بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی
ریاضی کاربردی

روش تصویر سازی هارمونیک برای مساله مقدار ویژه تعمیم یافته بزرگ و نامتقارن به کمک انتقال ومعکوس

از:
حسین موسائی

استاد راهنما:
دکترهاشم صابری نجفی

بهمن ۱۳۸۶

تقدیم به حجت خدا مهدی موعود(عج)

سپاس و قدردانی

من لم یشکرالمخلوق، لم یشکرالخالق

سپاس بی پایان ایزد منان را که الطاف بیکران او بر همگان جاری است و رحمت پروردگار بر تمام آنان که رهرو طریق علم و معرفتند. مجموعه حاضر حاصل زحمات و همکاری‌های بسیار کسانی بوده است که جا دارد از آنها سپاسگزاری شود.

از استاد فرزانه جناب آقای دکتر **هاشم صابری نجفی** که راهنمایی های ایشان در اجرای این تحقیق مشکلات راه را برایم هموار ساخت، بسیار سپاسگزارم.

از اساتید داورم جناب آقای دکتر **منصور درویزه** و جناب آقای دکتر **آرمان عقیلی** که زحمت بازخوانی این پایان نامه را به عهده گرفتند، سپاسگزارم.

همچنین از **پدر و مادر عزیزم** که محبتهایشان جبران ناپذیر است و **برادر** و **خواهران** گرامی ام که همواره مشوق من بوده اند، تشکر و قدردانی می‌نمایم.

فهرست مطالب

پیوست

فهرست جدول ها

فهرست شکل ها

چکیده

روش تصویر سازی هارمونیک برای مساله مقدار ویژه تعمیم یافته بزرگ ونامتقارن به کمک انتقال و معکوس

حسین موسائی

یکی از زمینه‌های مهم و پرکاربرد در ریاضیات محاسباتی پیداکردن مقادیر ویژه تعمیم‌یافته می‌باشد. از آنجا که مسئله مقدارویژه تعمیم یافته و حل آن یکی از مسائل مهم در علوم مهندسی و فیزیک می‌باشد، این موضوع همواره در دست تحقیق است. از جمله روش های پیداکردن این مقادیر،روشهای زیرفضای کریلف می‌باشد. ما در این پایان‌نامه به تحلیل روش های موجود و بیان روش های جدید برای حل این مسئله می‌پردازیم.

کلیدواژه : مقدارویژه تعمیم‌یافته، روش تصویر سازی هارمونیک ، آرنولدی،انتقال ومعکوس .

Abstract:

The harmonic projection method for large non-symmetric generalized eigenproblem by shift-and-invert
H.Moosaei

One of the most important and more application topics in computational mathematicsis finding the generalized eigenvalues.since the concept of generalized eigenvalues are used in the most branches of sciences and engineering so,this subject is always for interest of research.one of the most important of available methods is Krylov subspace method. In this thesis we analyzing the available method and present the new method for solving this problem.

Keywords: generalized eigenvalue, Harmonic projection method, Arnoldi, Shift –and-Invert.

مقدمه

مساله مقدار ویژه تعمیم‌یافته برای ماتریس های مربعی A و B که جواب معادله $AX = \lambda BX$ است، یک موضوع متمرکز در جبرخطی عددی می‌باشد.محاسبه مقادیر ویژه از طریق حل صریح معادله مفسر $\det(A - \lambda B) = 0$ به جز در موارد ویژه راه حل خوبی نمی‌باشد، چون که ضرایب معادله مفسر را نمی‌توان از طریق محاسبه دترمینان با روش های پایدار عددی محاسبه نمود. لذا حتی اگر معادله مفسر به طور دقیق تعیین شود، آنگاه محاسبه ریشه‌های آن با دقت زیاد ممکن است از ناپایداری بالایی برخوردار باشد. این مطلب هنگامی بیشتر نمود پیدا می‌کند که ماتریس های مربعی از نظر بعد بزرگ باشند. برای این منظور روش های تصویرسازی مطرح گردید . اما موضوعی که هیچ کدام از روش های موجود پاسخگوی آن نیستند ، پیدا کردن مقادیر ویژه و یا مقادیر ویژه تعمیم یافته نزدیک به یک عدد خاص داده شده می باشد .

