دانشگاه مازندران

دانشکده علوم ریاضی

گروه آمار

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

عنوان:

روش عددی و تحلیلی برای مدل‌بندی صف $M/G/1$ با توزیع سرویس‌دهی دم سنگین

استاد راهنما:

دکتر احمد پوردرویش

استاد مشاور:

خانم دکتر محمدپور

نگارش :

رئوفه اصغری

شهریور ۱۳۸۹

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم و همسر عزیزم

قدردانی

سپاس مخصوص خداوند باریتعالی است که به بندگان خود منت نهاد و آنها را به زینت تقوا آراسته و نعمت قلم و علم را همچون نگین درخشان سرلوحه وجودشان ساخت .

در اینجا از زحمات بی‌شائبه استاد محترم جناب آقای دکتر پودرویش استاد راهنمای اینجانب که با ارائه راهکارها و پیشنهادات بسیار ارزنده خود در جهت هر چه بهتر شدن این پایان‌نامه مرا یاری نمودند ، کمال سپاسگذاری را می‌نمایم و نیز زحمات خانم دکتر محمدپور استاد مشاور بنده مورد امتنان است . همچنین از داوران محترم جناب آقای دکتر اصغرزاده و دکتر صادقپور و اساتید گرانقدر که مرا در فراگیری علم و ادب حامی و پشتیبان بودند صمیمانه تشکر و قدردانی می‌نمایم.
بر خود لازم می‌دانم که در انتها مراتب سپاسگزاری خود را از خانواده عزیزم که همواره مشوق و همراه بنده در تحصیل علم بوده اند، ابراز دارم.

چکیـده

در بسیاری از کاربردهای مدرن تئوری صف ، فرض کلاسیک نمایی بودن توزیع سرویس بکار نمی‌رود. در چنین وضعیتی توزیع مناسب برای مدل‌بندی سرویس ، توزیع‌های دم‌سنگین می‌باشد زیرا دم این توزیع‌هاخیلی کندتر از هر تابع نمایی زوال می‌یابد. برای پیدا کردن تابع توزیع زمان انتظار در صف $M/G/۱$ با استفاده از وارون تبدیل لاپلاس مشکلی که پیش می‌آید ، این است که تبدیل لاپلاس تحلیلی فرم بسته‌ای ندارد و تحلیل صف‌بندی با مشکل مواجه می‌شود . در چنین وضعیتی می‌توان از روش عددی استفاده کرد . در بین توزیع‌های دم‌سنگین ، مهمترین توزیع ،توزیع پارتو است که با استفاده از وارون فرمول پولاچک خین‌چین به روش تحلیلی فرمولی برای تابع توزیع زمان انتظار در صف و توزیع اندازه صف برای این توزیع آورده شده است.

فهرست مندرجات

لیست اشکال

لیست جداول

فصل ۱

مقدمه و مفاهیم پایه‌ای

۱.۱ مقدمه

در بسیاری از کاربردهای مدرن تئوری صف ، فرض کلاسیک نمایی بودن توزیع سرویس به کار نمی‌رود. بنابراین در چنین وضعیتی، توزیع مناسب برای مدل‌بندی سرویس (G) توزیع دم سنگین می‌باشد، زیرا دم این توزیع‌ها خیلی کندتر از هر تابع نمایی زوال می‌یابد. از کاربردهای مهم توزیع‌های دم سنگین، مدل‌بندی ترافیک اینترنتی و ارتباطات، احتمال زیان در بیمه و کاربردهای مالی می‌باشد. این به دلیل حجم زیاد فایل ها یا افراد متقاضی می‌باشد. مثلا آمار ترافیک اینترنتی پیشنهاد کرده است که به دلیل کمیت بسیار زیاد (مانند اندازه‌های فایل، طول بسته، زمان‌های بین دو ورود، زمان‌های اتصال و ...) توزیع مناسب برای مدل‌بندی، توزیع دم سنگین است. توزیع های دم سنگین نقش عمده‌ای در مدل‌بندی بیمه دارد زیرا اندازه درخواست‌ها می‌تواند مقدار خیلی خیلی بزرگی باشد. می توان گفت که احتمال اینکه یک شرکت بیمه با پول اولیه ذخیره شده u با ضرر احتمالی مواجه شود همان انتظار در صف پایا برای یک صف M/G/1 یا G/G/1 است $[w_q > u]$ که زمان‌های سرویس با اندازه درخواست‌ها مطابقت می‌کند.

