دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی ، گرایش جبر

عنوان

مینیماکس بودن و هم‌متناهی بودن مدول‌های کوهمولوژی موضعی

استاد راهنما

دکتر محرم آقاپورنهر

پژوهشگر

ساناز سوری

۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: سوری نام: ساناز

عنوان: مینیماکس بودن و هم‌متناهی بودن مدول‌های کوهمولوژی موضعی

استاد راهنما: دکتر محرم آقاپورنهر

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی گرایش: جبر

دانشگاه: اراک دانشکده علوم پایه

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۲ تعداد صفحات: ۷۶

واژگان کلیدی: کوهمولوژی موضعی، مدول‌های مینیماکس، مدول‌های لسکرین ضعیف، مدول‌های هم‌متناهی

چکیده

تقدیم به پدر عزیز و مادر مهربان

و

همسر فداکار و دختر نازنینم

خدایا...[1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

---

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس‌گزاری

سپاس خداوندگار حکیم را که به من ارزش، قدرت و انگیزه‌ی بودن داد.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد فرزانه، جناب آقای دکتر محرم آقاپور نهر، که به معنای واقعی کلمه، استاد راهنمای من بودند، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید. از زحمات اساتید بزرگوار آقایان دکتر عزیزالله آزاد و دکتر رضا عرفی که زحمت مطالعه و داوری این رساله را بر عهده داشتند تشکر می‌نمایم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از همسر عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودش، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند. همچنین از برادر شوهرم آقای مراد امرایی به پاس زحماتی که متحمل شده‌اند سپاس‌گزاری می‌نمایم.

آینده برایم واژه‌ای است مبهم و تار. نمی‌خواهم منتظر بمانم تا آن به سراغم بیاید؛ میخواهم خود آینده‌ام را بسازم. می‌خواهم زیباترین و خوش رنگترین‌ها را بسازم. آینده‌ای که در آن شایستگی کلام احسن الخالقین را داشته باشم. آینده‌ی من هر چه باشد مطمئناً نقش اساتید بزرگوار و خانواده‌ی عزیزم در آن انکار ناپذیر است. پس از خداوند می‌خواهم به من قدرت ساختن بهترین‌ها را عطا کند.

ساناز سوری
۱۳۹۲

چکیده

بررسی مینیماکس بودن و هم‌متناهی بودن مدول‌های کوهمولوژی موضعی موضوع اصلی این رساله می‌باشد. در این راستا به بیان و اثبات چند قضیه می‌پردازیم.

بدین منظور فرض کنید R یک حلقه‌ی جابجایی و نوتری و I ایده‌آلی از R باشد. فرض کنید M یک $R-$مدول ناصفر باشد. نشان می‌دهیم که $n-$ امین بعد متناهی برای هر $n \in \mathbb{N}_0$ به صورت زیر می‌باشد:

$$f_I^n(M) := inf \left\{ f_{IR_\mathfrak{p}}(M_p) \mid \mathfrak{p} \in Supp(M/IM) \ , \ dimR/\mathfrak{p} \geq n \right\}$$

همچنین نشان می‌دهیم:

۱. $f_I^1(M) = inf \{ i \in \mathbb{N}_0 \mid H_I^i(M)$ مینیماکس نیست$\}$

۲. $R-$ مدول‌های $H_I^i(M)$ برای هر $i < f_I^2(M)$، $I-$هم‌متناهی هستند و اگر $f_I^2(M)$ متناهی باشد آنگاه برای هر زیرمدول مینیماکس N از $H_I^{f_I^2(M)}(M)$ ، $R-$مدول‌های $Hom_R(R/I, H_I^{f_I^2(M)}(M)/N)$ و $Ext_R^1(R/I, H_I^{f_I^2(M)}(M)/N)$ متناهی مولد هستند.

اگر I دارای بعد یک باشد آنگاه $H_I^i(M)$ برای هر $i \geq 0$ ، $I-$هم‌متناهی است. همچنین نشان می‌دهیم اگر R حلقه‌ی نیم موضعی باشد آنگاه:

۱. $f_I^2(M) = inf \{ i \in \mathbb{N}_0 \mid \ H_I^i(M)$ لسکرین ضعیف نیست $\}$

۲. اگر $(R, \mathfrak{m})$ حلقه‌ی موضعی و نوتری کامل باشد آنگاه برای هر $j \geq 0$ و $i < f_I^3(M)$ ، $R-$مدول‌های $Ext_R^j(R/I, H_I^i(M))$ لسکرین ضعیف هستند. بعلاوه اگر $f_I^3(M)$ متناهی باشد آنگاه برای هر زیر مدول لسکرین ضعیف N از $H_I^{f_I^3(M)}(M)$، $R-$مدول‌های $Hom_R(R/I, H_I^{f_I^3(M)}(M)/N)$ و $Ext_R^1(R/I, H_I^{f_I^3(M)}(M)/N)$ لسکرین ضعیف می‌باشند.

