کند و $\mathrm{Min}_{\hat{A}}(\hat{M}) = \mathrm{Ass}h_{\hat{A}}(\hat{M})$، در این صورت همولوژی مدول‌های $C_A(M)$، همبافت کوزین M نسبت به صافی ارتفاع، با تولید متناهی هستند (۲ـ۵۰).

ادامهٔ مباحث فصل دوم به بررسی مطالب فوق و نیز بررسی خاصیت دوگانی نظیر دوگان موضعی گروتندیک

1) Fundumental Dualizing Complex

(۲ـ۵۳) اختصاص داده شده است.

در فصل سوم، پس از بیان نتایجی درخصوص مدول‌های کوهن‌ـمکالی تعمیم یافته، به مطالعه مدول‌هایی که جملات همبافت کوزین آن‌ها انژکتیو هستند می‌پردازیم. شارپ در [۲۰] نشان داد که اگر حلقهٔ A دارای مدول کانونی K باشد، در این صورت هر مدول گرنشتاین با جمع مستقیم تعداد متناهی کپی از K ایزومورف است. همچنین وی در [۱۹] نشان داد که اگر حلقهٔ A دارای مدول کانونی نباشد اما مدول گرنشتاین داشته باشد، در این صورت دارای یک مدول گرنشتاین متلاشی نشدنی منحصر به فرد مانند G است و هر مدول گرنشتاین با جمع مستقیم تعداد متناهی کپی از G ایزومورف است. در ادامهٔ این فصل، با استفاده از [۸] به بیان تعمیم این نتایج می‌پردازیم.

همانند سایر زمینه‌های پژوهشی در ریاضیات که بیان هر ایده و یا اثبات قضیه‌ای می‌تواند مقدمه‌ای برای طرح سوالات جدید و معماهای زیباتر گردد، بررسی‌های موفقیت‌آمیز فوق، این سوال را در ذهن ایجاد می‌کند که آیا می‌توان مفهوم مدول کانونی را به گونه‌ای مناسب برای حلقه‌های غیر موضعی نیز بیان کرد؟ پاسخ طبیعی که به این پرسش داده شده به این صورت است که مدول کانونی حلقهٔ غیر موضعی R، مدول با تولید متناهی Kتعریف می‌شود که موضعی شدهٔ آن در هر ایدآل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ از R، مدول کانونی $R_\mathfrak{m}$ باشد. گام بعدی تعمیم نتایج فوق برای چنین مدول‌هایی است. در همین راستا دیبایی در [۸] نشان داد که اگر حلقهٔ R در شرط (S_2) صدق کند و تمام فیبرهای رسمی حلقهٔ $R_\mathfrak{m}$، به ازای هر ایدآل ماکسیمال $\mathfrak{m}$ از R، کوهن‌ـمکالی باشد، آنگاه مدول کانونی برای R وجود دارد هرگاه R دارای همبافت دوگانی باشد.

اثبات این مطلب را در فصل چهارم مورد مطالعه قرار داده و بالاخره در فصل پنجم بامعرفی همبافتی از کسرهای تعمیم‌یافته یک مدول، ساختار مدول‌های انژکتیو متلاشی نشدنی روی حلقهٔ (S_2) را مشخص می‌کنیم.

مرجع اصلی مورد استفاده در این پایان‌نامه مقالهٔ زیر است:

[8] M. T. Dibaei, A study of Cousin Complexes through the Dualizing Complexs, Communications in Algebra, 33: 119-132, 2005.

فهرست مطالب

فصل اول

پیش‌نیازها

در این فصل با فرض اینکه خواننده با مباحث جبر پیشرفته و همولوژی ۱، آشنایی لازم را دارد، به بیان تعاریف و قضایای اسنادی مورد نیاز می‌پردازیم.

این فصل شامل سه بخش است. در بخش اول تعاریف و قضایای مقدماتی، که در تدوین این پایان‌نامه مورد نیاز بوده است، بیان می‌شود.