بنابراین برای تحلیل چنین سیستم‌ها یا کاربردهایی (احتمال خیلی پایین مقادیر سرویس فوق‌العاده زیاد) بهتر است از توزیع‌های دم سنگین برای مدل‌بندی صف مورد بررسی استفاده کنیم. یکی از مشکلاتی که در تحلیل این صف‌ها به وجود می آید این است که تبدیل لاپلاس آنها فرم بسته‌ای ندارد و محاسبه دستی آنها با مشکل مواجه می‌شود. در این صورت برای پیدا کردن تابع توزیع زمان انتظار در صف ما به روش‌های عددی متوسل می شویم مانند شبیه‌سازی و روش تقریب تبدیل لاپلاس (TAM) که در این فصل ، ما اهمیت دم توزیع های دم‌سنگین و مشکلاتی که از روش شبیه‌سازی صف M/G/1 با سرویس دهی پارتو برای متوسط زمان انتظار در صف با آن مواجه می‌شویم را مورد

بررسی قرار می‌دهیم.

برای پیدا کردن تابع توزیع زمان انتظار در صف باید از معکوس یا وارون تبدیل لاپلاس استفاده کنیم. بنابراین می‌توانیم از روش تقریب تبدیل (TAM[۱]) استفاده کنیم که این روش برای توزیع‌هایی که گشتاورهایش وجود ندارد(مانند پارتو) مؤثر است که در فصل ۲ آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم . در پایان با استفاده از وارون فرمول پولاچک—خین‌چین به روش تحلیلی فرمولی برای تابع توزیع زمان انتظار در صف و اندازه صف با توزیع سرویس پارتو محاسبه شده است که در فصل ۳ به تحلیل آن می‌پردازیم.

۲.۱ صف

نقطه شروع نظریه صف به سال ۱۹۰۹ میلادی بر می‌گردد، وقتی که ریاضیدان دانمارکی ارلانگ (۱۹۲۹—۱۸۷۸) مقاله اصلی خود را درباره‌ی بررسی ترافیک خطوط تلفن منتشر کرد. ارلانگ را بانی نظریه صف می‌نامند.

صف (به زبان انگلیسی Queue یا Wating Line) را می‌توان به این صورت توصیف کرد: متقاضیان برای اخذ سرویس مراجعه می‌کنند، اگر ارائه سرویس بلافاصله مقدور نباشد منتظر می‌شوند و بعد از دریافت سرویس، سیستمی را که به آن مراجعه کرده‌اند، ترک می‌کنند.

ارکان اولیه سیستم صف بندی، سرویس گیرنده، سرویس دهنده، سرویس و صف می‌باشد که سرویس گیرنده را متقاضی می‌نامیم، که لزوماً یک انسان نیست و می‌تواند شیء نیز باشد.

---

[۱] Transform Approximation Method

۳.۱ مشخصه های اساسی فرایند صف بندی

۱ − **الگوی ورود متقاضیان:** غالباً برحسب متوسط تعداد مراجعه کنندگان در واحد زمان (میانگین نرخ ورود) یا به وسیله متوسط زمان بین دو ورود متوالی (میانگین فاصله زمانی دو ورود متوالی) اندازه‌گیری می‌شود. اگر λ را میانگین نرخ ورود در نظر بگیریم یعنی متوسط تعداد متقاضیانی که در واحد زمان مراجعه می کنند، آنگاه با تناسب ساده، $\frac{1}{\lambda}$ میانگین فاصله زمانی بین دو ورود متوالی است که در اینجا فرض بر این است که فرآیند ورودی دارای توزیع پواسن با میانگین λ باشد.

در بسیاری از وضعیت‌های واقعی روزمره، نرخ ورود وابسته به حالت سیستم است (یعنی تعداد متقاضیان موجود در سیستم) و یا وابسته به زمان.