واژگان کلیدی

کوهمولوژی موضعی، مدول‌های مینیماکس، مدول‌های لسکرین ضعیف، مدول‌های هم‌متناهی

پیشگفتار

مدول‌های هم‌متناهی نخستین بار توسط هارتشورن در سال ۱۹۷۰ مطرح و در مقاله‌ی معروفش که نخستین مقاله در این مورد بود، تعریف شد. هدف از طرح بررسی این نوع مدول‌ها جواب دادن به برخی سوالات عنوان شده از طرف گروتندیک در سمینار هندسه جبری‌اش در سال ۱۹۶۲ بود. این نوع مدول‌ها توسط خود هارتشورن و بعدها توسط ریاضی‌دانان دیگر از جمله هونیکه و دانشجویانش مورد مطالعه‌ی بیشتر قرار گرفتند.

یکی از قضایای مهم کوهمولوژی موضعی قضیه‌ی سراسری-موضعی فالتینگ برای مدول‌های کوهمولوژی موضعی با دامنه‌ی متناهی است. که بیان می‌کند برای هر عدد صحیح مثبت مانند r، $R_{\mathfrak{p}}-$مدول $H^i_{IR_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}})$ برای هر $i \leq r$ و هر $\mathfrak{p} \in Spec(R)$ متناهی مولد است اگر و فقط اگر $R-$مدول $H^i_I(M)$ برای هر $i \leq r$ متناهی مولد باشد. فرمول دیگر قضیه‌ی جهانی-موضعی فالتینگ که در حالت خاص مربوط به این مقاله است، تعمیم بعد متناهی $f_I(M)$ از $R-$مدول M روی ایده‌آل I است. جایی‌که

$$f_I\left(M\right) = inf\left\{i \in \mathbb{N}_\circ \mid H^i_I\left(M\right) \text{ متناهی مولد نیست } \right\} \qquad (*)$$

اگر مجموعه‌ی بالا تهی باشد آنگاه $f_I\left(M\right) = \infty$.

واضح است که

$$\begin{aligned} f_I\left(M\right) &:= inf\left\{i \in \mathbb{N}_\circ \mid I \nsubseteq Rad(\circ :_R H^i_I(M))\right\} \\ &= inf\left\{i \in \mathbb{N}_\circ \mid I^n H^i_I(M) \neq \circ \ \text{ برای هر } n \in \mathbb{N}\right\} \\ &= inf\left\{f_{IR_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \mid \mathfrak{p} \in Spec(R)\right\} \\ &= inf\left\{f_{IR_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \mid \mathfrak{p} \in Supp(M/IM)\ ,\ dimR/\mathfrak{p} \geq \circ\right\} \end{aligned}$$

حال فرض کنیم که n یک عدد صحیح نامنفی است. $n-$امین بعد متناهی $f^n_I\left(M\right)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f^n_I\left(M\right) := inf\left\{f_{IR_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \mid \mathfrak{p} \in Supp(M/IM)\ ,\ dimR/\mathfrak{p} \geq n\right\}$$

توجه شود که $f^n_I\left(M\right)$ یک مقدار صحیح مثبت یا ∞ است و $f^\circ_I\left(M\right) = f_I(M)$. بنابراین این سوال مطرح است که آیا قضیه‌ی سراسری - موضعی فالتینگ که در $(*)$ مطرح شده است به مقدار $f^n_I\left(M\right)$ تعمیم داده می‌شود. به عبارت دیگر آیا جملات

$$f^۱_I\left(M\right) = inf\left\{i \in \mathbb{N}_\circ \mid H^i_I\left(M\right) \text{ مینیماکس نیست}\right\}$$

و

$$f^۲_I\left(M\right) = inf\left\{i \in \mathbb{N}_\circ \mid \ \ H^i_I\left(M\right) \text{ لسکرین ضعیف نیست } \right\}$$

درست می‌باشند؟

نتیجه اصلی ما در قسمت دوم فصل سوم این است که کمترین مقدار صحیح i به طوری‌که $H_I^i(M)$ مینیماکس نیست با $f_I^1(M)$ معادل است. در حالی‌که در قسمت سوم از فصل سه نشان می‌دهیم کمترین مقدار صحیح i که $H_I^i(M)$ لسکرین ضعیف نیست با $f_I^2(M)$ معادل است وقتی که R حلقه‌ای نیم موضعی است. برای اثبات نتیجه اصلی قسمت دوم فصل سه از قضیه زیر استفاده می‌شود

قضیه۱.۱ فرض کنیم R حلقه‌ی نوتری، I ایده‌ال R و M یک $R-$مدول متناهی مولد باشد. آنگاه برای هر $i < f_I^1(M)$ ، $R-$مدول $H_I^i(M)$ مینیماکس و $I-$هم‌متناهی است و

$H_I^{f_I^1(M)}(M)$ مینیماکس نیست. بعلاوه، برای هر زیر مدول مینیماکس N از $H_I^{f_I^1(M)}(M)$،

$R-$مدول $Hom_R(R/I, H_I^{f_I^1(M)}(M)/N)$ متناهی مولد است.