در بخش دوم به معرفی مدول و فانکتور کوهمولوژی موضعی و بیان قضایا و مطالب مورد نیاز پرداخته‌ایم. بالاخره در بخش سوم ساختمان مدول کسرهای تعمیم یافته مورد بررسی قرارگرفته است.

۱-۱ تعاریف و قضایای مقدماتی مورد نیاز

در سراسر این فصل R حلقه‌ای جابجایی و یکدار و A حلقه‌ای جابجایی و یکدار ونوتری است و همواره عضو یکهٔ حلقه مخالف صفر فرض شده است و نمادهای $\mathrm{Spec}(R)$ و $\mathrm{Max}(R)$ و $\mathrm{Min}(R)$ به ترتیب معرف مجموعهٔ ایدآل‌های اول، ایدآل‌های ماکسیمال و ایدآل‌های اول مینیمال حلقهٔ R هستند.

۱-۱-۱ تعریف. فرض می‌کنیم M یک Rـمدول باشد. در این صورت

$$\mathrm{Supp}_R(M) = \{p \in \mathrm{Spec}(R) | M_p \neq 0\}$$

۱-۱-۲ تعریف. بعد حلقه R را با $\dim R$ نمایش می‌دهیم و آن عبارتست از

$$\dim R = \sup\{0 \leq n \in \mathbb{Z} | \text{زنجیری از ایدآل‌های اول } R \text{ بطول } n \text{ مانند } p_0 \subset p_1 \subset \cdots \subset p_n \text{ موجود است}\}$$

در صورتی که $\sup$ موجود نباشد تعریف می‌کنیم $\dim R = \infty$.

۱-۱-۳ تعریف. بعد کرول Rـمدول M رابا $\dim_R M$ نمایش می‌دهیم و چنین تعریف می‌کنیم.

$$\dim_R M = \sup\{0 \leq n \in \mathbb{Z} | \text{زنجیری از عناصر } \mathrm{Supp}(M) \text{ بطول } n \text{ مانند } p_0 \subset p_1 \subset \cdots \subset p_n \text{ موجود باشد}\}$$

در صورتی که $\sup$ موجود نباشد تعریف می‌کنیم $\dim R = \infty$.

توجه شود که بنابر قرارداد اگر $M = 0$ آنگاه $\dim M = -1$.

۱-۱-۴ گزاره. اگر R حلقه‌ای موضعی و نوتری باشد آنگاه $\dim R < \infty$ لذا، اگر M یک مدول روی حلقهٔ موضعی و نوتری R باشد آنگاه $\dim M \leq \dim R < \infty$.

۱-۱-۵ تعریف و قضیه. فرض کنیم $\mathfrak{a}$ ایدآلی از R و M یک Rـمدول باشد. در این صورت مجموعهٔ

$$\{\mathfrak{a}^t M + x; 0 \leq t \in \mathbb{Z}, x \in M\}$$

پایه‌ای برای یک توپولوژی منحصر به فرد از M است. این توپولوژی را $\mathfrak{a} - adic$ توپولوژی روی M می‌نامیم.

۱-۱-۶ تعریف. فرض کنیم $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ رشته‌ای از عناصر M باشد. گوئیم این رشته کوشی است در صورتی که برای هر $k \in \mathbb{N}$، $n_0 \in \mathbb{N}$ای موجود باشد که برای هر $n, t \geq n_0$ داشته باشیم:

$$x_n - x_t \in \mathfrak{a}^k M$$

۱-۱-۷ تعریف. گوئیم x یک حد دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ است در صورتی که برای هر $k \in \mathbb{N}$، $n_0 \in \mathbb{N}$ای موجود باشد که برای هر $n \geq n_0$ داشته باشیم $x_n - x \in \mathfrak{a}^k M$. هر دنبالهٔ همگرا (حددار) یک دنباله کوشی است.

۱-۱-۸ گزاره. مجموعه دنباله‌های کوشی از عناصر M را باعلامت $C(M)$ نشان می‌دهیم.

