بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه ارومیه

لایه‌سازی روی منیفلدهای باناخ

نورمحمد اکوان پور

دانشکده‌ی علوم

گروه ریاضی

اسفند ۱۳۸۹

پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد

اساتید راهنما:

دکتر محمدعلی اسدی

پایان نامه آقای / خانم : نورمحمد اکوان پور به تاریخ ۸۹/۱۲/۱۴

شماره

مورد پذیرش هیات محترم داوران با رتبه عالی و نمره ۱۸ (به حروف هیجده)

قرار گرفت.

۱- استاد راهنما و رئیس هیئت داوران: دکتر محمد علی اسدی

- استاد مشاور:

- داور خارجی: دکتر علی سرباز جانفدا

- داور داخلی: دکتر رسول آقالاری

- نماینده تحصیلات تکمیلی: دکتر کریم اکبری

۸۹/۱۲/۱۴

تقدیم به

پدر

و

مادرم

امروز فهمیدم که دنیا سه روز است:

دیروز که گذشت

امروز که در آنیم

فردا که شاید نیاید.

به نام دانای مطلق

الان در سایت گروه ریاضی نشسته ام و این متن را می نویسم سه نفر از همکلاسیهای دوره لیسانسم خانم رحیمی، خانم چترآذر و خانم شایان هم اینجا هستند. هوا برفی است و تکه‌های پشت پنجره از برف پوشیده شده اند و منتظر استادم هستم که بیاید تا اجازه چاپ پایان نامه ام را بگیرم. در ذهن خود خاطرات دوره فوق لیسانسم و لیسانسم رو مرور می کنم و دورانی که تصمیم گرفتم که بجای شرکت در کنکور ادبیات در کنکور ریاضی شرکت کنم. خدا رو شکر میکویم که توفیق داد تا بتوانم این مقطع تحصیلی را نیز به پایان برسانم.

به رسم ادب و احترام از استاد راهنمایم جناب آقای دکتر اسدی که به حق شایسته نام ریاضیدان هستند بخاطر خواندن پایان نامه و رهنمودهای راهگشای ایشان تشکر میکنم.

از استادان عزیز جناب آقای دکتر آقالاری داور داخلی و جناب آقای دکتر جانفدا داور خارجی بخاطر قبول زحمت داوری پایان نامه و مطالعه دقیق آن و رهنمودهای ارزشمندشان سپاسگذارم.

از استادان عزیزم جناب آقای دکتر اسکویی، دکتر بهروش و دکتر استادباشی که به حق در حق اینجانب معلمی کردند نهایت تشکر و قدردانی میکنم. از اساتید عزیز و گرانقدر دوره لیسانسم جناب آقای دکتر امیر (احسان) ممتحن، دکتر مجتبی قیراطی، دکتر حمیدرضا رضایی و دکتر حسن آزادی که زحمات زیادی را برای اینجانب کشیدند سپاسگذاری میکنم.

از دانشجویانی که در این دوره و دوره لیسانس خاطرات خوبی را برای من آفریدند:

آقایان: سید امین ساداتی، حمیدرضا نعمتی، ابراهیم لایقی، مسعود بهرامی، حسن عامریان، علیرضا الفتی، کاوه موسی وند، حمید دهدارپور، هادی رهبانی، بابک نیک نژاد، منصور احمدی، سید صلاح رشیدی، آرمان عارفی، اسماعیل خلیفه، فخرالدین صالحیان، محرم بختیاری، ایوب مهربانی، اسماعیل عینعلی، علیرضا بدلی، علی اکبری، جواد لطیفی زاده، عبدالله گودرزوند، امیر ظریفی و...

خانمها: دکتر سمیرا هروی، شکرزاده، تیموری، رحیمی، منیری، چترآذر، شایان، سونی، مظفری زاده، سونی، کشتکار و شیرنژاد و...