همچنین قضیه‌ای که برای اثبات نتیجه‌ی اصلی قسمت سوم از فصل سه استفاده می‌شود به صورت زیر است

قضیه۱.۲ فرض کنیم R حلقه‌ی نوتری، I ایده‌ال R و M یک $R-$مدول متناهی مولد باشد. و $t \geq 1$ عدد صحیح، به طوری‌که $R-$مدول‌های $H_I^0(M), \cdots, H_I^{t-1}(M)$ برای هر $\mathfrak{p} \in Supp(M/IM)$ با $dimR/\mathfrak{p} > 1$ به طور موضعی متناهی مولد باشند. آنگاه همه‌ی مدول‌های فوق $I-$هم‌متناهی و $R-$مدول $Hom_R(R/I, H_I^t(M))$ متناهی مولد است.

و در ادامه قضیه‌ی زیر را که نتیجه‌ی قضیه۱.۲ می‌باشد و برای هر حلقه‌ی نوتری دلخواه برقرار است اثبات می‌کنیم.

قضیه۱.۳ فرض کنیم R حلقه‌ی نوتری، I ایده‌ال R و M یک $R-$مدول متناهی مولد باشد. به طوری‌که $dim(M/IM) \leq 1$. در این صورت به ازای هر عدد صحیح t، $R-$مدول‌های $H_I^t(M)$، $I-$هم‌متناهی هستند.

یکی دیگر از نتایج اصلی قسمت سوم از فصل سه این است که اگر $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه‌ی موضعی نوتری کامل و I ایده‌ال R و M یک $R-$مدول متناهی مولد باشد آنگاه $R-$مدول‌های $Ext_R^j(R/I, H_I^i(M))$ برای هر $j \geq 0$ و $i < f_I^3(M)$ لسکرین ضعیف می‌باشند. همچنین برای هر زیرمدول لسکرین ضعیف N از $H_I^{f_I^3(M)}(M)$، $R-$مدول $Hom_R(R/I, H_I^{f_I^3(M)}(M)/N)$ لسکرین ضعیف است.

در واقع هدف ما در این بخش ایجاد انگیزه برای تحقیق در این مورد است که $Ass_R H_I^i(M)$ برای $i = f_I^j(M)$ وقتی که $i = 1, 2, 3$ متناهی است.

سرانجام در قسمت چهارم از فصل سه برای حلقه‌ی نوتری R و ایده‌آل I از R و $R-$مدول متناهی مولد M چند مثال می‌آوریم که نشان میدهند برای $f_I^0(M) = f_I(M)$داریم $f_I^t(M) < f_I^{t+1}(M)$. در این رساله مقالات زیر به صورت صد در صد مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

1) M. T. Dibaei. and S. Yassemi, *Finiteness of extension functors of local cohomology modules,* Comm. Algebra 34 (2006) 3097-3101.

2) K. Bahmanpour and R. Naghipour and M. Sedghi, *Minimaxness and cofiniteness properties of local cohomology modules,* Comm. Algebra 41 (2013) 2799-2814.

فهرست مطالب

۱ تعاریف، مفاهیم و قضایای مقدماتی ۱

۱.۱ مطالب مقدماتی ۱

۲.۱ مقدماتی از جبر کوهمولوژی ۲۴

۲ متناهی بودن فانکتورهای توسیع مدولهای کوهمولوژی موضعی ۳۲

۱.۲ تعاریف و قضایای مقدماتی از مدول‌های هم‌متناهی ۳۲

۲.۲ قضایای اصلی ۳۳

۳.۲ مثال ها ۳۸

۳ بررسی مینیماکس بودن و هم‌متناهی بودن مدول‌های کوهمولوژی موضعی ۳۹

۱.۳ تعاریف و قضایای مقدماتی ۳۹

۲.۳ مینیماکس بودن مدول‌های کوهمولوژی موضعی ۴۵

۳.۳ هم‌متناهی بودن مدول‌های کوهمولوژی و مدول‌های لسکرین ضعیف ۵۲

۴.۳ مثال‌ها ۶۶

مراجع ۶۹

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۷۱

فصل ۱

تعاریف، مفاهیم و قضایای مقدماتی

این فصل مشتمل بر دو بخش است، بخش اوّل را به تعاریف و قضایای اولیّه از جبر جابجایی و جبر همولوژی که در این پایان نامه مورد نیازند اختصاص می‌دهیم و در بخش دوم به مقدماتی از جبر کوهمولوژی می‌پردازیم.

۱.۱ مطالب مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم M، R-مدولی دلخواه باشد. مجموعه مقسوم علیه های صفر M را با نماد $Z(M)$ نمایش می دهیم و به صورت

$$Z(M) := \{r \in R \ \mid \ \exists m \in M \ \ s.t \ m \neq \circ \ , \ rm = \circ\}$$

تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم N، R-زیر مدولی از M و I ایده آلی از R باشد، تعریف می کنیم:

$$(N :_M I) := \{m \in M \ \mid \ Im \subseteq N\}$$

$(N :_M I)$، R-زیر مدول M و شامل N می‌باشد.