فرض کنیم $C_0(M)$ مجموعهٔ تمام دنباله‌هایی از عناصر M باشد که به $0 (\in M)$ همگرا هستند؛ در این صورت $C_0(M) \subseteq C(M)$. در $C(M)$ جمع و ضرب اسکالر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} + \{y_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty}$$

$$r\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{rx_n\}_{n=1}^{\infty} \qquad \text{برای هر } r \in R،$$

با این تعریف‌ها $C(M)$ یک Rـمدول می‌شود که $C_0(M)$ زیرمدول آن است بنابراین $\frac{C(M)}{C_0(M)}$ یک Rـمدول است. تابع $\psi : M \longrightarrow \frac{C(M)}{C_0(M)}$ با ضابطهٔ تعریف

$$\psi(\alpha) = C_0(M) + \{\alpha\}_{n=1}^{\infty}$$

یک Rـهمومورفیسم است که دارای خواص زیر می‌باشد:

۱) $\ker \psi = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathfrak{a}^k M$

۲) ψ پوشاست اگر و تنها اگر هر عضو $C(M)$ همگرا باشد.

در رابطه با اثبات ۲، توجه شود که اگر فرض کنیم $C_0(M) + \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ عضو دلخواهی از $\frac{C(M)}{C_0(M)}$ باشد، در این صورت ψ پوشاست، اگر و تنها اگر $\alpha \in M$ موجود باشد به طوری که

$$C_0(M) + \{\alpha\}_{n=1}^{\infty} = C_0(M) + \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$$

و این یعنی اینکه $\{x_n - \alpha\}_{n=1}^{\infty}$ همگرا به ۰ است بنابراین ψ پوشاست، اگر و فقط اگر α یک حد $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ باشد.

تذکر. به طورکلی ψ ایزومورفیسم است اگر و تنها اگر $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^k M = 0$ و هر رشتهٔ کوشی از عناصر M همگرا باشد.

۱-۱-۹ گزاره. $a-adic$ توپولوژی روی M هاسدورف است اگر وتنها اگر $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^k M = 0$.

۱-۱-۱۰ نتیجه. ψ ایزومورفیسم است اگروتنهااگر $a-adic$ توپولوژی روی M هاسدورف بوده و هر دنبالهٔ کوشی همگرا باشد.

۱-۱-۱۱ تعریف. معمولاً $\frac{C(M)}{C_\circ(M)}$ را با علامت $\hat{M}$ نشان می‌دهند و آن را کمال M می‌نامند در صورتی که ψ ایزومورفیسم باشد $M \cong \hat{M}$. در این صورت می‌گوئیم که M کامل است.

۱-۱-۱۲ تعریف. اگر $M = R$ آنگاه $C(M)$ را با C و $C_\circ(M)$ را با $C_\circ$ نشان می‌دهند و $\hat{R} = \frac{C(R)}{C_\circ(R)} = \frac{C}{C_\circ}$. $\hat{R}$ راکمال R می‌نامند.

درصورتی که $\psi : R \longrightarrow \hat{R}$ ایزومورفیسم باشد گویند R کامل است. با تعریف ضرب به صورت

$$(C_\circ + \{x_n\}_{n=1}^{\infty})(C_\circ + \{y_n\}_{n=1}^{\infty}) = C_\circ + \{x_n y_n\}_{n=1}^{\infty}$$

می‌توان دید که $\hat{R}$ ساختمان حلقه‌ای دارد.