بسیار محتمل است که متقاضی تازه وارد با مشاهده صف طولانی تمایل کمتری به پیوستن به صف از خود نشان دهد، نسبت به زمانی که تعداد افراد در صف کم است (نرخ ورود نزولی). البته عکس این موضوع هم صادق است، یعنی ممکن است تازه وارد با مشاهده صف طولانی حریص‌تر شده و گرایش بیشتری برای پیوستن به آن از خود نشان دهد(نرخ ورود صعودی). و نیز گفتیم که ممکن است نرخ ورود وابسته به زمان باشد مثلاً اگر وضعیت مورد نظر ایستگاه اتوبوس یا تاکسی باشد، نرخ ورود وابسته به زمان است. اگر الگوی مراجعه‌ای با زمان تغییر نکند مانا و الگویی را که مستقل از زمان نباشد، نامانا می‌نامیم. که در این پایان‌نامه الگوی ورود را مستقل از حالت و مانا در نظر می‌گیریم.

۲ − **الگوی سرویس سرویس دهندگان:** غالباً به وسیله متوسط تعداد سرویس شده‌ها در واحد زمان (میانگین نرخ سرویس) و یا به وسیله میانگین زمان سرویس اندازه‌گیری می‌شود. اگر μ میانگین نرخ سرویس باشد، یعنی اگر μ میانگین تعداد افرادی باشد که سرویس دهنده در واحد زمان

سرویس می‌دهد، آنگاه با یک تناسب ساده، $\frac{1}{\mu}$ میانگین زمان سرویس است. که فرض براین است که فرآیند سرویس دارای توزیع G (دلخواه) با میانگین μ باشد.

۳– نظم صف: نظم صف به روشی اطلاق می‌شود که براساس آن وقتی صف شکل گرفته است متقاضیان برای ارائه سرویس انتخاب می‌کنند. متداول‌ترین نظم که در زندگی روزمره مشاهده می‌شود سرویس به ترتیب ورود (FIFO[2]) است. ما نیز چنین نظمی را در اینجا در نظر می‌گیریم.

۴– ظرفیت سیستم: بعضی از سیستم‌های صف‌بندی ممکن است محدودیت فیزیکی از نظر گنجایش مکان انتظار داشته باشند، یعنی سیستم حداکثر k متقاضی را می‌تواند بپذیرد، آنگاه ظرفیت سیستم برابر k است. ولی در بعضی مواقع ممکن است ظرفیت سیستم نامتناهی $k=\infty$ باشد، که ما در این پایان‌نامه صف مورد بررسی k را نامتناهی در نظر می‌گیریم.

۵– تعداد باجه‌های سرویس: تعداد باجه‌های سرویس همان تعداد سرویس دهندگان همانند است که می‌توانند متقاضیان ا همزمان سرویس کنند و ما در صف مورد بررسی فرض کرده‌ایم که تعداد باجه‌های سرویس یک باشد.

متداول ترین مدل صف بندی (کلاسیک)، صف $M/M/1$ است، که بیانگر صفی است که فواصل زمانی مراجعات توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{\lambda}$ (یا تعداد مراجعات در واحد زمان دارای توزیع نمایی با نرخ λ است) و زمان سرویس نیز دارای توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{\mu}$ با یک باجه سرویس دهی می باشد و ظرفیت سیستم نامتناهی و نظم صف به صورت FIFO (سرویس به ترتیب ورود) می‌باشد. و اگرصف

[2] First In First Out

M/G/1 باشد ، زمان سرویس دارای توزیع دلخواه است که ما آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۴.۱ توزیع دم سنگین

تابع توزیع تجمعی $F(x)$ دارای دم توانی است اگر به ازای مقادیر ثابت و مثبت a و c داشته باشیم

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\bar{F}(x)}{x^a}=c,$$

که $\bar{F}(x)=1-F(x)=P(X>x)$ تابع توزیع مکمل می‌باشد. یعنی به طور هندسی دم توزیع در حد از بین می‌رود و یا

$$\bar{F}(x)\sim x^{-a} \qquad a>0,$$

که $a(x)\sim b(x)$ به این معنی است که $\lim_{x\to\infty}\frac{a(x)}{b(x)}$ مقدار ثابتی است.

توزیع‌های دم توانی زیر مجموعه‌ای از کلاس بزرگتر توزیع‌هاست که دم آنها خیلی کندتر از هر توزیع نمایی $[\lim_{x\to\infty}e^{ax}\bar{F}(x)=\infty, a>0]$ زوال می‌یابد که این کلاس بزرگتر، توزیع‌های دم سنگین (دراز–کلفت) می‌باشد.