تعریف ۳.۱.۱. منظور از پوچساز R-مدول M، $(\circ :_R M)$ است که آن را با $Ann_R(M)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$Ann_R(M) := \{r \in R \ \mid \ \forall m \in M \ , rm = \circ\}$$

قضیّه ۴.۱.۱. (قضیّه‌ی اجتناب از ایده آل های اوّل):
فرض کنیم $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$، ($n \geq ۲$) ایده آل هایی از حلقه‌ی R باشند که حداکثر دو تا از آنها اوّل نباشند. هم چنین فرض کنیم S زیر گروهی جمعی از R باشد که نسبت به ضرب بسته است، در اینصورت اگر $S \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$، آنگاه i ای موجود است که $۱ \leq i \leq n$ و $S \subseteq \mathfrak{p}_i$.

برهان. به [۲۵] قضیه (۶۱.۳) مراجعه شود. □

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه و I ایده آلی از R باشد. تعریف می کنیم:

$$r(I) := \{a \in R : a^n \in I \text{ که به طوری باشد موجود } n \in \mathbb{N} \text{ چون عددی}\}$$

$r(I)$ ایده آلی از حلقه R است که شامل I می باشد. این ایده آل را رادیکال ایده آل I می نامیم. به ویژه ایده آل $r(\circ)$ را رادیکال پوچ توان R می نامیم و با علامت $\mathfrak{n}_R$ نمایش می دهیم.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه و E زیر مجموعه ای از R باشد. تعریف می کنیم:

$$V(E) := \{\mathfrak{p} \in spec(R) \ \mid \ E \subseteq \mathfrak{p}\}$$

اگر ایده آل I از R توسط زیر مجموعه ی E از R تولید شود آنگاه $V(E) = V(I)$. به سادگی ثابت می شود $V(\circ) = spec(R)$ و $V(R) = V(۱) = \emptyset$.

اگر $\{E_i\}_{i \in I}$ خانواده ای از زیر مجموعه های R باشد آنگاه $V(\bigcup_{i \in I} E_i) = V(\sum_{i \in I} E_i) = \bigcap_{i \in I} V(E_i)$.

هم چنین اگر I و J دو ایده آل از R باشند آنگاه $V(I \cap J) = V(IJ) = V(I) \cup V(J)$ و $V(I) = V(r(I))$.

نتایج فوق نشان می دهد که گردایه ی $f = \{V(I) / I \trianglelefteq R\}$ تحت اتحاد تعداد متناهی و اشتراک تعداد دلخواه بسته است.

لم ۷.۱.۱. فرض کنیم R حلقه و I و J ایده آل هایی از R باشند به طوریکه $I \subseteq J$ آنگاه $V(J) \subseteq V(I)$.

برهان. فرض کنیم $J \subseteq I$ و $\mathfrak{p} \in V(I)$. در اینصورت $J \subseteq \mathfrak{p}$، حال چون طبق فرض $I \subseteq J$ لذا $\mathfrak{p} \subseteq J$ پس $V(J) \subseteq V(I)$. □

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنیم M یک R-مدول باشد. زیر مدول سره N از M را یک زیر مدول اولیه نامیم هر گاه برای هر $a \in R$، همریختی $f_a : M/N \longrightarrow M/N$ با ضابطه‌ی $f_a(m+N) = am+N$ برای هر $m \in M$ یا یک به یک باشد یا پوچ توان.
به عبارت معادل برای هر $a \in R$ و هر $n \in M$ اگر $an \in N$ و $n \notin N$، آنگاه $t \in \mathbb{N}$ موجود است که $a^tM \subseteq N$.
فرض کنیم N زیر مدول اولیّه‌ی M باشد به طوریکه $r(0 :_R M/N) = \mathfrak{p}$ یک ایده آل اول باشد در اینصورت N را یک زیر مدول $\mathfrak{p}$-اولیّه می نامیم.

لم ۹.۱.۱. فرض کنیم I ایده آلی از R باشد به طوریکه $\mathfrak{m} = r(I)$ ایده آل ماکسیمالی از R باشد. در اینصورت I، ایده آلی $\mathfrak{m}$-اولیه می باشد.

برهان. به [۲۵] قضیه (۹.۴) مراجعه شود. □

تعریف ۱۰.۱.۱. R-مدول M لسکرین است اگر هر زیر مدول آن اشتراک تعداد متناهی از زیر مدول های اولیه باشد.

قضیّه ۱۱.۱.۱. فرض کنیم $\mathfrak{p}$ ایده آل اولی از R و $I_1, \dots, I_n$ ایده آل هایی دلخواه از R باشند. در اینصورت گزاره های زیر معادلند:

۱. i ای موجود است که $1 \leq i \leq n$ و $I_i \subseteq \mathfrak{p}$.

