دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش آنالیز

عنوان

توابع همساز ستاره‌گون

استاد راهنما

دکتر احمد زیره

استاد مشاور

سید رضا موسوی

پژوهشگر

جمال الدین یارعلی

۱۳۹۲/۶/۲۵

نام خانوادگی دانشجو: یارعلی نام: جمال الدین

عنوان: توابع همساز ستاره‌گون

استاد راهنما: دکتر احمد زیره

استاد مشاور: سید رضا موسوی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: آنالیز

دانشگاه: دانشگاه صنعتی شاهرود دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۲/۶/۲۵ تعداد صفحات: ۵۸

واژگان کلیدی: همساز، توابع ستاره‌گون ، توابع محدب

چکیده

توابع همساز مختلط مقدار که در دیسک واحد Δ تک‌ارز و حافظ جهت هستند را می‌توان به صورت $f = h + \bar{g}$ نوشت که h و g در Δ تحلیلی هستند. در این پایان نامه به بررسی شرایط تک‌ارزی و شرایط ضرایب توابع همساز ستاره‌گون می‌پردازیم. همچنین نشان می‌دهیم که این شرایط ضزیبی در صورتی که ضرایب h منفی و ضرایب g مثبت باشند نیز الزامی هستند. سپس به بررسی نقاط فرین و کران‌های ضرایب این توابع خواهیم پرداخت.

تقدیم به همه ی کسانی که

می خواهند بیشتر بدانند

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر احمد زیره، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای سید رضا موسوی که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن این جانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از برادران عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

جمال الدین یارعلی
۱۳۹۲/۶/۲۵

فهرست مطالب

فصل ۱
تعاریف مقدماتی

۱.۱ نمادگذاری و تعاریف

در این پایان نامه از نمادهای زیر استفاده می‌شود.

$\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی

$\mathbb{C}$ مجموعه اعداد مختلط

تعریف ۱.۱.۱. یک چند جمله ای مجموعی از جملات است که هر جمله به صورت ax^n می‌باشد. به طوری که a ضریب، n توان و x یک متغیر است و همچنین یک چند جمله ای با ضرایب مختلط، چند جمله ای مختلط نام دارد. بیشترین توان یک چند جمله ای مرتبه‌ی آن نام دارد.

تعریف ۲.۱.۱. هر گاه X و Y دو مجموعه باشند، یک تابع از مجموعه X به مجموعه Y را می‌توان قاعده‌ای تعریف کرد که به هر عضو مجموعه X چون x یک و فقط یک عضو از مجموعه Y چون $f(x)$ را نسبت می‌دهد، تابع f از X به Y را با $f : X \to Y$ نشان می‌دهیم.

دامنه تابع f که با $dom\ f$ نمایش داده می‌شود همان مجموعه X است. برد تابع f نیز مجموعه همه عناصری از Y است که تصویر عضوی از X تحت f باشند. برد تابع f را با $ran\ f$ یا $Im\ f$ نشان می‌دهیم:

$$ran\ f = \{y \in Y : \exists x(x \in X \wedge y = f(x)\}$$

تعریف ۳.۱.۱. تابع f را در $z_\circ$ تحلیلی گوییم هرگاه در یک همسایگی $z_\circ$ مشتق پذیر باشد.

تعریف ۴.۱.۱. هر مجموعه باز و همبند در $\mathbb{C}$، یک میدان نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۱.۱ (لم شوارتز). فرض کنیم $f(z)$ تابعی در دیسک $U_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ باشد و برای ثابت M، رابطه $|f(z)| < M$ برقرار باشد. اگر $z = ۰$ صفر مرتبه m تابع $f(z)$ باشد، در این صورت:

$$|f(z)| \leq \frac{M}{R^m}|z|^m \qquad (z \in U_R).$$

همچنین در رابطه فوق، تساوی زمانی برقرار می‌شود که

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{M}{R^m}z^m$$

که در آن θ مقداری ثابت است.

تعریف ۶.۱.۱. تابع حقیقی مقدار و پیوسته $U(x,y)$ را که در میدان $\mathbb{D}$ تعریف شده است در $\mathbb{D}$ همساز گویند هر گاه دارای مشتقات نسبی مراتب اول و دوم پیوسته بوده و این مشتقات در تمام $\mathbb{D}$ در معادله زیر صادق باشند.

$$\frac{\partial^۲ U}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ U}{\partial y^۲} = ۰$$

این معادله به معادله لاپلاس مشهور است. با به کار بردن این قضیه که هر تابع تحلیلی در یک میدان، در همه نقاط آن میدان دارای مشتق از تمام مراتب می‌باشد، می‌بینیم که هر دو قسمت حقیقی و موهومی یک تابع تحلیلی توابع همسازند. اگر $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ تحلیلی باشد، آنگاه v مزدوج همسازی از u نام دارد.

ملاحظه ۷.۱.۱. *این خاصیت پادتقارنی زیر را داریم که v مزدوج همساز u است اگر و تنها اگر u مزدوج همساز $-v$ باشد. اثبات این مطلب از توجه به این امر نتیجه می‌شود که هر جا f تحلیلی باشد، $if = i(u+iv) = -v + iu$ نیز تحلیلی است.*

معادله لاپلاس شرط لازمی را بیان می‌کند که تابعی قسمت حقیقی (یا موهومی) یک تابع تحلیلی باشد.