در فصل اول ضمن بیان تعاریف و قضایای اساسی در جبر خطی، به بیان برخی روش های پیدا کردن مقادیر ویژه می پردازیم . در فصل دوم برخی روش های تصویر سازی بیان شده است .در فصل سوم علاوه بر بیان روش تصویر سازی هارمونیک برای پیدا کردن مقادیر ویژه نزدیک به یک عدد خاص ، روشی جدید برای بهبود این روش بیان شده است . در فصل چهارم ، روشی جدید برای پیدا کردن مقادیر ویژه نزدیک به یک عدد خاص از مساله مقدار ویژه تعمیم یافته مطرح گردیده است . در فصل پنجم به بیان نتایج و پیشنهادات پرداخته ایم.

فصل اول

مفاهیم و قضایای اساسی در جبر خطی

۱-۱ فضاهای برداری

تعریف۱-۱- ۱: یک فضای برداری (یا فضای خطی)متشکل است از :

۱. هیات F از اسکالرها

۲. مجموعه V از اشیایی به نام بردارها

۳. قاعده (یا عمل) به نام جمع برداری که به هر جفت از بردارهای α و β از V بردار $\alpha+\beta$ از V را که مجموع α و β نامیده می شود وابسته می سازد با این شرایط که :

(آ) جمع جابجایی است; یعنی $\alpha+\beta=\beta+\alpha$

(ب) جمع شرکت پذیر است ; یعنی $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

(ج) بردار یکتای ۰ به نام بردار صفر در V موجود است به طوری که به ازای هر α در V ، $\alpha+0=\alpha$

(د) به ازای هر α در V، بردار یکتای $-\alpha$ در V موجود است به طوری که $\alpha+(-\alpha)=0$

۴. قاعده (یا عمل) به نام ضرب اسکالری که به هر اسکالر c از F و هر بردار α از V بردار $c\,\alpha$ در V را که حاصل ضرب c و α نامیده می شود وابسته می سازد با این شرایط که :

(آ) به ازای هر αدر V، $1\alpha=\alpha$

(ب) $(c_1c_2)\alpha=c_1(c_2\alpha)$

(ج) $c(\alpha+\beta)=c\alpha+c\beta$

(د) $(c_1+c_2)\alpha=c_1\alpha+c_2\alpha$.

تعریف ۱-۱- ۲ : بردار β از V یک ترکیب خطی از بردارهای $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ نامیده می شود ، هرگاه اسکالرهای چون $c_1,\dots,c_n$ در F وجود داشته باشد به طوری که

$$\beta=c_1\alpha_1+\dots+c_n\alpha_n=\sum_{i=1}^{n}c_i\alpha_i$$

تعریف ۱-۱- ۳ : گیریم V فضایی برداری برروی هیات F باشد . یک زیر فضای V عبارت است از یک زیرمجموعه W از V که خود با اعمال جمع برداری و ضرب اسکالری روی V ، یک فضای برداری برروی F باشد.

قضیه ۱-۱-۴ : یک زیر مجموعه ی غیر تهی W از V زیر فضایی از V است اگر و تنها اگر به ازای هر دو بردار α و β از W و هر اسکالر c از F بردار $c\,\alpha + \beta$ در W باشد.

برهان : ر . ک . [۱۵] .

تعریف ۱-۱- ۵ : گیریم S مجموعه ای از بردارهای فضای برداری V باشد . زیر فضای پدید آمده توسط S ، بنابر تعریف ، عبارت است از اشتراک W از همه ی زیر فضاهای V که شامل S باشند .

هنگامی که S مجموعه ای متناهی از بردارها باشد ، یعنی $S = \{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ ، W را زیر فضای پدید آمده توسط بردارهای $\alpha_n,...,\alpha_1$ نیز می نامیم . و با $W = Span\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ نشان می دهیم .

قضیه ۱-۱-۶ : زیر فضای پدید آمده توسط یک زیر مجموعه ی غیر تهی S از فضای برداری V عبارت است از مجموعه ی همه ی ترکیبات خطی بردارهای S .

برهان : ر . ک . [۱۵] .

تعریف ۱-۱-۷ : گیریم V فضایی برداری بر روی F باشد . یک زیر مجموعه ی S از V وابسته ی خطی نامیده می شود هرگاه بردارهای متمایزی مانند $\alpha_n,...,\alpha_1$ در S واسکالرهایی مانند $c_n,...,c_1$ که همگی صفر نباشند در F یافت شوند به طوری که :

$$c_1\alpha_1 + ... + c_n\alpha_n = 0$$

مجموعه ای که وابسته ی خطی نباشد ، مستقل خطی نام دارد .