۲. $\bigcap_{i=1}^{n} I_i \subseteq \mathfrak{p}$

۳. $\prod_{i=1}^{n} I_i \subseteq \mathfrak{p}$

برهان. به [۲۵] لم (۵۵.۳) مراجعه شود. □

لم ۱۲.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه و I و J ایده آل هایی از R باشند. در اینصورت $r(I) = r(J)$ اگر و تنها اگر $V(I) = V(J)$.

برهان. $(\Leftarrow)$: فرض کنیم $r(I) = r(J)$ و $\mathfrak{p} \in V(I)$ پس $I \subseteq \mathfrak{p}$ در نتیجه
$$J \subseteq r(J) = r(I) \subseteq r(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}.$$

لذا $J \subseteq \mathfrak{p}$ پس $\mathfrak{p} \in V(J)$ و بالعکس نیز بطور مشابه است.
$(\Rightarrow)$:فرض کنیم $V(I) = V(J)$ طبق قضیه ۱۱.۱.۱ داریم

$$I \subseteq r(I) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in spec(R), I \subseteq \mathfrak{p}} \mathfrak{p} \quad s.t \;\; I \subseteq \mathfrak{p} \Rightarrow p \in V(I) = V(J) \Rightarrow J \subseteq \mathfrak{p}$$

عکس آن بطور مشابه انجام می شود.

پس $\bigcap_{\mathfrak{p} \in spec(R), I \subseteq \mathfrak{p}} \mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in spec(R), J \subseteq \mathfrak{p}} \mathfrak{p}$.

□

قضیّه ۱۳.۱.۱. فرض کنیم R حلقه جابجایی و یکدار باشد. در اینصورت گزاره های زیر معادلند:

۱. R نوتری است.

۲. هر زیر مجموعه ناتهی از ایده آل های R دارای عضو ماکزیمال است.

۳. هر زنجیر صعودی از ایده آل های R متوقف می شود.

برهان. به [۱] گزاره (۱.۶) مراجعه شود. □

تعریف ۱۴.۱.۱. فرض کنیم R حلقه ای نوتری و M یک R-مدول باشد. در اینصورت ایده آل اول $\mathfrak{p}$ را وابسته به M می نامیم هرگاه عضوی ناصفر از M مانند x موجود باشد به طوریکه $\mathfrak{p} = (0 :_R x)$. مجموعه ایده آل های اول وابسته به M را با نماد $Ass_R(M)$ یا $Ass(M)$ نمایش می دهیم.

قضیّه ۱۵.۱.۱. فرض کنیم M، R-مدول و R حلقه ای نوتری باشد. در اینصورت $Ass_R(M) \neq \emptyset$ اگر و تنها اگر $M \neq 0$.

برهان. به [۲۵] نتیجه (۳۵.۹) مراجعه شود. □

قضیّه ۱۶.۱.۱. فرض کنیم M، R-مدولی ناصفر باشد. در اینصورت گزاره های زیر برقرار است:

۱. هر عضو ماکزیمال از مجموعه $\{(0 :_R x) \mid 0 \neq x \in M\}$ یک ایده آل اوّل وابسته به M است و به خصوص $Ass_R(M) \neq \emptyset$.

۲. $Z(M) = \bigcup_{p \in Ass(M)} p$.

برهان. به [۲۵] نتیجه (۳۶.۹) مراجعه شود. □

قضیّه ۱۷.۱.۱. اگر $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow L \longrightarrow 0$ رشته ای دقیق از R-مدول ها و R-همریختی ها باشد. آنگاه

$$Ass_R(M) \subseteq Ass_R(N) \subseteq Ass_R(M) \cup Ass_R(L).$$

برهان. به [۲۲] قضیه (۱.۶) مراجعه شود. □

تعریف ۱۸.۱.۱. فرض کنیم R حلقه ای جابجایی و یکدار و S زیر مجموعه‌ی R باشد. در این صورت S را زیر مجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از R گوییم هرگاه:

۱. $1_R \in S$

۲. $\forall x, y \in S \ ; \ xy \in S$

تعریف ۱۹.۱.۱. فرض کنیم S یک زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی از R باشد. رابطه‌ی $\sim$ روی $R \times S$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

به ازای هر (a, s) و (b, t) عضو $R \times S$:

$$(a, s) \sim (b, t) \Longleftrightarrow \exists u \in S \ s.t \ u(at - bs) = 0$$

به آسانی دیده می‌شود که رابطه‌ی $\sim$ روی $R \times S$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. و برای هر a عضو R و s عضو S کلاس هم‌ارزی (a, s) را با نماد $\frac{a}{s}$ نشان می‌دهیم و داریم:

$$\frac{a}{s} = \{(a', s') \in R \times S \ \mid \ (a', s') \sim (a, s) \ \}$$

مجموعه‌ی تمام کلاس‌های هم‌ارزی $\frac{a}{s}$ را با نماد $S^{-1}R$ نمایش می‌دهیم.