قضیه ۸.۱.۱ (نگاشت ریمان). *فرض کنیم D میدان همبند ساده‌ای به غیر از تمام صفحه و $z_۰$ نقطه‌ای در این میدان باشد. در این صورت تابع منحصر به فرد و تک‌ارز $f(z)$ موجود است که D را بر قرص $|z| < ۱$ می‌نگارد و $f(z_۰) = ۰$ و $f'(z_۰) > ۰$ است.* [۱۲، قضیه ۱۱.۱۳]

۲.۱ رده $\mathbb{S}$

توابعی که هم تحلیلی و هم تک‌ارز(یک به یک) هستند، واجد شرایط جالبی هستند که میدان‌های همبند ساده را بر میدان‌های همبند ساده می‌نگارند. به موجب قضیه نگاشت ریمان، هر تابع تک‌ارز،

که در میدان همبند ساده(به غیر از تمامی صفحه) تعریف شده باشد را می‌توان با تابعی که در قرص واحد تعریف شده است متناظر کرد. بنابراین خود را به توابعی که بر قرص $|z| < ۱$ تعریف شده‌اند محدود می‌کنیم. و اگر چنانچه فرض کنیم تابع در مبدا صفر است (که تنها صفر تابع نیز خواهد بود) و در مبدا مشتق مخالف صفر دارد، در این صورت نتایج حاصله از شکل زیباتری برخوردار خواهند بود. زیرا مشتق تابع تک‌ارز هرگز صفر نیست، هر تابع تک‌ارز $f(z)$ را می‌توان به $[f(z) - f(۰)]/f'(۰)$، که تابعی است از شکل مذکور، تحویل کرد. رده توابعی که در محدودیت‌های مذکور صادقند با یک حرف مشخص می‌شوند.

تعریف ۱.۲.۱. رده همه توابع $f(z)$ را که در قرص واحد $|z| < ۱$ تحلیلی و تک‌ارز بوده و با شرایط $f(۰) = ۰$ و $f'(۰) = ۱$ نرمالیزه گردیده‌اند با $\mathbb{S}$ نمایش می‌دهیم. پس تابع $f(z)$ در $\mathbb{S}$ دارای نمایش توانی زیر است:

$$f(z) = z + a_۲ z^۲ + a_۳ z^۳ + \cdots \qquad (|z| < ۱).$$

لم ۲.۲.۱. *اگر* $f(z) \in \mathbb{S}$ *باشد، آنگاه* $g(z) = z\sqrt{\frac{f(z^۲)}{z^۲}} \in \mathbb{S}$.

ملاحظه ۳.۲.۱. *به جای* $\sqrt{f(z^۲)}$ *، می‌نویسیم* $z\sqrt{\frac{f(z^۲)}{z^۲}}$. *زیرا* $f(z^۲)$ *صفری در مبدا دارد که* $\sqrt{f(z^۲)} = e^{(\frac{۱}{۲}) log\, f(z^۲)}$ *را بی معنی می‌کند.*

برهان. فرض کنید $f(z) = z + a_۲ z^۲ + \cdots$ لذا داریم:

$$g(z) = z\sqrt{\frac{f(z^۲)}{z^۲}} = z\sqrt{۱ + a_۲ z^۲ + a_۳ z^۴ + \cdots} \qquad (۱.۱)$$

(شاخه اصلی $\surd$ را در نظر می‌گیریم)، تابع $g(z)$ بر دیسک واحد تحلیلی می‌باشد و $g(۰) = ۰$ و $g'(۰) = ۱$ است. برای اثبات تک ارزی، اگر $g(z_۱) = g(z_۲)$ آنگاه $z_۱\sqrt{\frac{f(z_۱^۲)}{z_۱^۲}} = z_۲\sqrt{\frac{f(z_۲^۲)}{z_۲^۲}}$ در این صورت $f(z_۱^۲) = f(z_۲^۲)$ و چون f یک به یک می‌باشد، داریم $z_۲^۲ = z_۱^۲$، یعنی $z_۱ = z_۲$ یا $z_۱ = -z_۲$. از (۱.۱) ملاحظه می‌شود که $g(z)$ تابع فرد است لذا $z_۱ = -z_۲$ تساوی $g(z_۱) = -g(z_۲)$ را نتیجه می‌دهد که با فرض در تناقض است. پس $z_۱ = z_۲$ و تک ارزی $g(z)$ اثبات می‌شود. $\square$

قضیه ۴.۲.۱. *اگر* $g(z) = z\sqrt{\frac{f(z^۲)}{z^۲}} \in \mathbb{S}$ *باشد، آنگاه* $|a_۲| \leq ۲$. [۱۲، قضیه ۱۲.۳]

مثال ۵.۲.۱ (تابع کوئب). در قضیه ۴.۲.۱، اگر $a_۲ = ۲e^{i\alpha}$ و α حقیقی باشد آنگاه $g(z) = \frac{z}{(۱-e^{i\alpha}z)^۲} = z\sqrt{\frac{f(z^۲)}{z^۲}}$. لذا

$$f(z) = \frac{z}{(۱ - e^{i\alpha}z)^۲} = z + ۲e^{i\alpha}z^۲ + ۳e^{۲i\alpha}z^۳ + \cdots$$

با قرار دادن $\alpha = \circ$ به تابع زیر می‌رسیم:

$$k(z) = \frac{z}{(۱-z)^۲} = \frac{۱}{۴}(\frac{۱+z}{۱-z})^۲ - \frac{۱}{۴}$$

که به تابع کوئب معروف است. این تابع قرص $|z| < ۱$ را بر صفحه ای که در امتداد محور حقیقی منفی از $-\frac{۱}{۴}$ تا ∞ بریده شده است، می‌نگارد.

قضیه ۶.۲.۱ (پوشش). *اگر* $f(z) \in \mathbb{S}$ *و برای* $|z| < ۱$، $f(z) \neq c$ *که* $c \in \mathbb{C}$، *آنگاه* $|c| \geq \frac{۱}{۴}$.

برهان. می‌دانیم $f(z) = z + a_۲z^۲ + \cdots$. چون $f(z) \neq c$ پس تابع $g(z) = \frac{cf(z)}{c-f(z)}$ نیز متعلق به $\mathbb{S}$ می‌باشد.

$$\frac{cf(z)}{c-f(z)} = z + (a_۲ + \frac{۱}{c})z^۲ + \cdots$$

بنا بر قضیه ۴.۲.۱ داریم $|a_۲ + \frac{۱}{c}| \leq ۲$. از طرفی:

$$|\frac{۱}{c}| - |a_۲| \leq |a_۲ + \frac{۱}{c}| \leq ۲ \Longrightarrow |\frac{۱}{c}| \leq ۲ + |a_۲|$$