و همه کسانی که از قلم افتادند نهایت قدردانی و سپاسگذاری را میکنم. در نهایت از خانواده ام که پیشرفت و تحصیلم بدون پشتوانه آنها ممکن نبود سپاسگذاری میکنم.

چکیده

فرض می‌کنیم f یک زیرغوطه‌وری شکافنده[1] بین منیفلدهای فرافشرده باناخ باشد. در این پایان‌نامه شرایط مختلفی را برای f بدست می‌آوریم که f یک کلاف تاری شود. ابتدا شرایطی را به واسطه بالابری مسیر ارائه می‌دهیم و به عنوان نتیجه چندین محک را برای کلاف تاری بودن f بدست می‌آوریم. برای مثال به شرط آن که f بسته یا سره باشد یا وقتی دامنه و برد آن منیفلدهای فینسلر باشند و در بعضی شرایط از جمله شرط انتگرال هادامرد[2] صدق کند، f یک کلاف تاری است.

[1] split submersion

[2] Hadamard integral condition

پیشگفتار

یکی از مسائل مهم در توپولوژی جبری مسئله بالابری مسیر است. در این پایان‌نامه با توجه به اینکه کلافهای تاری با فضای پایه فرافشرده لایه‌ساز هستند ما به مطالعه کلافهای تاری روی منیفلدهای باناخ فرافشرده[۳] می‌پردازیم. در یک قضیه کلاسیک ارسمان[۴] ثابت کرد که اگر M و N منیفلدهایی با بعد متناهی باشند و M فرافشرده و N همبند باشند، آنگاه هر زیرغوطه‌وری سره مانند $f : M \to N$ یک کلاف تاری است. کارهای دیگری نیز در بعد متناهی انجام شده است ولی تعداد افرادی که در منیفلدهای با بعد نامتناهی کار کرده‌اند از انگشتان دست تجاوز نمی‌کنند. برای اولین بار در سال ۱۹٦۷ ارل[۵] و الز[٦] قضیه ارسمان را برای زیرغوطه‌وری سره $f : M \to N$ با هسته‌های شکافنده برای منیفلدهای فینسلر مدل شده روی فضاهای باناخ و باشرط کامل بودن M گسترش دادند. در حقیقت ارل و الز نتیجه کلی‌تری بدست آوردند که در آن ساختار کلاف تاری به وجود یک وارون راست برای دیفرانسیل $df(.)$ وابسته است. اخیرا رابیر[۷] قضیه ارسمان را به این صورت گسترش داده است: اگر M و N منیفلدهای فینسلر مدل شده روی فضاهای باناخ باشند و M کامل و N همبند باشد و $f : M \to N$ یک زیرغوطه‌وری با هسته‌های بطور یکنواخت شکافته شدنی باشد آنگاه f یک کلاف تاری است. در این پایان‌نامه ما قضیه اصلی رابیر را به عنوان یک نتیجه از قضایای فصل آخر بدست خواهیم آورد. کارهایی که در این مقاله انجام شده مخصوصا در قضایای اصلی الهام گرفته از کارهای رابیر می‌باشند. همچنین پلاستوک[۸] شرایطی را برای $f : E \to F$، وقتی که f یک نگاشت بین فضاهای باناخ E و F باشد، پیدا کرده که f بطور سراسری هم‌ارز یک تصویر باشد البته وی روی فضاهای باناخ کارکرده است. حالت خاص آن وقتی است که f یک نگاشت غیرخطی