قضیّه ۲۰.۱.۱. $S^{-1}R$ با جمع و ضرب زیر، یک حلقه‌ی جابجایی است:

$$(a/s) + (b/t) = (ta + sb)/st \quad , \quad (a/s)(b/t) = (ab)/(st)$$

تعریف ۲۱.۱.۱. فرض کنیم S زیر مجموعه‌ی بسته ضربی از حلقه R باشد. حلقه کسرهای R نسبت به زیر مجموعه‌ی بسته ضربی S را با $S^{-1}R$ نمایش می دهیم.

یکی از مثال های بنیادی این حلقه، مثالی است که در آن زیر مجموعه بسته ضربی S از R متمم یک ایده آل اول چون $\mathfrak{p}$ از R، یعنی $R \setminus \mathfrak{p}$ است، در این حالت حلقه کسر ها یعنی $S^{-1}R$، حلقه ای شبه موضعی است که با $R_{\mathfrak{p}}$ نمایش داده می شود و ساختن $R_{\mathfrak{p}}$ از R به ازای $\mathfrak{p}$ ای مناسب را موضعی سازی R در $\mathfrak{p}$ می نامند.

عضو صفر حلقه کسرهای R، $S^{-1}R$، $\frac{0}{1}$ و همانی ضربی آن $\frac{1}{1}$ است.

تعریف ۲۲.۱.۱. فرض کنیم M یک R-مدول باشد. منظور از محمل M، مجموعه‌ی

$$\{\mathfrak{p} \in spec(R) \ \mid \ M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}$$

است که با $Supp_R(M)$ یا $Supp(M)$ نمایش می دهند.

قضیّه ۲۳.۱.۱. فرض کنیم M، R-مدول دلخواهی باشد. دراینصورت $Supp_R(M) = \emptyset$ اگر وتنها اگر $M = 0$.

برهان. به [۲۵] لم (۱۵.۹) مراجعه شود.

□

لم ۲۴.۱.۱. فرض کنیم N یک R-مدول با محمل متناهی باشد. در اینصورت ایده آل I از R موجود است به طوریکه $Supp_R(N) = V(I)$.

برهان. فرض کنیم $Supp_R(N) = \{\mathfrak{p}_۱, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$ و قرار می دهیم $I = \bigcap_{i=۱}^{n} \mathfrak{p}_i$ با استفاده از قضیه ۱۱.۱.۱ به راحتی ملاحظه می شود که: $Supp_R(N) = V(I)$. □

قضیّه ۲۵.۱.۱. فرض کنیم $۰ \longrightarrow L \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow ۰$ رشته‌ی دقیق و کوتاهی از R-مدول ها و R-همریختی ها باشد. در اینصورت:

$$Supp_R(N) = Supp_R(L) \cup Supp_R(M).$$

برهان. به [۹] (فصل ۲ بخش ۴) مراجعه شود. □

قضیّه ۲۶.۱.۱. فرض کنید M یک $R-$ مدول متناهی مولد باشد در این صورت:

۱. $Supp_R(M) = V(Ann_R(M))$.

۲. $Supp_R(M/IM) = V(I + Ann_R(M))$.

برهان. به [۲۵] لم (۲۰.۹) مراجعه شود. □

قضیّه ۲۷.۱.۱. فرض کنیم M و N، R-مدول هایی متناهی مولد باشند. در اینصورت

$$Supp_R(M \otimes_R N) = Supp_R(M) \cap Supp_R(N).$$

برهان. به [۹] (فصل ۲ بخش ۴) مراجعه شود. □

قضیّه ۲۸.۱.۱. فرض کنیم R حلقه ای نوتری و M، $R-$مدول باشد. در اینصورت

۱. اگر M متناهی مولد باشد، آنگاه $Ass_R(M)$ مجموعه ای متناهی است.

۲. $Ass_R(M) \subseteq Supp_R(M)$

۳. مجموعه عناصر مینیمال مجموعه های $Ass_R(M)$ و $Supp_R(M)$ با هم مساویند.

برهان. به [۲۲] قضیه (۵.۶) مراجعه شود. □

قضیّه ۲۹.۱.۱. فرض کنیم R حلقه ای نوتری و M، R-مدول دلخواه باشد. در اینصورت هر عضو $Supp_R(M)$ شامل عضوی از $Ass_R(M)$ است.

برهان. با توجه به قضیه قبلی قسمت (۳) به راحتی اثبات می شود. □

قضیّه ۳۰.۱.۱. فرض کنیم R حقه ای نوتری و M، R-مدول آرتینی باشد. در اینصورت مجموعه‌ی ایده آل های اوّل وابسته M متناهی است و $Ass_R(M) \subseteq Max(R)$ و $Ass_R(M) = Supp_R(M)$.

برهان. با توجه به قضیّه‌ی قبلی و [۲۵] تمرین (۴۳.۹) اثبات می‌شود.

□

قضیّه ۳۱.۱.۱. فرض کنیم M، R-مدول باشد. در اینصورت:
M، R-مدول نوتری است اگر و تنها اگر هر زیر مدول M متناهی مولد باشد.