۱-۱-۱۳ قضیه.[۴.۳.۲ و ۶] اگر R نوتری و M یک Rـمدول با تولید متناهی باشد آنگاه

$$M \otimes_R \hat{R} \cong \hat{M}$$

۱-۱-۱۴ تعریف. فرض می‌کنیم $\{X^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ خانواده‌ای از Rـمدول‌ها و $\{f^i | f^i : X^i \longrightarrow X^{i+1}\}$ یک خانواده از Rـهمومورفیسم‌ها باشد به طوری که برای هر $i \in \mathbb{Z}$، $f^{i+1} f^i = 0$. در این صورت

$$\cdots \longrightarrow X^{i-1} \xrightarrow{f^{i-1}} X^i \xrightarrow{f^i} X^{i+1} \longrightarrow \cdots$$

را یک همبافت از Rـمدولها و Rـهمومورفیسم‌ها می‌نامیم و آنرا با $X^\bullet$ نمایش می‌دهیم. به ازای هر $i \in \mathbb{Z}$، iـامین همولوژی مدول همبافت $X^\bullet$ را با $H^i(X^\bullet)$ نمایش می‌دهیم به عبارت دیگر

$$H^i(X^\bullet) = \frac{\ker f^i}{im f^{i-1}}$$

۱-۱-۱۵ تعریف. فرض کنیم M یک Rـمدول ناصفر و N یک زیرمدول ناصفر از M باشد. گوئیم M یک توسیع اساسی از N است (N یک زیرمدول اساسی Mاست) در صورتی که به ازای هر زیرمدول ناصفر M مانند L داشته باشیم $L \cap N \neq 0$. (این تعریف معادل با این است که بگوئیم برای هر عضو ناصفر $m \in M$، $r \in R$ی موجود است به طوری که $rm \neq 0$ و $rm \in N$).

فرض کنیم M یک Rـمدول انژکتیو و توسیع اساسی N باشد، در این صورت گوئیم M یک پوشش انژکتیو N است و با $E(N)$ نشان می‌دهیم. (برای اطلاعات بیشتر در این مورد به [ص ۴۰، ۲۷] مراجعه کنید. بویژه توجه شود که با تقریب ایزومورفیسم $E(N)$ منحصر به فرد است.)

۱-۱-۱۶ تعریف. فرض کنیم M یک Rـمدول باشد. فرض کنیم $p \in \operatorname{Spec}(R)$ و بعلاوه $0 \neq x \in M$ یافت شود که $p = \operatorname{Ann}(x) = \{r \in R | rx = 0\}$. در این صورت p را یک ایدآل وابسته به M می‌نامیم. مجموعه تمام ایدآل‌های وابسته به M را با $\operatorname{Ass}_R(M)$ نمایش می‌دهیم.

۱-۱-۱۷ تعریف. اگر $\dim(M) = n$ در این صورت قرار می‌دهیم:

$$\operatorname{Ass}h(M) := \{p \in \operatorname{Ass}(M) | \dim(\frac{R}{p}) = n\}$$

۱-۱-۱۸ تعریف. فرض کنیم M یک Rـمدول و $r \in R$ باشد. در این صورت r را یک مقسوم علیه صفر روی M گوئیم هرگاه $0 \neq m \in M$ یافت شود به طوری که $rm = 0$. مجموعهٔ مقسوم علیه‌های صفر روی M را با $Z(M)$ نمایش می‌دهیم.

۱-۱-۱۹ قضیه.[۱ـ۶، ۱۵] فرض کنیم M یک Aـمدول ناصفر باشد. دراین صورت گزاره‌های زیر برقرارند:

۱) هرعضو ماکسیمال از مجموعهٔ $\{(0 :_A x) | 0 \neq x \in M\}$ یک ایدآل اول وابسته به M است و بخصوص $\mathrm{Ass}_A(M) \neq \phi$.

۲) مجموعهٔ مقسوم علیه‌های صفر M، اجتماع تمام ایدآل‌های اول وابسته به M است یعنی

$$Z(M) = \bigcup_{p \in \mathrm{Ass}(M)} P$$

۱-۱-۲۰ قضیه وتعریف. فرض کنیم N زیرمدول سره‌ای از Aـمدول M باشد. تجزیهٔ اولیهٔ N عبارتست از اشتراک تعداد متناهی از زیرمدول‌های اولیه M که برابر N باشد.