و چون $f(z) \in \mathbb{S}$، پس $|a_۲| \leq ۲$ است. لذا داریم:

$$|\frac{۱}{c}| \leq ۴ \Longrightarrow |c| \geq \frac{۱}{۴}$$

□

لم ۷.۲.۱. *اگر* $f(z) \in \mathbb{S}$ *و* $z = re^{i\theta}$ *باشد، آنگاه :*

$$Re\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\} = r\frac{\partial}{\partial r}log|f'(z)|.$$

برهان. چون $|z| < ۱$، $f'(z) \neq \circ$ پس می‌توان شاخه‌ای از $logf'(z)$ را برای $|z| < ۱$ در نظر گرفت. حال برای $f(z) = f(re^{i\theta})$ داریم $f'(z) = f'(re^{i\theta})$ لذا :

$$\frac{\partial}{\partial r}log\ f'(re^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta}f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}$$

با ضرب طرفین رابطه فوق در r داریم :

$$r\frac{\partial}{\partial r}log\ f'(re^{i\theta}) = \frac{re^{i\theta}f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} = \frac{zf''(z)}{f'(z)}$$

با محاسبه‌ی قسمت‌های حقیقی داریم:

$$r\frac{\partial}{\partial r}log\ |f'(re^{i\theta})| = Re\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\}.$$

□

قضیه ۸.۲.۱. *اگر* $f(z) \in \mathbb{S}$ *باشد، آنگاه*

$$\frac{۱-r}{(۱+r)^۳} \leq |f'(z)| \leq \frac{۱+r}{(۱-r)^۳} \qquad (|z| = r < ۱).$$

برهان. می‌دانیم تابع $w=\frac{z+z_\circ}{1+\overline{z_\circ}z}$ $(|z_\circ|<1)$ تحلیلی، یک به یک و پوشاست و قرص واحد را بر خودش می‌نگارد. لذا تابع $g(z)=f(\frac{z+z_\circ}{1+\overline{z_\circ}z})=b_\circ+b_1z+b_2z^2$ نیز به ازای $(|z|<1)$ تحلیلی و تک‌ارز است، داریم:

$$g(\circ)=b_\circ=f(z_\circ)\quad b_1=g'(\circ)=f'(z_\circ)(1-|z_\circ|^2)$$
$$b_2=\frac{g''(\circ)}{2}=\frac{1}{2}\big(f''(z_\circ)(1-|z_\circ|^2)^2-2f'(z_\circ)\overline{z_\circ}(1-|z_\circ|^2)\big)$$

چون $g(z)$ نرمالیزه نمی‌باشد پس متعلق به $\mathbb{S}$ نیست. با توجه به این که تابع $\frac{g(z)-g(\circ)}{g'(\circ)}=z+\frac{b_2}{b_1}z^2+\cdots$ در $\mathbb{S}$ قرار می‌گیرد، لذا بنا بر قضیه ۴.۲.۱ ، $|\frac{b_2}{b_1}|\leq 2$ یعنی :

$$\frac{1}{2}\Big|\frac{f''(z_\circ)}{f'(z_\circ)}(1-|z_\circ|^2)-2\overline{z_\circ}\Big|\leq 2$$

با قرار دادن $z_\circ=re^{i\theta}$ و ضرب طرفین در $\frac{2|z_\circ|}{1-|z_\circ|^2}$ داریم :

$$|\frac{z_\circ f''(z_\circ)}{f'(z_\circ)}-\frac{2|z_\circ|^2}{1-|z_\circ|^2}|\leq\frac{4|z_\circ|}{1-|z_\circ|^2}$$

حال چون $z_\circ$ دلخواه است، قرار می‌دهیم :

$$|\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\frac{2r^2}{1-r^2}|\leq\frac{4r}{1-r^2}$$

یعنی $\frac{zf''(z)}{f'(z)}$ در دایره‌ای به شعاع $\frac{4r}{1-r^2}$ و به مرکز $\frac{2r^2}{1-r^2}$ واقع است. لذا :

$$\frac{2r^2-4r}{1-r^2}\leq Re\frac{zf''(z)}{f'(z)}\leq\frac{2r^2+4r}{1-r^2}$$

بنا بر لم ۷.۲.۱ می‌دانیم $Re\frac{zf''(z)}{f'(z)}=r\frac{\partial}{\partial r}log|f'(z)|$. یعنی :

$$\frac{2r^2-4r}{1-r^2}\leq r\frac{\partial}{\partial r}log|f'(z)|\leq\frac{2r^2+4r}{1-r^2}$$
$$\Longrightarrow\frac{2r-4}{1-r^2}\leq\frac{\partial}{\partial r}log|f'(z)|\leq\frac{2r+4}{1-r^2}$$

حال از طرفین نامساوی از $\circ$ تا r انتگرال می‌گیریم :

$$log(1-r)-3log(1+r)\leq log|f'(z)|\leq log(1+r)-3log(1-r)$$

و لذا داریم

$$log\frac{1-r}{(1+r)^3}\leq log|f'(z)|\leq log\frac{1+r}{(1-r)^3}$$

در نتیجه:

$$\frac{1-r}{(1+r)^3}\leq|f'(z)|\leq\frac{1+r}{(1-r)^3}\qquad(|z|=r<1).$$

□

مثال ۹.۲.۱. مشتق تابع کوئب $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + \cdots$ برابر است با $k'(z) = \frac{1+z}{(1-z)^3}$، لذا کران بالای قضیه ۸.۲.۱ در مورد این تابع در $z = r$ و کران پایین در $z = -r$ تعیین می‌شود.