---

[۳] paracompact Banach manifolds

[۴] Ehresmann

[۵] Earle

[٦] Eells

[۷] Rabier

[۸] Plastock

فردهلم[۹] بین فضاهای باناخ باشد. وی در حالتی که $f : E \to F$ یک نگاشت بین فضاهای باناخ است با فرض اینکه f دارای خاصیت بالابری خط می‌باشد (یعنی اگر $l(t) = (1-t)y_0 + ty_1$ یک خط در فضای F باشد یک بالابری برای $l(.)$ مانند $p(.)$ موجود باشد بطوریکه $f \circ p(t) = l(t)$) و همچنین با فرض وارون راست داشتن $df(.)$ با استفاده از قاعده زنجیری یک معادله دیفرانسیل برای معادله $f \circ p(t) = l(t)$ تشکیل داد: $f'(p(t))p'(t) = y_1 - y_0$. پس با ترکیب دو طرف معادله با وارون راست $df(.)$ داریم:

$$p'(t) = s(p(t))(y_1 - y_0)$$
$$p(0) = x$$

و با حل آن موضعا بدیهی بودن f را نشان داده است. پلاستوک تکنیک حل معادله دیفرانسیل فوق را روش بالابری خط نامیده‌است. این تکنیک وجه مشترک همه کارهای انجام گرفته در گسترش قضیه ارسمان به بعد نامتناهی می‌باشد ولی این کارها تفاوت‌هایی در فرضها دارند در حقیقت مساله این است که نشان بدهیم برای هر $y \in N$ یک همسایگی باز مانند V_y از y موجود است بطوریکه $f : f^{-1}(V_y) \to V_y$ یک کلاف تاری بدیهی است . روش بالابری افقی [۱۰] که توسط ارل و الز به کار گرفته شده سبب شده تا آنها زیرغوطه‌وری را پوشا در نظر بگیرند ولی در این پایان‌نامه N را همبند گرفته و با تکنیکهای ساده توپولوژی عمومی و شرایطی که روی f می‌گذاریم پوشا بودن آن را نتیجه می‌گیریم و دیگر نیازی به بررسی پوشا بودن f نداریم. یکی از نقصهای کارهای ارل و الز این است که بررسی فرضهای آنها بسیار مشکل است. مثلا بررسی پوشا بودن یک زیرغوطه‌وری بدون فرض سره[۱۱] بودن آن کار ساده‌ای نیست.

رابیر یکی از کسانی است که روی مساله پوشا بودن یک زیرغوطه‌وری کار کرده است. ولی طیف وسیعی از زیرغوطه‌وری‌هایی که در ریاضیات با آنها کار کرده‌اند سره نیستند مثلا برای $A \in \ell(E,F)$ وقتی که E و F فضاهای باناخ باشند و A یک عملگر خطی کراندار و پوشا باشد تنها وقتی A سره است که $A \in Iso(E,F)$ و همچنین برگر[۱۲] و پلاستوک در مرجع [۲] نشان داده‌اند که هیچ زیرغوطه‌وری فردهلم ازکلاس C^{1-} با اندیس $p > 0$ که سره باشد وجود ندارد و این عدم وجود را رابیر به حالتی که f از کلاس C^1 و E و F با بعد متناهی باشند گسترش داده است. از طرف دیگر همانطور که دراین پایان‌نامه خواهیم دید در بعضی اوقات سره بودن هم‌ارز همسانریختی بودن نگاشت

[۹] Freholm
[۱۰] Horizontal lift precedure
[۱۱] prpper
[۱۲] Berger

f می‌شود، برای مثال پلاستوک در مرجع [۱۵] (قضیه ۲.۲) نشان داده است که هر نگاشت سره بین فضاهای باناخ یک همسانریختی است اگر وفقط اگر به طور موضعی همسانریختی و سره باشد. خلاصه اینکه فرض سره بودن در بسیاری از موارد مهم شرطی بسیار محدود کننده است. در این پایان‌نامه می‌خواهیم شرایطی روی زیرغوطه‌وری f بگذاریم تا یک کلاف تاری شود و یک ارتباط مستقیم بین کلاف تاری و خاصیت‌های بالابری-مسیر مناسب برقرار کنیم. محتوای این پایان‌نامه به شرح زیر است:

در فصل (۱) مفاهیم مقدماتی از فضاهای باناخ، منیفلدهای باناخ، توپولوژی عمومی و توپولوژی جبری را شرح می‌دهیم. در فصل (۲) فرض می‌کنیم $f : M \to N$ یک زیرغوطه‌وری شکافنده بین منیفلدهای باناخ فرافشرده باشد و همچنین N همبند باشد. همچنین توابع از کلاس C^{k-} را نیز در همین بخش معرفی می‌کنیم. در این فصل منیفلدها لزوما دارای ساختار فینسلر نیستند. خاصیت ادامه تحلیلی[۱۳] را برای f تعریف می‌کنیم و ثابت می‌کنیم که خاصیت ادامه تحلیلی داشتن f، کلاف تاری بودن f را ایجاب می‌کند. سپس تعدادی نتیجه از این قضیه را در این فصل می‌آوریم. بویژه ثابت می‌کنیم که f به‌شرطیکه یک نگاشت سره یا بسته باشد، یک کلاف تاری است.

در فصل سوم فرض می‌کنیم که M و N دارای ساختار فینسلر هم باشند و M کامل باشد و خاصیت بالابری مسیر کراندار را برای f معرفی می‌کنیم و ثابت می‌کنیم که این یک شرط کافی برای کلاف تاری بودن f می‌باشد. سپس مواردی از زیرغوطه‌وری‌ها که دارای خاصیت بالابری مسیر کراندار هستند را بررسی می‌کنیم. برای مثال وقتی که f در شرط انتگرال هادامرد[۱۴] صدق کند و M و N منیفلدهای همبند هستند. این شرط انتگرال اولین بار توسط هادامرد در مرجع [۸] برای مسائل وارون سراسری از توابع مورد استفاده قرار گرفت و همچنین بطور گسترده در مقالات مختلف از آن استفاده شده است (مراجع [۷]،[۱۳]،[۱۴]،[۱۵] را ببینید).

همچنین در این بخش حالتی که f به طور موضعی یکسانریختی باشد را بررسی کرده‌ایم و شرایطی را تعیین کرده‌ایم که f یک تصویر پوششی یا یک یکسانریختی باشد.

در بخش چهارم با زیرغوطه‌وری‌های با هسته‌های به طور یکنواخت شکافته‌شدنی که اولین بار توسط رابیر در مرجع [۱٦] معرفی شده‌اند کار می‌کنیم و یک شرط بالابری مسیر مخصوص این مورد را معرفی می‌کنیم که به ما اجازه می‌دهد تا از نتایج بدست آمده از بخش‌های قبل استفاده بکنیم. این پایان‌نامه بر اساس مقاله زیر نوشته شده است:

O. Gutu and J.A. Jaramillo, *Fibration on Banach manifolds*, Pacific Journal of mathematics, vol. 215, No. 2, 313-329, 2004.

---

[۱۳] continuation property

[۱۴] Hadamard

فهرست مندرجات

۱ تعاریف و قضایای مقدماتی ۱

۱.۱ فضاهای باناخ و منیفلدهای باناخ ۱

۲.۱ توپولوژی عمومی ۹

۳.۱ میدان‌های برداری و معادلات دیفرانسیل ۱۷

۲ کلافهای تاری از طریق خاصیت ادامه تحلیلی ۲۳

۱.۲ توابع از کلاس C^k- ۲۳

۲.۲ تعاریف و قضایای اصلی ۲۶

۳ خاصیت بالابری — مسیر کراندار ۴۷

۱.۳ منیفلدهای فینسلر ۴۷

۲.۳ تعاریف و قضایای اصلی ۴۹

۴ زیرغوطه‌وری‌های با هسته‌های بطور یکنواخت شکافته شدنی ۶۴

۱.۴ مفاهیم مقدماتی ۶۴

۲.۴ قضایای اصلی ۶۷

مراجع ۸۲

چکیده‌ی انگلیسی ۸۵

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

۱.۱ فضاهای باناخ و منیفلدهای باناخ

تعریف ۱.۱.۱ یک فضای برداری V روی میدان K مجموعه‌ای است با دو عمل جمع و ضرب اسکالر که در هشت خاصیت زیر صدق می‌کند. برای $u, v, w \in V$، $c, d \in K$ و عنصر همانی $1 \in K$:

i) $u + v = v + u$؛

ii) $(u + v) + w = u + (v + w)$؛

iii) یک بردار صفر در V موجود است بطوریکه برای هر $v \in V$، $v + 0 = v$؛

iv) برای هر $v \in V$ یک وارون $(-v)$ نسبت به عمل جمع موجود است بطوریکه $v + (-v) = 0$؛

v) $c(u + v) = cu + cv$؛

vi) $(c + d)u = cu + cv$؛

vii) $cd(u) = c(du)$؛

viii) $1u = u$.

تعریف ۲.۱.۱ یک متر روی مجموعه دلخواه X تابعی است از $X \times X$ به توی اعداد حقیقی مثبت $d : X \times X \to \mathbb{R}^+ \bigcup\{0\}$ ، $(x, x') \mapsto d(x, x')$ ، بطوریکه برای $x_1, x_2, x_3 \in X$ داشته باشیم:

i) $d(x_1, x_2) = 0$ اگر فقط اگر $x_1 = x_2$.

ii) $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$.

iii) $d(x_1, x_2) \leq d(x_1, x_3) + d(x_3, x_2)$.

زوج (X, d) را یک فضای متریک می‌گوییم. همچنین هرگاه E یک فضای برداری دلخواه باشد زوج (E, d) را فضای برداری متریک می‌گوییم.

تعریف ۳.۱.۱ یک نرم[1] روی فضای برداری حقیقی[2] (مختلط) E تابعی است از E به توی اعداد حقیقی $\|.\| : E \to R$ ، $e \mapsto \|e\|$ ، بطوریکه:

i) برای هر $e \in E$ ، $\|e\| \geq 0$ و $\|e\| = 0$ اگروفقط‌اگر $e = 0$.

ii) به ازای هر $\lambda \in R$ و $e \in E$ ، $\|\lambda e\| = |\lambda| \, \|e\|$.

iii) برای همه $e_1, e_2 \in E$ ، $\|e_1 + e_2\| \leq \|e_1\| + \|e_2\|$.

زوج $(E, \|.\|)$ را فضای برداری نرمدار[3] می‌گوییم.

تعریف ۴.۱.۱ یک دنباله[4] در فضای E، تابعی است از اعداد طبیعی به توی E.

---

[1] norm
[2] real vector space
[3] normed vector space
[4] sequence

تعریف ۵.۱.۱ دنباله $\{e_n\}$ را در فضای متریک E کوشی می‌گوییم، هرگاه به ازای هر $\epsilon > 0$ یک $N_\circ \in N$ موجود باشد بطوریکه هرگاه $m, n \geq N_\circ$ داشته باشیم $d(e_n, e_m) \leq \epsilon$.

تعریف ۶.۱.۱ فضای متریک E را کامل[۵] می‌گوییم هرگاه هر دنباله کوشی در E همگرا باشد.

تعریف ۷.۱.۱ یک ضرب داخلی روی فضای برداری E تابعی است مانند:

$\langle e_1, e_2 \rangle \mapsto (e_1, e_2) \quad \langle .,. \rangle : E \times E :\to \mathbb{R},$ بطوریکه به ازای هر $e_1, e_2, e_3 \in E$:

i) $\langle e_1, e_2 + e_3 \rangle = \langle e_1, e_2 \rangle + \langle e_1, e_3 \rangle$.

ii) $(\forall \alpha \in \mathbb{R}) \quad \langle e_1, \alpha e_2 \rangle = \alpha \langle e_1, e_2 \rangle$.

iii) $\langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_2, e_1 \rangle$.

iv) $\langle e_1, e_1 \rangle \geq 0$ و $\langle e_1, e_1 \rangle = 0$ اگروفقطاگر $e_1 = 0$.