تابع توزیع $F(x)$ توزیعی دم سنگین است اگر و تنها اگر

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(x)}=1, y\geq 0,$$

یعنی به ازای هر مقدار غیر منفی y، اگر مقدار متغیر تصادفی از مقدار بزرگ x بزرگتر باشد آنگاه از $x+y$ نیز بزرگتر است و این نشان می‌دهد که چنین توزیع‌هایی دارای دم‌هایی هستند که خیلی کندتر از هر تابع نمایی زوال می‌یابد.

از جمله توزیع‌های دم سنگین، توزیع پارتو، توزیع لگ نرمال و توزیع وایبل (با پارامتر شکل کوچکتر از یک) می‌باشند. در بین این سه توزیع، دم توزیع پارتو کندتر از دو توزیع دیگر از بین می‌رود. چون توزیع پارتو جزء توزیع‌های دم توانی است. بنابراین طبق تعریف می‌توان گفت همه توزیع‌های دم توانی توزیع‌های دم سنگین هستند ولی عکس این مطلب درست نیست.

به عنوان مثال توزیع وایبل با تابع چگالی زیر یک توزیع دم سنگین است وقتی که $\alpha < ۱$ می‌باشد ولی دم توانی نیست:

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha\lambda x^{\alpha-۱}e^{-\lambda x^{\alpha}}, \quad x > ۰, \quad \alpha, \lambda > ۰, \\ \bar{F}(x) &= e^{-\lambda x^{\alpha}} \not\sim x^{-a}, \end{aligned}$$

در نتیجه توزیع وایبل ، دم‌توانی نیست.

و از طرفی

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-\lambda(x+y)^{\alpha}}}{e^{-\lambda x^{\alpha}}} = \lim_{x\to\infty} e^{-\lambda[(x+y)^{\alpha}-x^{\alpha}]} = ۱.$$

اگر مقدار α نزدیک به صفر باشد این همگرایی سریع‌تر رخ می‌دهد ولی اگر α نزدیک به یک باشد همگرایی به ازای تقریباً $x = ۱۰^{۷}$ رخ می‌دهد.

توزیع پارتو که از سنگین‌ترین توزیع دم سنگین یا به عبارتی توزیع دم توانی محسوب می‌شود دارای تابع چگالی زیر است:

$$f(x) = \frac{\alpha\beta^{\alpha}}{x^{\alpha+۱}}, \quad x \geq \beta, \quad \alpha, \beta > ۰,$$

ولی چون متغیر مورد بررسی، مربوط به زمان است پس باید مقدارش بزرگتر از صفر باشد. بنابراین با تغییر متغیر $(x - \beta = t)$، تابع چگالی آن به صورت زیر به دست می آید.

$$f(t) = \frac{\alpha\beta^{\alpha}}{(\beta+t)^{\alpha+۱}}, \quad t \geq ۰, \quad \alpha, \beta > ۰,$$

و تابع توزیع آن

$$F(t) = 1 - \frac{\beta^\alpha}{(\beta+t)^\alpha}, \quad t \geq 0, \quad \alpha, \beta > 0,$$

که در این توزیع

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\beta^\alpha}{(\beta+x+y)^\alpha}}{\frac{\beta^\alpha}{(\beta+x)^\alpha}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\left[\frac{\beta+x+y}{\beta+x}\right]^\alpha} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\left[1+\frac{y}{\beta+x}\right]^\alpha} \\
&= \frac{1}{1+0} = 1,
\end{aligned}$$