قضیه ۱۰.۲.۱. *اگر $f(z) \in \mathbb{S}$ باشد، آنگاه :*

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}, \qquad (|z| = r < 1).$$

برهان. بنا بر قضیه ۸.۲.۱ برای $|z| = r < 1$ داریم $|f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}$. نقطه 0 را با یک خط مستقیم به z وصل کرده و روی این پاره خط انتگرال می‌گیریم:

$$|f(z)| \leq \int_0^r |f'(t)|dt \leq \int_0^r \frac{1+t}{(1-t)^3}dt = \frac{r}{(1-r)^2}$$

نا مساوی $\frac{1}{4} \leq \frac{r}{(1+r)^2}$ همواره برقرار است. حال اگر $|f(z) \geq \frac{1}{4}$ باشد، آنگاه $|f(z)| \leq \frac{r}{(1+r)^2}$ و اگر $|f(z)| < \frac{1}{4}$ باشد، بنا بر قضیه ۶.۲.۱ مسیر c داخل دایره یکه از 0 تا z موجود است که تصویر آن پاره خط مستقیم c_0 از 0 تا $f(z)$ را می‌پوشاند. در این صورت:

$$|f(z)| = \int_{c_0} |dw| = \int_c |f'(s)||ds|$$

از طرفی بنا بر قضیه ۸.۲.۱ :

$$|f(z)| = \int_c |f'(s)||ds| \geq \int_c |f'(s)|d|s| \geq \frac{1-t}{(1+t)^3}dt = \frac{r}{(1+r)^2}$$

لذا داریم:

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}.$$

□

مثال ۱۱.۲.۱. برای تابع کوئب $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + \cdots$، کران بالای قضیه ۱۰.۲.۱ در $z = r$ و کران پایین در $z = -r$ تعیین می‌شود.

قضیه ۱۲.۲.۱ **(Littlewood).** *اگر $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در $\mathbb{S}$ باشد آنگاه برای هر n،* $|a_n| \leq en$. [۱۲، قضیه ۱۲.۷]

قضیه ۱۳.۲.۱. *اگر تابع $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در رده $\mathbb{S}$ باشد و ضرایب حقیقی داشته باشد، آنگاه برای هر n داریم $|a_n| \leq n$.*

برهان. برای $r < 1$، $z = re^{i\theta}$ قرار می‌دهیم:

$$Im\ f(z) = v(re^{i\theta}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k \sin k\theta$$

با ضرب طرفین رابطه فوق در $\sin\ n\theta$ و انتگرال یابی از ۰ تا π داریم:

$$\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi} v(re^{i\theta})\sin n\theta d\theta = \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi} a_n r^n \sin^{۲} n\theta d\theta \qquad (۲.۱)$$

با توجه به رابطه‌ی

$$|\sin(n+۱)\theta| = |\sin n\theta\ \cos\theta + \cos n\theta\ \sin\theta| \leq |\sin n\theta| + |\sin\theta|$$

و به روش استقرایی می‌توان نشان داد که $|\sin n\theta| \leq n|\sin\theta|$ لذا از رابطه (۲.۱) نتیجه می‌شود که :

$$|a_n r^n| \leq \frac{۲n}{\pi}\int_{۰}^{\pi} |v(re^{i\theta})|\sin\theta d\theta \qquad (۳.۱)$$

حال نشان می‌دهیم $v(re^{i\theta}) \neq ۰$، که در آن $۰ < r < ۱, ۰ < \theta < \pi$:

$$۰ \neq f(re^{i\theta}) - f(re^{-i\theta}) = \sum_{n=۱}^{\infty} a_n r^n(e^{in\theta} - e^{-in\theta}) = ۲i\sum_{n=۱}^{\infty} a_n r^n \sin n\theta = ۲iv(re^{i\theta})$$

چون $v(re^{i\theta})$ نسبت به θ تابعی پیوسته است، پس در فاصله $۰ < \theta < \pi$ علامت جبری ثابتی دارد. لذا

$$r = |a_۱ r| = |\frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi} v(re^{i\theta})\sin\theta d\theta| = \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi} |v(re^{i\theta})|\sin\theta d\theta. \qquad (۴.۱)$$

با جایگزینی (۴.۱) در (۳.۱) ، رابطه $|a_n r^n| \leq nr$ به دست می‌آید و با $r \longrightarrow ۱$ قضیه ثابت می‌گردد. $\square$

۳.۱ رده $\mathbb{S}^*$

تعریف ۱.۳.۱. میدان D را نسبت به $z_۰$ ستاره‌گون گوییم هر گاه پاره خط مستقیمی که هر نقطه از D را به $z_۰$ وصل می‌کند در D قرار بگیرد. تابع $f(z) \in \mathbb{S}$ را نسبت به مبدا ستاره‌گون گوییم هر گاه قرص $|z| < ۱$ با $f(z)$ بر میدانی نگاشته شود که نسبت به $w = ۰$ ستاره‌گون است. این زیر رده‌ی $\mathbb{S}$ با $\mathbb{S}^*$ نشان داده می‌شود.

لم ۲.۳.۱. *فرض کنیم $f(z) \in \mathbb{S}$، در این صورت $f(z) \in \mathbb{S}^*$ اگر و تنها اگر $f(z)$ هر قرص $|z| < r < ۱$ را بر میدان ستاره‌گون بنگارد.*

برهان. ابتدا فرض کنیم $f(z) \in \mathbb{S}^*$ و D تصویر $|z| < ۱$ و D_r تصویر $|z| < r < ۱$ در تابع $f(z)$ باشد. اگر $w \in D$ باشد، آنگاه برای $۰ < t < ۱$، $tw \in D$ (چون D ستاره‌گون نسبت به مبدا

می‌باشد) لذا تابع $g(z)=f^{-1}(tf(z))$ در $|z|<1$ تحلیلی است و در نامساوی $|g(z)|<1$ صدق می‌کند. چون $g(0)=f^{-1}(tf(0))$، با توجه به لم شوارتز $|g(z)|\leq|z|$. اکنون نقطه $w_1\in D_r$ را انتخاب می‌کنیم. در این صورت برای نقطه z_1ای با فرض $|z_1|<1$ و برای t دلخواه با فرض $0<t<1$ داریم:

$$|f^{-1}(tw_1)|=|f^{-1}(tf(z_1))|=|g(z_1)|\leq|z_1|<r$$

ولی این بدان معنی است که tw_1 در D_r قرار دارد. چون این مطلب برای همه W_1 ها در D_r و همه tها که $0<t<1$ درست است، میدان D_r نسبت به $w=0$ ستاره‌گون است.