تعریف ۸.۱.۱ مجموعه $B_k(e) \subset E$ را برای $e \in E$ و $k \in \mathbb{R}$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$B_k(e) = \{e' \in E \mid d(e, e') < k\},$$

و به آن همسایگی e به شعاع k می‌گوییم.

تعریف ۹.۱.۱ فضای برداری H را همراه با یک ضرب داخلی، فضای هیلبرت[۶] می‌گوییم هرگاه فضا با متر القایی از ضرب داخلی کامل باشد.

[۵] perfect

[۶] Hilbert space

تعریف ۱۰.۱.۱ فضای نرمدار$(E, \|e\|)$ را فضای باناخ [۷] گوییم، هرگاه فضا با متر القایی از نرم $\|.\|$ یک فضای کامل باشد.

مثال ۱۱.۱.۱ فضای $\mathbb{R}^n$ با ضرب داخلی استاندارد

$\langle (x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$ یک فضای هیلبرت است و در نتیجه یک فضای باناخ نیز می‌باشد.

مثال ۱۲.۱.۱ اعداد گویا $Q \subset \mathbb{R}$ با ضرب داخلی استاندارد یک فضای برداری روی میدان Q است که کامل نیست و در نتیجه یک فضای هیلبرت نمی‌باشد.

گزاره ۱۳.۱.۱ فرض می‌کنیم E یک فضای برداری حقیقی (مختلط) با بعد متناهی باشد، آنگاه:

i) یک نرم روی E وجود دارد.

ii) همه نرم‌های روی E هم‌ارزند یعنی اینکه توپولوژی القا شده توسط آنها روی E یکسان است.

iii) همه نرم‌ها روی E کامل هستند.

برهان : به گزاره ۲.۱.۱۰ از مرجع [۱] مراجعه شود.■

مثال ۱۴.۱.۱ فرض می‌کنیم X یک مجموعه و F یک فضای برداری نرمدار باشد، تعریف می‌کنیم:

$$B(X,F) = \{f : X \to F \mid sup_{x \in X} \|f(x)\| < \infty\},$$

[۷] Banach space

حال تعریف می‌کنیم:

$$\|f\|_\infty = sup_{x\in X}\|f(x)\|,$$

این نرم را نرم سوپریمم می‌نامیم و $B(X,F)$ با نرم سوپریمم یک فضای برداری نرمدار می‌باشد.

تعریف ۱۵.۱.۱ زیرفضای بسته F از فضای باناخ را شکافته[8] شده گوییم، هرگاه یک زیرفضای بسته چون $G \subset E$ موجود باشد بطوریکه $E = F \bigoplus G$.

تعریف ۱۶.۱.۱ تابع T از فضای برداری E به فضای برداری F را یک عملگر خطی[9] می‌گوییم، هرگاه به ازای هر اسکالر λ و بردارهای $e_1, e_2 \in E$ داشته باشیم $T(\lambda e_1 + e_2) = \lambda T(e_1) + T(e_2)$.

تعریف ۱۷.۱.۱ فرض می‌کنیم E و F فضاهای برداری باشند و $T : E \to F$ یک عملگر خطی باشد اگر T یک به یک و پوشا باشد و T و T^{-1} پیوسته باشند می‌گوییم T یک ایزومورفیسم[10] است.

تعریف ۱۸.۱.۱ فرض می‌کنیم X و Y فضاهای متریک باشند تابع $f : X \to Y$ را یک ایزومتری[11] می‌گوییم هرگاه برای هر $x, x' \in X$ داشته باشیم $d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x')$.

در این پایان‌نامه منظور از ایزومتری یک ایزومورفیسم است که ایزومتری هم باشد.