و در نتیجه توزیع پارتو یک توزیع دم سنگین است و از طرفی

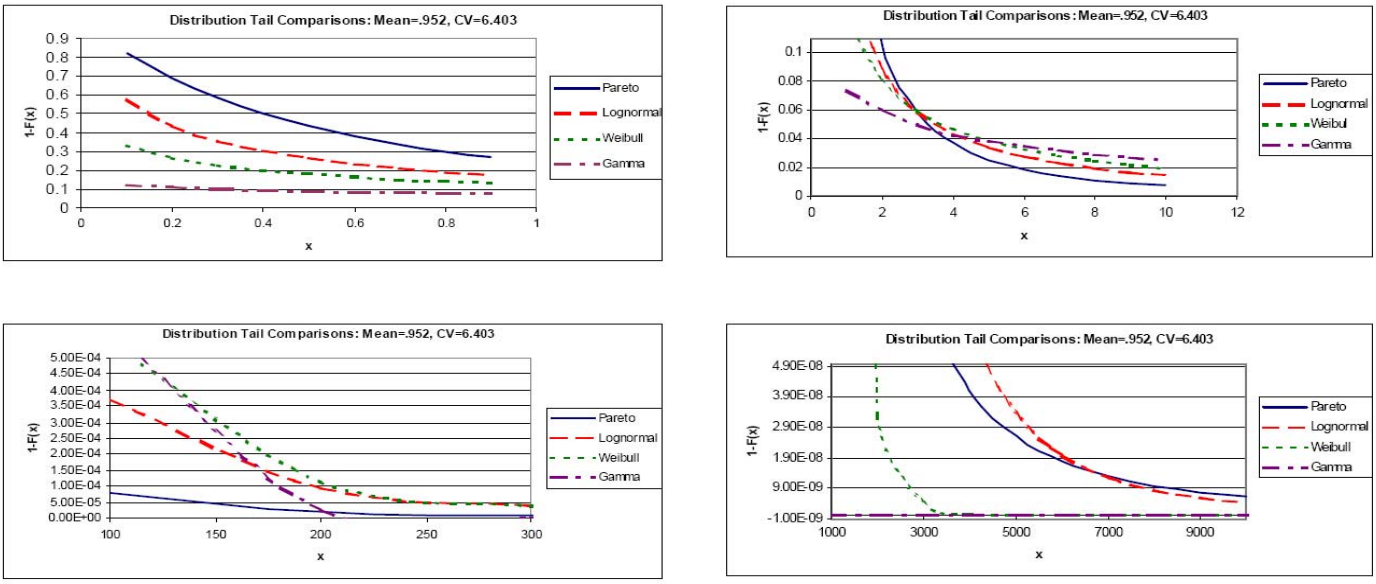
$$\bar{F}(x) = P(X > x) = 1 - \left[1 - \frac{\beta}{(\beta+x)^\alpha}\right],$$

و مکمل تابع توزیع پارتو طبق تعریف توزیع دم توانی متناسب است با

$$\bar{F}(x) \sim (\beta+x)^{-\alpha},$$

و در نتیجه توزیع پارتو یک توزیع دم توانی است چون دم آن به صورت هندسی در حد از بین خواهد رفت.

در شکل (۱.۱) مکمل تابع توزیع تجمعی (مقادیر دم) توزیع‌های پارتو، لگ نرمال، وایبل و گاما با میانگین و واریانس یکسان و ضریب تغییرات ۶٫۴۰۳ را با هم مقایسه می‌کنیم که مقدار α در توزیع پارتو ۲٫۰۵ می‌باشد. هدف این است که زوال دم آنها را با هم مقایسه کنیم.



شکل ۱.۱. مقایسه توزیع های دم‌سنگین و توزیع گاما

سه توزیع اول دم سنگین‌اند ولی توزیع گاما جزء توزیع‌های دم سنگین نیست بلکه یک توزیع نمایی است . با مشاهده نمودارها می‌بینیم که هنگامی که $x =$ ۲۰۰ است ، توزیع پارتو و توزیع گاما با هم برخورد کرده و بعد از آن مقدار $F(x) -$ ۱ توزیع گاما به صفر می‌رسد یعنی دم این توزیع بعد از این مرتبه از بین می‌رود. وقتی $x =$ ۳۰۰۰ است ، توزیع وایبل و توزیع لگ نرمال با هم برخورد می‌کنند و بعد از آن دم توزیع وایبل از بین می‌رود و این بدین معنی است که دم توزیع لگ نرمال سنگین تر از دم توزیع وایبل است. در نهایت در $x =$ ۷۰۰۰ دم توزیع پارتو و دم لگ نرمال باهم برخورد می‌کنند و پس از آن دم توزیع لگ‌نرمال زودتر به صفر می‌رسد ولی همچنان توزیع پارتو دم خود را حفظ می‌کند، چون توزیع پارتو سنگین ترین دم سنگین هاست.