به عکس، اگر $f(z)$ در رده‌ی $\mathbb{S}^*$ قرار نداشته باشد، آنگاه نقطه $w_0\in D$ موجود است به طوری که برای t_0ای، $0<t_0<1$، t_0w_0 متعلق به D نمی‌باشد. اینک قرص $|z|<r<1$ را انتخاب می‌کنیم به طوری که تصویرش D_r، شامل نقطه‌ی w_0 باشد. چون $D_r\subset D$، نقطه‌ی t_0w_0 متعلق به D_r نیست. پس $f(z)$، $|z|<1$ را بر میدان ستاره‌گون نمی‌نگارد. $\square$

قضیه ۱.۳.۳. *فرض کنیم* $f(z)\in\mathbb{S}$ *باشد. در این صورت* $f(z)\in\mathbb{S}^*$ *اگر و تنها اگر*

$$Re\Big\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\Big\}>0$$

برهان. با توجه به لم ۱.۳.۲ ، $f(z)\in\mathbb{S}^*$ اگر وتنها اگر تصویر D_r از $|z|<r<1$ یک میدان ستاره‌گون باشد. به بیان معادل برای هر θ $(0\leq\theta\leq 2\pi)$ بردار شعاعی از $w=0$ تا $w=f(re^{i\theta})$ باید در D_r باشد ولی این بدان معنی است که $arg\ f(re^{i\theta})$ تابعی است که نسبت به θ اکیدا صعودی است، زیرا در غیر این صورت بردار شعاعی می‌بایست مرز D_r را حداقل در دو نقطه قطع کند. پس یک تابع در $\mathbb{S}^*$ با شرط $\frac{\partial}{\partial\theta}arg\ f(re^{i\theta})>0$ مشخص می‌شود.

ولی $arg\ f(re^{i\theta})=Im\ logf(re^{i\theta})$، بنابراین:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\Big\{Im\ logf(re^{i\theta})\Big\}=Im\Big\{\frac{\partial}{\partial\theta}logf(re^{i\theta})\Big\}=Im\Big\{i\frac{re^{i\theta}f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\Big\}=Re\Big\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\Big\}>0.$$

$\square$

مثال ۱.۳.۴. تابع کوئب $k(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$ در رده‌ی $\mathbb{S}^*$ قرار دارد، زیرا تصویر $|z|<1$ صفحه w می‌باشد که در امتداد پرتو $\frac{-1}{4}$ تا ∞ بریده شده است و همچنین:

$$Re\Big\{\frac{zk'(z)}{k(z)}\Big\}=Re\Big\{\frac{1+z}{1-z}\Big\}.$$

قضیه ۱.۳.۵. *فرض کنیم برای* $|z|<1$، $f(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}1+a_nz^n$ *تحلیلی است. اگر برای* $|z|<1$ ، $Re\ f(z)>0$ ، *آنگاه برای هر* n ، $|a_n|\leq 2$ [۱۲، قضیه ۱۰.۱۵].

قضیه ۱.۳.۶. *فرض کنیم* $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ *در* $\mathbb{S}^*$ *باشد، آنگاه برای هر* n، $|a_n|\leq n$.

برهان. چون برای $۰ < |z| < ۱$، $f(z) \neq ۰$ تابع

$$P(z) = z\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} na_n z^{n-۱}}{۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^{n-۱}} \tag{۵.۱}$$

در $|z| < ۱$ تحلیلی است. لذا می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$P(z) = ۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} \alpha_n z^n \tag{۶.۱}$$

از طرفی برای $|z| < ۱$، $f(z) \in \mathbb{S}^*$ پس $Re\{P(z)\} > ۰$. بنا بر قضیه ۵.۳.۱ می‌دانیم

$$|\alpha_n| \leq ۲ \qquad n = ۱, ۲, ۳, \ldots \tag{۷.۱}$$

از (۵.۱) و (۶.۱) داریم:

$$۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} na_n z^{n-۱} = (۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^{n-۱})(۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} \alpha_n z^n)$$

با مساوی قرار دادن ضرایب به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$ka_k = a_k + a_{k-۱}\alpha_۱ + a_{k-۲}\alpha_۲ + \cdots + a_۲\alpha_{k-۲} + \alpha_{k-۱}$$

و یا به صورت معادل

$$(k-۱)a_k = a_{k-۱}\alpha_۱ + a_{k-۲}\alpha_۲ + \cdots + a_۲\alpha_{k-۲} + \alpha_{k-۱} \qquad (k = ۲, ۳, \ldots) \tag{۸.۱}$$

با استفاده از کران (۷.۱) می‌توان نامساوی مثلث را در (۸.۱) به کار برد. لذا

$$(k-۱)|a_k| \leq ۲(|a_{k-۱}| + |a_{k-۲}| + \cdots + |a_۲| + ۱)$$

از رابطه فوق در می‌یابیم $|a_۲| \leq ۲$. سپس فرض کنیم برای $k = ۲, ۳, \ldots, n-۱$، داشته باشیم $|a_k| \leq k$. در این صورت:

$$(n-۱)|a_n| \leq ۲\big[(n-۱) + (n-۲) + \cdots + ۲ + ۱\big] = \frac{۲(n-۱)n}{۲}.$$

و لذا رابطه $|a_n| \leq n$ برقرار می‌باشد. لذا به استقرا قضیه برای هر n درست است. □

تعریف ۷.۳.۱. تابع $f(z) \in \mathbb{S}$ ستاره‌گون از مرتبه α $(۰ \leq \alpha < ۱)$ نامیده می‌شود هرگاه:

$$Re\Big\{\frac{zf'}{f}\Big\} > \alpha \qquad (|z| < ۱).$$

این زیر رده $\mathbb{S}$ را به $\mathbb{S}^*(\alpha)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۸.۳.۱. *فرض کنیم* $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ ، $(0 \leq \alpha < 1)$ *اگر*
$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)|a_n| \leq 1-\alpha$$
آنگاه $f(z) \in \mathbb{S}^*(\alpha)$.