تعریف ۱-۱-۸ : گیریم V فضایی برداری باشد . یک پایه برای V مجموعه ای مستقل خطی از بردارهای V است که فضای V را پدید می آورد .

فضای V دارای بعد متناهی است هرگاه یک پایه ی متناهی داشته باشد .

تعریف ۱-۱-۹ : یک زیر فضای S تحت یک ماتریس (مربعی) مانند A ناوردا نامیده می شود ، هرگاه $AS \subset S$.

۱-۲ فضاهای ضرب داخلی

تعریف ۱-۲-۱ : فرض کنیم F هیات اعداد حقیقی یا هیات اعداد مختلط و V فضایی برداری بر روی F باشد . یک ضرب داخلی روی V تابعی است که به هر جفت مرتب از بردارهای α و β در V اسکالری چون (α,β) در F را طوری اختصاص می دهد که به ازای همه ی α ها و β ها و γ های در V و همه ی اسکالرهای c داشته باشیم :

(آ) $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$

(ب) $(c\alpha,\beta)=c(\alpha,\beta)$

(ج) $(\beta,\alpha)=\overline{(\alpha,\beta)}$ خط زبر نمایش گر مزدوج اعداد مختلط است

(د) هرگاه $\alpha\neq 0$ ، $(\alpha,\alpha)\succ 0$

(ه) شرایط (ب) و (ج) ایجاب می کند که : $(\alpha,c\beta+\gamma)=\overline{c}(\alpha,\beta)+(\alpha,\gamma)$.

مثال ۱-۲-۲ : روی F^n ضربی داخلی وجود دارد که ما آن را ضرب داخلی استانده می نامیم . این ضرب داخلی روی $\alpha=(x_1,\dots,x_n)$ و $\beta=(y_1,\dots,y_n)$ با $(\alpha,\beta)=\sum_i x_i\overline{y}_i$ تعریف می شود .

وقتی $F=\mathbb{R}$ این قاعده را می توان به صورت $(\alpha,\beta)=\sum_i x_iy_i$ نوشت .

توجه داریم که ضرب داخلی استانده در حالت حقیقی غالبا" ضرب نقطه ای یا اسکالری نامیده می شود و توسط $\alpha.\beta$ نشان داده می شود .

تعریف ۱-۲-۳ : یک فضای ضرب داخلی عبارت است از یک فضای برداری حقیقی یا مختلط همراه با ضرب داخلی مشخصی روی آن فضاها .

تعریف ۱-۲-۴ : دو بردار α و β از یک فضای حاصل ضرب داخلی V متعامد نامیده می شود، اگر

$$(\alpha,\beta)=0$$

تعریف ۱-۲-۵ : یک مجموعه از بردارها مانند $X=\{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n\}$ را متعامد گویند هرگاه

$$\forall\quad i\neq j\quad (\xi_i,\xi_j)=0\qquad i,j=1,2,\dots,n.$$

تعریف ۱-۲-۶ : مجموعه X را متعامد یکه گویند هر گاه X متعامد باشد و نرم هر بردار متعلق به X برابر یک باشد یعنی

$$\forall\ \xi_i \in X \quad \|\xi_i\| = 1$$

قضیه ۱-۲-۷: هر مجموعه متعامد مستقل خطی است.

برهان : فرض کنیم $\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\}$ مجموعه ای متعامد باشد و $\sum_i c_i\xi_i = 0$، پس

$$0 = (\xi_j,0) = (\xi_j,\sum_i c_i\xi_i) = \sum_i c_i(\xi_j,\xi_i) = c_j \quad \forall\ j$$

لذا این مجموعه مستقل خطی است.

قضیه ۱-۲-۸ : اگر $A = \{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s\}$ مجموعه ای مستقل خطی در V باشد ، مجموعه ای متعامد یکه چون $X = \{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_s\}$ وجود دارد به طوری که

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{s} a_{ik}\alpha_i$$

برهان : (روش متعامد سازی گرام-اشمیت). چون α_1 عضوی از یک مجموعه مستقل خطی است $\alpha_1 \neq 0$ و بنابراین $\|\alpha_1\| > 0$. قرار می دهیم $\xi_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}$ روشن است که $\|\xi_1\| = 1$. اکنون فرض کنیم که مجموعه ای مانند $\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_r\}$ پیدا کرده باشیم که متعامد یکه باشد به طوری که هر ξ_k ترکیب خطی از $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r\}$ باشد.