۵.۱ اهمیت دم توزیع‌های دم سنگین در شبیه سازی

همان طور که در بخش قبل بیان شد، توزیع پارتو یک توزیع دم توانی است و در نتیجه یک توزیع دم سنگین محسوب می‌شود، که در این بخش اهمیت دم و مشکلات شبیه سازی توزیع پارتو را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

تابع توزیع و تابع چگالی احتمال توزیع پارتو با پارامتر شکل $\alpha > ۰$ و پارامتر مقیاس $\beta = ۱$ عبارتند از؛

$$F(x) = ۱ - \frac{۱}{(۱ + x)^{\alpha}}, \quad x \geq ۰, \quad \alpha > ۰, \qquad (۱.۱)$$

و

$$f(x) = \frac{\alpha}{(۱ + x)^{\alpha+۱}}, \quad x \geq ۰, \quad \alpha > ۰. \qquad (۲.۱)$$

یکی از ویژگی‌های مهم توزیع‌های دم توانی این است که تمام گشتاورهایش بعد از مرتبه‌ای نا متناهی می‌شود. به عنوان مثال توزیع پارتو دارای گشتاورهای متناهی با مرتبه کمتر از α است و دارای گشتاورهای نامتناهی با مرتبه بزرگتر مساوی α می‌باشد. بنابراین لازم است که برای داشتن گشتاور مرتبه k ام ($E(X^k)$) در توزیع پارتو، $\alpha > k$ باشد. اگر $\alpha > ۱$ باشد تنها مقدار $E(X)$ متناهی است که مقدارش $E(X) = \frac{۱}{\alpha-۱}$ می‌باشد. و اگر $\alpha > ۲$ باشد، آنگاه گشتاور مرتبه اول و دوم متناهی‌اند که $E(X^۲) = \frac{۲}{(\alpha-۱)(\alpha-۲)}$ می‌باشد و در نتیجه $V(X) = \frac{\alpha}{(\alpha-۱)^۲(\alpha-۲)}$ می‌باشد. در حالت کلی اگر $\alpha > k$ باشد، آنگاه گشتاور مرتبه k ام عبارت است از:

$$E(X^k) = \frac{k!}{(\alpha - k)(\alpha - k + ۱)...(\alpha - ۱)}, \qquad \alpha > k,$$

بنابراین یک متغیر تصادفی پارتو نمی‌تواند تمام گشتاورهایش را داشته باشد، در نتیجه ما برای پیدا کردن تابع توزیع زمان انتظار در صف نیاز به تبدیل لاپلاس داریم ولی به دلیل نداشتن تمام

گشتاورهایش تبدیل لاپلاس به طور تحلیلی برای این توزیع وجود ندارد و تحلیل صف بندی $M/G/۱$ غیر ممکن می‌شود.

یکی از روش‌ها برای پیدا کردن تابع توزیع زمان انتظار در صف روش شبیه سازی است. برای شبیه سازی صف با سرویس دهی پارتو $M/P/۱$ در حالت پایا ، ابتدا مقادیر α را بزرگتر از دو در نظر می‌گیریم که در این ناحیه، هم میانگین و هم واریانس برای این توزیع وجود دارد.

فرمول پولاچک—خین چین (P-K[۳]):

برای به دست آوردن مدت زمان انتظار در صف برای شخص تازه وارد، تعداد متقاضیان موجود در صف نیز مهم است، بنابراین این دو با هم در ارتباطند یعنی اگر امید ریاضی اندازه‌ی سیستم را L و امید ریاضی زمان انتظار در صف را W_q در نظر بگیریم، آنگاه با استفاده از فرمول لیتل یعنی

$$W_q = \frac{L}{\lambda} - \frac{۱}{\mu},$$

مقدار L به صورت زیر به دست می‌آید: (پیوست (۱.۴))

$$L_{P_K} = \rho + \frac{\rho^۲ + \lambda^۲\sigma_s^۲}{۲(۱-\rho)},$$

در نتیجه فرمول پولاچک—خین چین برای W_q بصورت زیر می‌باشد:

$$W_q = \frac{\rho^۲ + \lambda^۲\sigma_s^۲}{۲\lambda(۱-\rho)}, \qquad (۳.۱)$$

که $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ شدت ترافیک و $\sigma_s^۲$ واریانس توزیع زمان سرویس است. با داشتن این فرمول می‌توان روش شبیه سازی را با فرمول پولاچک—خین چین که یک نتیجه نظری است، با هم مقایسه کرده و از نتایج به دست آمده، می‌توان متوسط زمان انتظار در صف را یافت.

[۳] Pollaczek-khinchin