برهان. بنا بر تعریف ۷.۳.۱ کافی است نشان دهیم $z\frac{f'(z)}{f(z)}$ در یک دایره به شعاع $1-\alpha$ و به مرکز ۱ قرار دارد.
$$\left|z\frac{f'}{f}-1\right| = \left|\frac{zf'-f}{f}\right| = \left|\frac{\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)|a_n|z^n}{z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n}\right| \leq \frac{\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)|a_n||z|^{n-1}}{1-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n||z|^{n-1}} \leq \frac{\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)|a_n|}{1-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|}$$
آخرین جمله قبل دارای کران بالای $1-\alpha$ می‌باشد اگر
$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)|a_n| \leq (1-\alpha)(1-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|)$$
که معادل است با $\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)|a_n| \leq 1-\alpha$. بنا بر فرض، این رابطه برقرار است، بنابراین $|\frac{zf'}{f}-1| \leq 1-\alpha$. □

۴.۱ رده‌ی $\mathbb{K}$

تعریف ۱.۴.۱. میدان D را محدب گوییم هرگاه پاره خط مستقیمی که هر دو نقطه از D را به هم وصل می‌کند در D قرار بگیرد.

تعریف ۲.۴.۱. تابع $f(z) \in \mathbb{S}$ را محدب گوییم هر گاه قرص $|z| < 1$ با $f(z)$ بر یک میدان محدب نگاشته شود، این زیررده‌ی $\mathbb{S}$ را با $\mathbb{K}$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۳.۴.۱. *فرض کنیم* $f(z) \in \mathbb{S}$ ، *در این صورت* $f(z) \in \mathbb{K}$ *اگر وتنها اگر* $f(z)$ *هر قرص* $|z| < r < 1$ *را بر میدان محدب تصویر کند.*

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $f(z) \in \mathbb{K}$ و D تصویر $|z| < 1$ و D_r تصویر $|z| < r < 1$ تحت $f(z)$ باشد. نقاط w_1 و w_2 را در D_r انتخاب می‌کنیم. باید نشان دهیم که پاره خط $(0 < t < 1)$، $tw_1+(1-t)w_2$ هم در D_r قرار دارد. نقاط z_1 و z_2 در قرص $|z| < r$ موجود هستند به طوری که $w_1 = f(z_1)$ و $w_2 = f(z_2)$. بدون از دست دادن کلیت فرض کنیم $|z_1| \leq |z_2|$ آنگاه تصویر $|z| < 1$ تحت تابع $g(z) = tf\big((\frac{z_1}{z_2})z\big) + (1-t)f(z)$ در D واقع است. لذا تابع $h(z) = f^{-1}(g(z))$ در $|z| < 1$ تحلیلی است و چون $f(z) \in \mathbb{S}$ لذا در شرایط $|h(z)| < 1$ و $h(0) = 0$ صدق می‌کند، به موجب لم شوارتز $|h(z)| \leq |z|$. به ویژه:
$$|h(z_2)| = |f^{-1}(tw_1 + (1-t)w_2)| \leq |z_2| < r \qquad (9.1)$$

چون $D_r \subset D$، نقطه‌ی $z_\circ$ای در قرص $|z| < ۱$ موجود است که $f(z_\circ) = tw_۱ + (۱-t)w_۲$ ولی بنا بر (۹.۱) نقطه‌ی $f^{-۱}(f(z_\circ)) = z_\circ$ نیز می‌بایست در قرص $|z| < ۱$ باشد. پس هر نقطه بر پاره خط $tw_۱ + (۱-t)w_۲$ در D_r قرار دارد.

برعکس، اگر $f(z)$ در رده‌ی $\mathbb{K}$ نباشد، آنگاه دو نقطه در D وجود دارند که پاره خط مار بر این دو نقطه در D قرار ندارد. اینک قرصی مانند $|z| < r < ۱$ انتخاب می‌کنیم که تصویرش D_r شامل این دو نقطه باشد. چون $D_r \subset D$ پاره خطی که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند، نمی‌تواند در D_r قرار داشته باشد، لذا $f(z)$ قرص $|z| < r$ را بر یک میدان محدب تصویر نمی‌کند. □

قضیه ۴.۴.۱. *فرض کنیم $f(z)$ در $|z| < ۱$ تحلیلی باشد و $f(\circ) = \circ$ و $f'(\circ) = ۱$. در این صورت $f(z) \in \mathbb{K}$ اگر و تنها اگر:*

$$Re\left\{۱ + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > \circ \qquad (|z| < ۱).$$

برهان. بنا بر قضیه ۳.۴.۱، $f(z) \in \mathbb{K}$ اگر و تنها اگر تصویر D_r از $|z| < r < ۱$ یک میدان محدب باشد. از نظر هندسی این بدان معنی است که تابع $w = f(re^{i\theta})$ دایره $|z| = r < ۱$ را بر یک مرز ساده می‌نگارد و مماس بر این مرز، با افزایش θ در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حرکت میکند. می‌دانیم زاویه‌ای که خط مماس در صفحه w با محور حقیقی می‌سازد برابر است با:

$$\frac{\pi}{۲} + \theta + arg\ f'(z)$$

لذا تابع محدب با شرط زیر مشخص می‌گردد:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\frac{\pi}{۲} + \theta + arg\ f'(re^{i\theta})\Big) > \circ$$

و لذا :

$$۱ + \frac{\partial}{\partial\theta}\Big(Im\ log f'(re^{i\theta})\Big) = ۱ + Im\Big\{ire^{i\theta}\frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\Big\} = Re\Big\{۱ + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\Big\} > \circ$$

□

قضیه ۵.۴.۱ (الکساندر [۱]). *فرض کنیم f یک تابع تحلیلی در D باشد با $f(\circ) = \circ$ و $f'(\circ) = ۱$. در این صورت $f(z) \in \mathbb{K}$ اگر و تنها اگر $zf' \in \mathbb{S}^*$.*

برهان. اگر $g(z) = zf'(z)$ در این صورت:

$$\Big\{\frac{zg'(z)}{g(z)}\Big\} = \Big\{۱ + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\Big\} > \circ$$

لذا تابع سمت چپ در D تحلیلی و مثبت است اگر و تنها اگر تابع سمت راست نیز چنین باشد. □

[۱] Alexander

قضیه ۶.۴.۱. *فرض کنیم* $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ *در* $\mathbb{K}$ *باشد. در این صورت برای هر* n، $|a_n| \leq 1$.