برهان. به [۷] لم (۱۳.۷) مراجعه شود. □

قضیّه ۳۲.۱.۱. فرض کنید R حلقه‌ای نوتری و $\mathfrak{p}$ و $\mathfrak{q}$ ایده‌آل هایی اوّل از حلقه‌ی R باشند به طوری‌که $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}$. اگر ایده‌آل اوّل سره‌ای بین آنها موجود باشد، آنگاه تعداد نامتناهی ایده‌آل اوّل بین آن‌ها موجود می‌باشد.

برهان. به [۲۲] قضیه (۱۴۴) مراجعه شود.

□

قضیّه ۳۳.۱.۱. (قضیّه‌ی اول یکریختی):
فرض کنیم M و N دو R-مدول و $f : M \longrightarrow N$ یک Rهمریختی باشد. در اینصورت $M/kerf \cong_R Imf$. به ویژه اگر f یک R-بروریختی باشد، آنگاه $M/kerf \cong_R N$.

برهان. به [۲۵] قضیه (۳۳.۶) مراجعه شود. □

قضیّه ۳۴.۱.۱. (قضیّه‌ی دوم یکریختی):
فرض کنیمM یک R-مدول باشد و N و P دو زیر مدول از M باشند. در اینصورت

$$P + N/P \cong_R N/N \cap P$$

برهان. به [۲۵] قضیه (۳۷.۶) مراجعه شود. □

قضیّه ۳۵.۱.۱. (قضیّه‌ی سوم یکریختی):
فرض کنیم M یک $R-$ مدول باشد و P و N دو زیر مدول از M باشند به‌طوری‌که $P \leqslant N$. در این صورت

$$\frac{M/P}{N/P} \cong M/N$$

برهان. به [۲۵] قضیه (۳۸.۶) مراجعه شود.

□

قضیّه ۳۶.۱.۱. (قضیّه‌ی القایی):
فرض کنیم M و M' دو R-مدول و $f : M \longrightarrow M'$ یک R-همریختی باشد و فرض کنیم N زیر مدول M و N' زیر مدول M' و $f(N) \subseteq N'$. در اینصورت همریختی القایی

$$f^* : M/N \longrightarrow M'/N'$$

با ضابطه $f^*(x+N) = f(x) + N'$ برای هر $x \in M$ به دست می آید که:

۱. اگر f پوشا باشد، آنگاه f^* پوشاست.

۲. اگر $f^{-1}(N') = N$ آنگاه f^* یک به یک است.

برهان. به راحتی اثبات می شود. □

تعریف ۳۷.۱.۱. فرض کنید $\mathfrak{p} \in Spec(R)$. در این صورت ارتفاع $\mathfrak{p}$ را برابر کوچکترین کران بالای مجموعه‌ی طولهای زنجیره‌های

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n$$

از ایده‌آلهای اول R که در آنها $\mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}$ تعریف می‌کنیم مشروط بر اینکه این مجموعه کوچکترین کران بالا داشته باشد، و در غیر این صورت آن را ∞ می‌گوییم. ارتفاع $\mathfrak{p}$ را با $ht\mathfrak{p}$ (و اگر بخواهیم بر حلقه‌ی مربوطه تاکید کنیم با $ht_R\mathfrak{p}$) نشان می‌دهیم.

تعریف ۳۸.۱.۱. بعد حلقه‌ی R را برابر با:

$$sup\{ht_R\mathfrak{p}\,;\,\mathfrak{p} \in Spec(R)\}$$

تعریف می‌کنیم مشروط بر اینکه مجموعه‌ی فوق کوچکترین کران بالا داشته باشد، و در غیر این صورت آن را ∞ می‌گوییم. بعد R را با $dimR$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳۹.۱.۱. بعد $R-$مدول M را با dim_RM ($dimM$) نشان داده و چنین تعریف می‌کنیم:

$$dim_RM := sup\{n \mid \exists \mathfrak{p}_0, \ldots, \mathfrak{p}_n \in Supp_RM; \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n\}$$

مشروط بر اینکه مجموعه‌ی فوق کوچکترین کران بالا داشته باشد، و در غیر این صورت آن را ∞ می‌گوییم.

اگر $M = 0$ آن‌گاه بنابر قرارداد می‌نویسیم $dim_RM = -1$.

اگر $dim_RM = n$ در این صورت قرار می‌دهیم:

$$Assh_R(M) := \{\mathfrak{p} \in Ass_R(M) \mid dim_R(R/\mathfrak{p}) = n\}$$

قضیّه ۴۰.۱.۱. فرض کنیم $0 \longrightarrow L \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow 0$ رشته‌ی دقیق از R-مدول ها و R-همریختی ها باشد به طوریکه $dim_RN < \infty$. در اینصورت:

$$dim_RN = Max\{dim_RL, dim_RM\}$$

برهان. به قضیه ۲۵.۱.۱ مراجعه شود. $\square$

لم ۴۱.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه و T و T'، دو R-مدول باشند به طوریکه $Ass_R(T) = Ass_R(T')$. در اینصورت $Supp_R(T) = Supp_R(T')$ و در نتیجه $dim_RT = dim_RT'$.