فرض کنیم $N = Q \cap \cdots \cap Q_n$ یک تجزیه اولیه برای N باشد و فرض کنیم $r(0 : M/Q_i) = p_i$ برای هر $i = 1, \cdots, n$. این تجزیه را یک تجزیه اولیه مینیمال گوئیم اگر

۱) $p_1, p_2, \cdots, p_n$ ایدآل‌های اول دو به دو متمایز باشند،

۲) به ازای هر عدد طبیعی j که $1 \leq j \leq n$ داشته باشیم $\bigcap_{i \neq j} Q_i \nsubseteq Q_j$.

می‌گوئیم N تجزیه‌پذیر است اگر حداقل یک تجزیه اولیه داشته باشد.

۱-۱-۲۱ تعریف. همبافت $\cdots E^1 \xrightarrow{d^1} E^0 \xrightarrow{d^0} 0 \longrightarrow$ از Rـمدولها و R ـهمومورفیسم‌ها را که، برای هر $i \in \mathbb{N}_0$، E^i یک Rـمدول انژکتیو است، یک رزولوشن انژکتیو برای M نامند هرگاه Rـهمومورفیسم یک به یک $\varepsilon : M \longrightarrow E^0$ موجود باشد که همبافت زیر دقیق شود.

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varepsilon} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} \cdots$$

همبافت مذکور در ابتدای تعریف را با علامت E_M نمایش می‌دهند.

۱-۱-۲۲ تعریف. فرض کنیم M یک Rـ مدول باشد و

$$E^\bullet : 0 \longrightarrow E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^n \xrightarrow{d^n} \cdots$$

یک رزولوشن انژکتیو برای M باشد، به طوری که برای هر n از $\mathbb{N}$، E^n، پوشش انژکتیو $\ker d^n$ باشد و E° نیز پوشش انژکتیو M است. در این صورت گوئیم $E^\bullet$ یک انژکتیو رزولوشن مینیمال برای M است.

ثابت می‌شود هر Rـمدول M، انژکتیو رزولوشن مینیمال دارد و هر دو انژکتیو رزولوشن مینیمال برای M با هم ایزومورف هستند.[۱۱ـ۱ـ۳ و ۱۱ـ۱ـ۲، ۶]

۱-۱-۲۳ تعریف. فرض می‌کنیم M یک Rـمدول باشد. فانکتور همورد و جمعی $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ را در نظر می‌گیریم. برای هر $n \geq \circ$، nـامین فانکتور مشتق شدهٔ راست این فانکتور را با علامت $\mathrm{Ext}^n_R(M,-)$ نشان می‌دهیم. بنابراین برای هر Rـمدول N، اگر

$$E_N : \circ \longrightarrow E^\circ \xrightarrow{d^\circ} E^۱ \xrightarrow{d^۱} E^۲ \longrightarrow \cdots$$

یک انژکتیو رزولوشن برای N باشد آنگاه

$$\mathrm{Ext}^n_R(M,N) = H^n(\mathrm{Hom}(M,E_N)).$$

به عبارت دیگر $\mathrm{Ext}^n_R(M,N) = \frac{\ker \mathrm{Hom}(id,d^n)}{im\mathrm{Hom}(id,d^{n-۱})}$ که در آن

$$\mathrm{Hom}(M,E_N) : \ \circ \longrightarrow \mathrm{Hom}(M,E^\circ) \overset{\mathrm{Hom}(id,d^\circ)}{\longrightarrow} \mathrm{Hom}(M,E^۱) \overset{\mathrm{Hom}(id,d^۱)}{\longrightarrow} \cdots .$$

۱-۱-۲۴ تعریف. فرض کنید R یک حلقه و M یک Rـ مدول باشد، عنصر $x \in R$ را Mـ منظم نامیم اگر برای هر $m \in M$ که $m \neq \circ$، داشته باشیم $xm \neq \circ$.

یک رشتهٔ $x_۱,\ldots,x_n$ از عناصر R را یک Mـ رشتهٔ نامیم اگر شرایط زیر برقرار باشند.