برهان. با توجه به قضیه ۵.۴.۱ تابع $zf'(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} na_n z^n$ در $\mathbb{S}^*$ قرار دارد، لذا بنا بر قضیه ۶.۳.۱ برای هر n، $n|a_n| \leq n$ و در نتیجه $|a_n| \leq 1$. □

قضیه ۷.۴.۱. *اگر* $f(z) \in \mathbb{K}$ *و برای* $|z| < 1$ *داشته باشیم* $f(z) \neq c$ *آنگاه* $|c| \geq \frac{1}{2}$.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم تابع کمکی $g(z) = \left(c - f(z)\right)^2$ در $|z| < 1$ تک‌ارز است، دو نقطه متمایز z_0 و z_1 در قرص واحد انتخاب می‌کنیم. در این صورت:

$$g(z_0) - g(z_1) = \left(\left(c - f(z_0)\right)^2 - \left(c - f(z_1)\right)^2\right) = \left(f(z_0) - f(z_1)\right)\left(f(z_0) + f(z_1) - 2c\right)$$

اکنون $f(z_1) \neq f(z_0)$، زیرا $f(z)$ تک‌ارز می‌باشد. همچنین چون $f(z)$ محدب است، نقطه $\frac{1}{2}[f(z_0) + f(z_1)]$ به تصویر $|z| < 1$ متعلق است لذا نمی‌تواند مساوی c باشد. پس $f(z_0) + f(z_1) - 2c \neq 0$ و لذا تک‌ارزی $g(z)$ ثابت می‌شود. چون $g(z) = c^2 - 2cz + z^2 + \cdots$ تابع نرمال زیر در $\mathbb{S}$ است

$$h(z) = \frac{g(z) - c^2}{-2c} = z + \left(\frac{-z^2}{2c}\right) + \cdots$$

به علاوه در $|z| < 1$، $h(z) \neq \frac{c}{2}$، زیرا $g(z)$ هرگز در آنجا صفر نیست. با به کار بردن قضیه‌ی پوششی در می‌یابیم که $|\frac{c}{2}| \geq \frac{1}{4}$ یا $|c \geq \frac{1}{2}$. □

قضیه ۸.۴.۱. *اگر* $f(z) \in \mathbb{K}$ *باشد، آنگاه برای* $|z| = r < 1$:

$$\frac{1}{(1+r)^2} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{(1-r)^2}.$$

برهان. می‌دانیم تابع $(|z_0| < 1)$ $w = \frac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}$ تحلیلی، یک به یک و پوشاست و قرص واحد را بر خودش می‌نگارد. پس تابع

$$g(z) = f\left(\frac{z + z_0}{1 + \overline{z_0}z}\right) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots$$

نیز به ازای $|z| < 1$ تحلیلی و تک‌ارز است. بنابراین:

$$g(0) = b(0) = f(z_0) \qquad b_1 = g'(0) = f'(z_0)(1 - |z_0|^2)$$

$$b_2 = \frac{g''(0)}{2} = \frac{1}{2}\left(f''(z_0)(1 - |z_0|^2)^2 - 2f'(z_0)\overline{z_0}(1 - |z_0|^2)\right).$$

چون تابع $g(z)$ نرمالیزه نمی‌باشد لذا $g(z)$ در رده‌ی $\mathbb{S}$ قرار ندارد. با توجه به این که تابع

$$\frac{g(z) - g(0)}{g'(0)} = z + \frac{b_2}{b_1}z^2 + \cdots$$

در $\mathbb{S}$ قرار می‌گیرد. لذا در $\mathbb{K}$ نیز وجود دارد. پس بنا بر قضیه ۶.۴.۱

$$\frac{۱}{۲}\Big|\frac{f''(z_۰)}{f'(z_۰)}(۱-|z_۰|^۲)-۲\overline{z_۰}\Big|\leq ۱$$

با قرار دادن $z_۰=re^{i\theta}$ و ضرب طرفین در $\frac{۲|z_۰|}{۱-|z_۰|^۲}$ داریم:

$$\Big|\frac{z_۰f''(z_۰)}{f'(z_۰)}-\frac{۲|z_۰|^۲}{۱-|z_۰|^۲}\Big|\leq\frac{۲|z_۰|}{۱-|z_۰|^۲}.$$

حال چون $z_۰$ دلخواه است داریم:

$$\Big|\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\frac{۲r^۲}{۱-r^۲}\Big|\leq\frac{۲r}{۱-r^۲}$$
$$\Rightarrow\frac{۲r^۲-۲r}{۱-r^۲}\leq\frac{zf''(z)}{f'(z)}\leq\frac{۲r^۲+۲r}{۱-r^۲}$$
$$\Rightarrow\frac{۲r-۲}{۱-r^۲}\leq\frac{\partial}{\partial r}log|f'(z)|\leq\frac{۲r+۲}{۱-r^۲}.$$

حال از ۰ تا r انتگرال می‌گیریم:

$$-۲\ log(۱+r)\leq log|f'(z)|\leq -۲\ log(۱-r)$$

لذا :

$$\frac{۱}{(۱+r)^۲}\leq|f'(z)|\leq\frac{۱}{(۱-r)^۲}.$$

□

قضیه ۹.۴.۱. *اگر* $f(z)\in\mathbb{K}$ *باشد، آنگاه برای* $|z|=r<۱$،

$$\frac{r}{۱+r}\leq|f(z)|\leq\frac{r}{۱-r}$$

برهان. بنا بر قضیه ۸.۴.۱ برای $|z|=r<۱$ داریم $|f'(z)|\leq\frac{۱}{(۱-r)^۲}$. نقطه‌ی ۰ را به z با یک خط مستقیم وصل کرده و روی این پاره خط انتگرال می‌گیریم:

$$|f(z)|=\int_۰^r|f'(t)|dt\leq\int_۰^r\frac{۱}{(۱-t)^۲}dt=\frac{r}{۱-r}.$$

نا مساوی $\frac{۱}{۴}\leq\frac{r}{۱+r}$ همواره برقرار است، حال اگر $|f(z)|\geq\frac{۱}{۴}$ لذا $|f(z)|\geq\frac{r}{(۱+r)}$ و اگر $|f(z)|<\frac{۱}{۴}$ طبق قضیه پوششی مسیر c داخل دایره‌ی یکه از ۰ تا z موجود است که تصویر آن پاره خط مستقیم $c_۰$ از ۰ تا $f(z)$ را می‌پوشاند. در این صورت:

$$|f(z)|=\int_{c_۰}|dw|=\int_c|f'(s)||ds|$$

از طرفی بنا بر قضیه قبل:

$$|f(z)|=\int_c|f'(s)||ds|\geq\int_c|f'(s)|d|s|\geq\frac{۱}{(۱+t)^۲}dt=\frac{r}{۱+r}$$