برهان. فرض کنیم $Ass_R(T) = Ass_R(T')$ و $\mathfrak{p} \in Supp_R(T)$ در اینصورت $\mathfrak{q} \in Ass_R(T) = Ass_R(T')$ موجود است که با توجه به قضیه ۲۹.۱.۱ $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$. از طرفی چون $\mathfrak{q} \in Ass_R(T') \subseteq Supp_R(T')$، در اینصورت $\mathfrak{q} \in Supp_R(T')$. لذا $Supp_R(T) \subseteq Supp_R(T')$ و به طور مشابه ثابت می شود $Supp_R(T') \subseteq Supp_R(T)$. پس تساوی برقرار است.

$\square$

لم ۴۲.۱.۱. فرض کنیم $0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$ رشته دقیق و کوتاه از R-مدول ها و R-همریختی ها باشد. در اینصورت $dim_RN \le dim_RM$ و $dim_RM/N \le dim_RM$.

برهان. بنا بر قضیّه‌ی ۲۵.۱.۱، $Supp_R(M) = Supp_R(N) \cup Supp_R(M/N)$. در نتیجه $Supp_R(N) \subseteq Supp_R(M)$. طبق تعریف بعد مدول $dim_RN \le dim_RM$. همین طور $Supp_R(M/N) \subseteq Supp_R(M)$ و در نتیجه $dim_RM/N \le dim_RM$.

□

قضیّه ۴۳.۱.۱. اگر M یک $R-$مدول متناهی مولد باشدآن‌گاه:

$$dim_R M = dim_R R/Ann_R(M).$$

برهان. با توجه به قضیه‌ی ۲۶.۱.۱ قسمت (۱) و تعریف ۳۹.۱.۱، حکم به راحتی نتیجه می‌شود. □

قضیّه ۴۴.۱.۱. فرض کنیم $(R,\mathfrak{m})$ حلقه ای موضعی نوتری و $M \neq ۰$ یک R-مدول متناهی مولد باشد و $x \in \mathfrak{m} \setminus Z(M)$. در اینصورت $dim_R M/xM = dim_R M - ۱$.

برهان. به [۲۲] (فصل ۶ لم ۵) مراجعه شود. □

تعریف ۴۵.۱.۱. $\mathfrak{p}$ را ایده ال اول مینیمال ایده آل I گوییم در صورتیکه $I \subset \mathfrak{p}$ و هیچ ایده آل اول دیگری بین I و $\mathfrak{p}$ موجود نباشد.

تذکر: اگر $\mathfrak{p}$ ایده ال اول مینیمال ایده آل (۰) از حلقه A باشد، آن را اول مینیمال حلقه نیز می نامند.

قضیّه ۴۶.۱.۱. **(قضیه‌ی ایده آل اصلی کرول):**

فرض کنیم R حلقه نوتری و $\mathfrak{p}$ یک ایده آل اول مینیمال (a) از R باشد. در اینصورت $ht\mathfrak{p} \leq ۱$.

برهان. به [۲۵] (فصل ۱۵ قضیه ۲) مراجعه شود. □

قضیّه ۴۷.۱.۱. **(تعمیم قضیه‌ی ایده آل اصلی کرول):**

فرض کنیم R حلقه نوتری و $\mathfrak{p}$ یک اول مینیمال روی یک ایده آل $(a_۱, \dots, a_n)$ از R باشد. در اینصورت $ht\mathfrak{p} \leq n$.

برهان. به [۲۵] (فصل ۱۵ قضیه ۴) مراجعه شود. □

قضیّه ۴۸.۱.۱. **(عکس تعمیم قضیه‌ی ایده آل اصلی کرول):**

فرض کنیم R حلقه نوتری و $\mathfrak{p} \in SpecR$ و $ht\mathfrak{p} = n$. در اینصورت $a_۱, \dots, a_n \in R$ موجود است به طوریکه $\mathfrak{p}$ یک اول مینیمال $(a_۱, \dots, a_n)$ است.

برهان. به [۲۵] (فصل ۱۵ قضیه ۱۳) مراجعه شود. □

تعریف ۴۹.۱.۱. فرض کنیم $(R,\mathfrak{m})$ حلقه موضعی و $dimR = d$. در اینصورت هر $a_۱, \dots, a_d \in R$ را به طوریکه $\mathfrak{m} = \sqrt{(a_۱, \dots, a_d)}$ یک سیستم پارامتری برای R می نامیم.

قضیّه ۵۰.۱.۱. فرض کنیم $(R,\mathfrak{m})$ حلقه موضعی و نوتری و $a_۱, \dots, a_n \in m$. در اینصورت

$$dimR - n \leq dimR/(a_۱, \dots, a_n) \leq dimR$$

به علاوه

$dimR/(a_۱, \dots, a_n) = dimR - n$ اگر و تنها اگر $a_۱, \dots, a_n$ قسمتی از یک سیستم پارامتری باشد. یعنی می توان آن را به سیستم پارامتری توسیع داد.