[8] split
[9] linear operator
[10] isomorphism
[11] isometry

تعریف ۱۹.۱.۱ فرض می‌کنیم E و F فضاهای نرمدار باشند و $A : E \to F$ یک تابع خطی پیوسته باشد تعریف می‌کنیم:

$$\|A\| = sup\{\frac{\|Ae\|}{\|e\|} \mid e \in E, e \neq 0\}.$$

تعریف ۲۰.۱.۱ فضای تمام توابع خطی پیوسته از E به F را با $\ell(E,F)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۲۱.۱.۱ فرض می‌کنیم $T \in \ell(E,F)$ و $T' \in \ell(F,G)$، آنگاه:

$$\|(T' \circ T)\| \leq \|T'\|\|T\|.$$

برهان : به صفحه ۵۱ از مرجع [۱] مراجعه شود.■

مثال ۲۲.۱.۱ اگر $E = F = G = \mathbb{R}^2$ و $T(x,y) = (x,0)$ و $T'(x,y) = (0,y)$ آنگاه $T' \circ T = 0$ و $\|T'\| = \|T\| = 1$، پس در قضیه فوق نامساوی اکید هم اتفاق می‌افتد.

تعریف ۲۳.۱.۱ فرض می‌کنیم E و F فضاهای برداری باناخ باشند و $T : E \to F$ یک عملگر خطی باشد. مجموعه $kerT = \{e \in E \mid T(e) = 0\}$ را هسته[۱۲] T وهمچنین مجموعه $img(T) = \{T(e) \mid e \in E\}$ را برد[۱۳] T می‌نامیم.

تعریف ۲۴.۱.۱ فرض می‌کنیم E و F فضاهای برداری باناخ باشند و $T : E \to F$ یک عملگر خطی باشد. می‌گوییم T یک عملگر فردهلم[۱۴] است اگر $dim(kerT)$ و

[۱۲] kernel
[۱۳] Image
[۱۴] Fredholm

$dim\ coker(T) = dim(\frac{F}{img(T)})$ هردو متناهی باشند و $i(T) = dim(kerT) - dim(\frac{F}{img(T)})$ را اندیس[۱۵] T می‌نامیم.

گزاره ۲۵.۱.۱ هرگاه F یک فضای باناخ باشد آنگاه $\ell(E,F)$ با نرم عملگرها یک فضای باناخ است.

برهان : به گزاره ۲.۲.۴ از مرجع [۱] مراجعه شود.■

تعریف ۲۶.۱.۱ هرگاه $F = R$،آنگاه $\ell(E,R)$ رافضای دوگان E می‌نامیم و آن را با E^* نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۷.۱.۱ فرض می‌کنیم E و F فضاهای برداری نرمدار باشند ، U یک زیرمجموعه باز از E باشد و $f : U \subset E \to F$ یک نگاشت دلخواه باشد. فرض می‌کنیم $u_\circ \in U$ ، گوییم f در $u_\circ$ مشتق‌پذیر[۱۶] است، هرگاه نگاشت کراندار خطی چون $Df(u_\circ) : E \to F$ موجود باشد بطوریکه به ازای هر $\epsilon \geq \circ$ ، یک $\delta > \circ$ موجود باشد بطوریکه هر گاه $\circ < \|u - u_o\| \leq \delta$ داشته باشیم:

$$\frac{\|f(u) - f(u_\circ) - Df(u_\circ).(u - u_\circ)\|}{\|u - u_\circ\|} \leq \epsilon.$$

تعریف فوق به صورت زیر نیز نوشته می‌شود:

$$\lim_{u \to u_\circ} \frac{f(u) - f(u_\circ) - Df(u_\circ).(u - u_\circ)}{\|u - u_\circ\|} = \circ$$

اگر f در هر نقطه $u_\circ \in U \subset E$ مشتق‌پذیر باشد، نگاشت

$$D(f) : U \to \ell(E,F), u \to Df(u)$$

[۱۵] Index

[۱۶] differentioable