لذا داریم:

$$\frac{r}{۱+r} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{۱-r}$$

□

۵.۱ رده‌ی $\mathbb{T}$

تعریف ۱.۵.۱. فرض کنیم $\mathbb{T}$ زیر رده‌ای از $\mathbb{S}$ شامل توابعی با ضرایب منفی باشد. گوییم یک تابع تک‌ارز و تحلیلی f در $\mathbb{T}$ قرار دارد هر گاه بتوانیم آن را به شکل $f(z) = z - \sum_{n=۲}^{\infty} |a_n| z^n$ بیان کنیم.

قضیه ۲.۵.۱. *تابع* $f(z) = z - \sum_{n=۲}^{\infty} |a_n| z^n$ *در* $\mathbb{T}$ *قرار دارد اگر و تنها اگر* $\sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n| \leq ۱$.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم اگر $f(z) \in \mathbb{T}$ آنگاه $\sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n| \leq ۱$. چون $f(z) \in \mathbb{T}$، $f(z)$ در دیسک واحد Δ تک‌ارز است. در این صورت $f'(z) = ۱ - \sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n| z^{n-۱} \neq ۰$. بنابراین:

$$f'(r) = ۱ - \sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n| r^{n-۱} \neq ۰ \qquad (z=r).$$

فرض کنیم $\sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n| > ۱$. در این صورت اندیس مثبت N وجود دارد به طوری که $\sum_{n=۲}^{N} n|a_n| > ۱$، بنابراین وجود دارد $۰ < r_۰ < ۱$ که $۱ - \sum_{n=۲}^{N} n|a_n| r_۰^{n-۱} < ۰$. لذا:

$$f'(r) = ۱ - \sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n| r_۰^{n-۱} \leq ۱ - \sum_{n=۲}^{N} n|a_n| r_۰^{n-۱} < ۰$$

چون $f'(r)$ پیوسته است و $f'(۰) = ۱$ پس وجود دارد $۰ < r_۱ < r_۰$ به طوری که $f'(r_۱) = ۰$ و این با فرض $f'(z) \neq ۰$ در تناقض می‌باشد. لذا فرض خلف باطل و $\sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n| \leq ۱$.

به عکس، فرض کنیم $\sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n| \leq ۱$. در این صورت:

$$Re\Big(f'(z)\Big) = Re\Big(۱ - \sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n| z^{n-۱}\Big) > ۱ - \sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n| \geq ۰$$

پس برای $z_۱, z_۲ \in \Delta$ و $z_۱ \neq z_۲$،

$$Re\frac{f(z_۱) - f(z_۲)}{z_۱ - z_۲} = \int_۰^۱ Re f'\big[z_۱ + t(z_۲ - z_۱)\big] dt$$

لذا $f(z)$ در Δ تک‌ارز است و $f(z) \in \mathbb{T}$. □

قضیه ۳.۵.۱. *اگر* $f(z) \in \mathbb{T}$ *باشد آنگاه*

$$r - \frac{۱}{۲} r^۲ \leq |f(z)| \leq r + \frac{۱}{۲} r^۲ \qquad (|z| = r)$$

برهان. بنابر قضیه ۱.۵.۲ داریم $\sum_{n=2}^{\infty}|a_n| \le \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \le 1$ ۲. بنابراین :

$$|f(z)| \le r + \sum_{n=2}^{\infty}|a_n|r^n \le r + r^2\sum_{n=2}^{\infty}|a_n| \le r + \frac{1}{2}r^2$$

و

$$|f(z)| \ge r - \sum_{n=2}^{\infty}|a_n|r^n \ge r - r^2\sum_{n=2}^{\infty}|a_n| \ge r - \frac{1}{2}r^2$$

لذا داریم:

$$r - \frac{1}{2}r^2 \le |f(z)| \le r + \frac{1}{2}r^2 \qquad (|z| = r).$$

□

مثال ۱.۵.۴. بنا بر قضیه ۱.۵.۲، تابع $f(z) = z - \frac{1}{2}z^2$ متعلق به ردهی $\mathbb{T}$ میباشد هرگاه $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \le 1$. حال با جایگزینی $n = 2$ و $a_2 = \frac{1}{2}$ به وضوح تابع $f(z)$ در شرط فوق صدق میکند. لذا کران بالای قضیه ۱.۵.۳ در مورد این تابع در $z = r$ و کران پایین در $z = -r$ تعیین میشود.

قضیه ۱.۵.۵. *اگر* $f(z) \in \mathbb{T}$ *باشد، آنگاه:*

$$1 - r \le |f'(z)| \le 1 + r \qquad (|z| = r).$$

برهان. میدانیم:

$$|f'(z)| \le 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|r^{n-1} \le 1 + r\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \le 1 + r$$

و

$$|f'(z)| \ge 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|r^{n-1} \ge 1 - r\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \ge 1 - r$$

لذا داریم:

$$1 - r \le |f'(z)| \le 1 + r \qquad (|z| = r).$$

□

مثال ۱.۵.۶. برای تابع $f(z) = z - \frac{1}{2}z^2$ کران بالای قضیه ۱.۵.۵ در $z = r$ و کران پایین در $z = -r$ تعیین میشود.

قضیه ۱.۵.۷. *فرض کنیم توابع* $f_m(z) = z - \sum_{j=2}^{\infty}|a_{j,m}|z^j, (m = 1, 2, \dots, n)$ *متعلق به رده* $\mathbb{T}$ *باشند. در این صورت تابع* $h(z)$ *تعریف شده به صورت*
$h(z) = \sum_{m=1}^{n} c_m f_m(z), (c_m \ge 0)$ *که در آن* $\sum_{m=1}^{n} c_m = 1$ *است نیز در رده* $\mathbb{T}$ *قرار دارد.*