۱) $x_۱$ یک عنصر Mـ منظم باشد و برای هر i که $۲ \leq i \leq n$، x_i یک عنصر $\frac{M}{(x_۱,\ldots,x_{i-۱})M}$ـ منظم باشد.

۲) $M \neq (x_۱,\ldots,x_n)M$.

اگر رشتهٔ $x_۱,\ldots,x_n$ تنها شرط (۱) را دارا باشد، آنگاه آن را یک Mـ رشتهٔ منظم ضعیف می‌نامیم.

۱-۱-۲۵ قضیه و تعریف [۱۵،۱۶.۷]. فرض کنید M، Rـ مدولی با تولید متناهی باشد به قسمی که برای ایدآل $\mathfrak{a}$ از R داشته باشیم $aM \neq M$.

۱) یک Mـ رشتهٔ منظم در $\mathfrak{a}$ وجود دارد که با افزودن هیچ عنصر دیگری نمی‌توان M ـ رشته منظم طولانی‌تری از آن به دست آورد (چنین رشته‌ای را یک Mـ رشتهٔ منظم ماکسیمال نامیم.)

۲) هر Mـ رشتهٔ منظم در $\mathfrak{a}$ را می‌توان به یک Mـ رشتهٔ منظم ماکسیمال توسعه داد.

۳) تمام Mـ رشته‌های منظم ماکسیمال در $\mathfrak{a}$، طول یکسانی دارند که برابر کوچکترین عدد صحیح $i \geq 0$ می‌باشد که $\operatorname{Ext}_R^i(\frac{R}{\mathfrak{a}}, M) \neq 0$.

طول مشترک تمام Mـ رشته‌های منظم ماکسیمال در $\mathfrak{a}$ را نمرهٔ $\mathfrak{a}$ روی M نامیده و با علامت $\operatorname{grade}(\mathfrak{a}, M)$ نشان می‌دهیم. اگر $\mathfrak{a}M = M$ آنگاه $\operatorname{grade}(\mathfrak{a}, M) = \infty$ تعریف می‌کنیم.

۱-۱-۲۶ تعریف. فرض کنید $(R, \mathfrak{m})$ حلقه‌ای موضعی و نوتری و M یک Rـ مدول با تولید متناهی باشد. نمرهٔ $\mathfrak{m}$ روی M را عمق M نامیده و با $\operatorname{depth}(M)$ نمایش می‌دهیم.

۱-۱-۲۷ نتیجه. به ازای حلقهٔ موضعی و نوتری $(A, \mathfrak{m})$ و Aـمدول با تولید متناهی $M \neq 0$ تعریف می‌کنیم:

$$\operatorname{depth}_A(M) = \min\{0 \leq n \in \mathbb{Z}, \operatorname{Ext}_A^n(\frac{A}{\mathfrak{m}}, M) \neq 0\}$$

۱-۱-۲۸ نتیجه. فرض کنید $(A, \mathfrak{m})$ یک حلقهٔ موضعی و نوتری و M یک Rـ مدول با تولید متناهی و $\mathfrak{a}$ ایدآلی از R باشد. در این صورت داریم:

$$\operatorname{grade}(\mathfrak{a}, M) = \min\{\operatorname{depth}(M_p) | p \in V(\mathfrak{a})\}.$$

که در آن $V(a)$ مجموعهٔ تمام ایدآل‌های اول A است که شامل a هستند.

۱-۱-۲۹ تعریف. فرض کنیم $f : A \longrightarrow B$ یک همریختی حلقه‌ای باشد. برای هر $p \in \operatorname{Spec}(A)$، $B \otimes_A k(p)$را فیبر f نسبت به p می‌گوئیم که درآن $k(p) = \frac{A_p}{pA_p}$.

درحالتی که $(A, \mathfrak{m})$ حلقهٔ موضعی و $\hat{A}$، کمال A نسبت به $m - adic$ توپولوژی بوده و $f : A \longrightarrow \hat{A}$ همریختی طبیعی باشد، $k(p) \otimes_A \hat{A}$ را فیبر رسمی f نسبت به p می‌نامیم.