فرض کنیم

$$\alpha'_{r+1} = \alpha_{r+1} - (\xi_1,\alpha_{r+1})\xi_1 - \cdots - (\xi_r,\alpha_{r+1})\xi_r$$

پس به ازاء هر $\xi_i, 1 \leq i \leq r$ داریم

$$(\xi_i,\alpha'_{r+1}) = (\xi_i,\alpha_{r+1}) - (\xi_i,\alpha_{r+1}) = 0$$

به علاوه چون ξ_k ترکیبی خطی از $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r\}$ است، α'_{r+1} ترکیبی خطی از $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{r+1}\}$ است. همچنین α'_{r+1} صفر نیست چون $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{r+1}\}$ مجموعه ای مستقل خطی است وضریب α_{r+1} در تعریف α'_{r+1} برابر یک است پس می توان چنین تعریف کرد $\xi_{r+1} = \frac{\alpha'_{r+1}}{\|\alpha'_{r+1}\|}$. روشن است که $\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{r+1}\}$ مجموعه ای متعامد یکه با ویژگی های مطلوب است.

این روش را می توانیم تا زما نی که اعضای A تمام شوند ادامه دهیم در این صورت مجموعه $X = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s\}$ ویژگی های مورد نیاز را داراست.

مثال ۱-۲-۹: بردارهای $\alpha_1 = (3,0,4), \alpha_2 = (-1,0,7), \alpha_3 = (2,9,11)$ در $\mathbb{R}^3$ ، مجهز به ضرب داخلی استانده را در نظر می گیریم . با به کار بستن فرآیند گرام –اشمیت ، بردارهای زیر به دست می آیند :

$$\xi_1 = \frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|} = \frac{1}{5}(3,0,4)$$
$$\alpha_2' = \alpha_2 - (\xi_1, \alpha_2)\xi_1 = (-1,0,7) - \frac{((-1,0,7),(3,0,4))}{25}(3,0,4) = (-4,0,3)$$
$$\xi_2 = \frac{\alpha_2'}{\|\alpha_2'\|} = \frac{1}{5}(-4,0,3)$$
$$\alpha_3' = \alpha_3 - (\xi_1, \alpha_3)\xi_1 - (\xi_2, \alpha_3)\xi_2$$
$$= (2,9,11) - \frac{((2,9,11),(3,0,4))}{25}(3,0,4) - \frac{((2,9,11),(-4,0,3))}{25}(-4,0,3) = (0,9,0)$$
$$\xi_3 = \frac{\alpha_3'}{\|\alpha_3'\|} = (0,1,0)$$

به سادگی معلوم می شود که $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ مجموعه ای متعامد یکه است .

تعریف ۱-۲-۱۰: مجموعه همه ترکیبات خطی یک مجموعه بردار $G = \{a_1, \dots, a_n\}$ یک زیر فضای برداری است که *span* خطی G نامیده می شود و به صورت زیر نمایش داده می شود

$$spanG = span\{a_1, \dots, a_n\} = \left\{ z \in C^n : z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \ , \ \alpha_i \in C \right\}$$

مثال ۱-۲-۱۱ : زیر فضای کریلف از مرتبه m را به صورت زیر در نظر می گیریم

$$k_m(A, v) = span\{v, Av, \dots, A^{m-1}v\}$$

حال اگر $Ax = b$ و x_0 یک تقریب اولیه برای این دستگاه باشد و $v = r_0 = b - Ax_0$ در این صورت هر تقریب بعدی را در این زیر فضا می توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$x_m \in x_0 + k_m(A, r_0) = x_0 + [r_0, Ar_0, \dots, A^{m-1}r_0] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} = x_0 + \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i A^i r_0 = x_0 + p_{m-1}(A) r_0$$

تعریف ۱-۲-۱۲ : مجموع دو فضای برداری S_1 و S_2 یک زیر فضا می باشد که به صورت مجموعه همه بردارهایی تعریف می شود که برابر با مجموع یک بردار از S_1 و یک بردار از S_2 می باشد. در صورتی که اشتراک این دو فضا برابر $\{0\}$ باشد آنگاه این مجموع را به صورت $S_1 \oplus S_2$ نمایش می دهند.

تعریف ۱-۲-۱۳ : فرض کنید $A \in C^{m\times n}$ در این صورت فضای برد و فضای پوچ ماتریس A را به ترتیب به صورت زیر تعریف می کنیم

$$Range(A) = \{Ax : x \in \mathbb{C}^n\}$$
$$Ker(A) = \{x \in \mathbb{C}^n : Ax = 0\}$$

با توجه به تعریف اگر A نا منفرد باشد $Ker(A) = \{0\}$ ، اما اگر A منفرد باشد در این صورت با توجه به $Ax=0$ باید صفر یک مقدار ویژه A باشد. حال اگر بردارهای ویژه نظیر صفر را به دست آوریم، اعضای $Ker(A)$ خواهند بود.

تعریف ۱-۲-۱۴ : یک بردار که بر تمام بردارهای یک زیر فضا مثل S عمود باشد می گوییم بر زیر فضای S عمود است ، مجموعه همه بردارهایی که عمود بر S هستند یک زیر فضای برداری است و متمم قائم S نامیده می شود و با $S^\perp$ نشان داده می شود.

مثال ۱-۲-۱۵ : فرض کنید S زیر فضای R^3 شامل تمام بردارهای به صورت زیر باشد

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$$

که در آن a و b اعداد حقیقی اند. بنابراین عناصر S با پاره خطهایی در صفحه xy متناظرند. بوضوح $S^\perp$ مجموعه تمام بردارهایی به صورت زیر است

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix}$$

این بردارها با پاره خطهایی در طول محور z ها متناظرند.

قضیه ۱-۲-۱۶ : فرض کنید S زیر فضایی از یک فضای حاصل ضرب داخلی حقیقی V باشد، در این صورت :

الف- $S^{\perp}$ زیر فضایی از V است.

ب- $S \bigcap S^{\perp} = 0$.

ج- اگر S بطور متناهی تولید شده باشد، یک بردار v به $S^{\perp}$ متعلق است، اگر وفقط اگربر هر بردار از مجموعه ای مولد از S عمود باشد.

برهان : ر.ک. [۱۵] .

قضیه ۱-۲-۱۷ : فرض کنید S زیر فضایی از یک فضای حاصل ضرب داخلی متناهی البعد V باشد، در اینصورت

$$V = S \oplus S^{\perp} \ , \ \ \dim V = \dim S + \dim S^{\perp}$$

برهان : ر.ک. [۱۵] .

نتیجه ۱-۲-۱۸ : اگر S زیر فضایی از فضای حاصل ضرب داخلی حقیقی متناهی البعد V باشد، آنگاه

$$(S^{\perp})^{\perp} = S$$

برهان : ر.ک .[۱۵] .

۱-۳ انواع ماتریس

تعریف ۱-۳-۱: ماتریس $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ یک ماتریس متقارن است هرگاه $A^T = A$.

تعریف ۱-۳-۲: ماتریس $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ یک ماتریس نرمال است هرگاه $A^H A = A A^H$.

تعریف ۱-۳-۳: ماتریس $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ یک ماتریس قطری است اگر $a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$ و می‌نویسیم

$$A = diag(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$$

تعریف ۱-۳-۴: ماتریس $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$ یک ماتریس بالا مثلثی است اگر $a_{ij} = 0 \quad \forall i > j$ و به طور مشابه پایین مثلثی است اگر $a_{ij} = 0 \quad \forall i < j$.

برخی خواص ماتریس های بالا مثلثی:

۱) حاصل ضرب دو ماتریس بالا مثلثی (پایین مثلثی) نیز یک ماتریس بالا مثلثی (پایین مثلثی) می‌باشد.

۲) معکوس یک ماتریس بالا مثلثی (پایین مثلثی) در صورت وجود نیز یک ماتریس بالا مثلثی (پایین مثلثی) می‌باشد.

۳) مقادیر ویژه یک ماتریس بالا مثلثی عناصر روی قطر آن می‌باشند.

۴) دترمینان یک ماتریس بالا مثلثی برابر حاصل ضرب عناصر روی قطر آن می‌باشد.

تعریف ۱-۳-۵: ماتریس $u \in R^{n\times n}$ یک ماتریس متعامد است اگر

$$u^T u = u\, u^T = I_{n\times n}$$

خواص ماتریس های متعامد:

۱) معکوس یک ماتریس متعامد برابر ترانهاده آن می‌باشد یعنی: $u^{-1} = u^T$.

۲) حاصل ضرب دو ماتریس متعامد نیز یک ماتریس متعامد می‌باشد.

تعریف ۱-۳-۶: ماتریس $P \in R^{n\times n}$ یک ماتریس جایگشتی است اگر در هر سطر و در هر ستون دقیقاً یک عنصر مخالف صفر، که یک می‌باشد وجود داشته باشد و بقیه عناصر برابر صفر باشند.