دانشگاه سیستان و بلوچستان

تحصیلات تکمیلی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض (جبر)

عنوان:

پوشش‌های تصویری، به طور قوی هموار و صادق در شرط $(\mathbf{P})$ سیستم‌های (دوری) روی تکواره‌ها

استاد راهنما:

دکتر اکبر گلچین

تحقیق و نگارش:

فریبا رضائی

بهمن ۱۳۹۰

تقدیم به پیشگاه مقدس پدر و مادر عزیزم

آنان که شاعران از صبر و تحمل بی مانندشان در پرورش جگرگوشه‌هایشان دم‌ها زده‌اند و علمای اخلاق از شأن و جایگاه با عظمت‌شان سخن‌ها گفته‌اند، آنان که اگر مرا شکوفایی هست، تصویرگر شکفتنم خود بودند و وجود پاکشان در پیچ و خم روزگار، بهترین حامی و پشتیبان من است. همانا هر آن چه دارم و خواهم داشت پیشکش قدوم سرسبزشان باد.

تقدیم با عشق به خواهران گلم

مگر می‌شود حدیث مهرتان را به ورطه فراموشی سپرد و نگاه نگرانتان را که دلواپس لحظات موفقیت و تلاشم بود را به خاطر نداشت. حضور روشنتان را در آسمان زندگیم عاشقانه می‌ستایم.

در آخر برادران عزیزم، جواد و ایمان بزرگوار

شما که مثل خورشید گرم، مثل باران با سعادت و مثل دریا کریم و بی‌منت و مثل ایثار خوب و ماندگار، لطفتان را از من دریغ نکردید، می‌خواهم بگویم تا زندگی در جریان است دوستتان خواهم داشت و اینک غرق در اشتیاق، از خود خواهم پرسید: آیا بی‌ریاترین احساس مهر و عشقم را خواهید پذیرفت؟ ... خدا کند.

و هدیه به آنان که به من مهر می‌ورزند
و من مهرشان را قدر می‌دانم.

سپاس‌گزاری

با سپاس و ستایش به درگاه یگانه بی‌همتا، خداوند خوبی‌ها و مهربانی‌ها، که همانا در سایه لطف اوست که آمال و آرزوهایم به حقیقت پیوست و مرا کی توان آن خواهد بود که این شکر عظیم را نیکو به فرجام رسانم.

با سپاس از اساتید گرانقدرم که تمامی هستی و وجودم، غرق در ارادت و عشق نسبت به این عزیزان است و همواره در پیشگاه با صفایشان قدردان خواهم بود و مرام پاکشان را خواهم ستود، چرا که در حیطه علم و آگاهی‌ام مهم‌ترین نقش را به دوش کشیده‌اند و من خود را خسی شناور در اقیانوس بی‌کران دانش و فضیلتشان می‌دانم.

اینک شایسته و بایسته است از استاد فرهیخته و دانشمندم جناب آقای دکتر گلچین که راهنمایی مرا در این پایان‌نامه بر عهده داشته و در پیشرفت علمی‌ام با من سهیم و هم‌قدم بوده‌اند و راهنمایی‌های دلسوزانه و مهربانانه‌شان همانند چراغی فروزان، روشنگر راهم بوده و مرا از حمایت‌های فکری و معنوی‌شان بی‌نصیب نگذاشته‌اند با کمال افتخار تقدیر نموده و جایگاه والایشان را ارج نهم.

از داوران گران‌مایه این پایان‌نامه، جناب آقای دکتر لشکری‌پور و جناب آقای دکتر محمدزاده ثانی، تشکری ویژه دارم، خصوصاً جناب آقای دکتر لشکری‌پور که حضور در محضر ایشان در سمت شاگردی برایم افتخاری بس ارزنده و مایه مباهات است. همچنین از نماینده اندیشمند تحصیلات تکمیلی، سرکار خانم دکتر رضائی بسیار سپاس‌گزارم و از پروردگار برایشان عزت روزافزون طلب می‌نمایم.

اما بی‌مناسبت نیست که از دوستان شفیق و هم‌فکرم که در طول مدت تحصیل، همراهی‌شان مایه دلگرمی‌ام بود، صمیمانه قدردانی نموده و از ایزد منان سرافرازی بیشترشان را آرزو نمایم.

حق است که بار دیگر در مقابل الطاف بی‌ریا و بی‌پایان خانواده‌ام اظهار ادب و احترام کنم که همانا هنوز زمزمه دعاهایشان و آوای خوش محبت‌شان در گوش‌هایم طنین‌انداز و در خاطرم بیدار است.

فریبا رضائی

چکیده

بیکن[۱]، بشیر[۲] و اِنُچز[۳] در سال ۲۰۰۱[۱] بالاخره یک حدس طولانی در نظریه مدول‌ها را که بیان می‌کند همه مدول‌ها روی یک حلقه یکدار، دارای پوشش هموار هستند، ثابت کردند. اما تنها کار معتبر در مورد پوشش سیستم‌ها روی یک تکواره، متعلق به ایزبل[۴] در سال ۱۹۷۱[۸]، فانتین[۵] در سال ۱۹۷۶[۵] و کیلپ[۶] در سال ۱۹۹۶[۹] می‌باشد، که آن‌ها نیز تنها به بررسی پوشش تصویری پرداختند. در این پایان‌نامه، شرایطی را روی تکواره‌ها در نظر می‌گیریم تا سیستم‌های راست دوری آن‌ها دارای یک پوشش تصویری باشند، سپس به شناسایی تکواره‌های کاملی می‌پردازیم که روی آن‌ها هر سیستم راست به طور قوی هموار، دارای یک پوشش تصویری باشد. همچنین به مطالعه پوشش‌های به طور قوی هموار و صادق در شرط (P) سیستم‌های راست دوری پرداخته و شرایط لازم و کافی برای وجود چنین پوشش‌هایی را ارائه می‌کنیم. به علاوه، به شناسایی تکواره‌هایی می‌پردازیم که روی آن‌ها هر سیستم راست، دارای یک پوشش به طور قوی هموار(صادق در شرط (P)) باشد، که این تکواره‌ها مشابه با تکواره‌های کامل، توسط شرط (A) و داشتن پوشش به طور قوی هموار(صادق در شرط (P)) برای هر سیستم راست دوری توصیف می‌شوند. در پایان، به بررسی و اثبات یکتایی پوشش‌های تصویری و به طور قوی هموار سیستم‌های راست(دوری) روی تکواره‌ها می‌پردازیم.

---

[۱] $Bican$

[۲] $Bashir$

[۳] $Enochs$

[۴] $Isbell$

[۵] $Fountain$

[۶] $Kilp$

فهرست مندرجات

پیشگفتار

در این پایان‌نامه، نخست پوشش سیستم‌ها روی تکواره‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. هدف اصلی ما بررسی پوشش‌های تصویری، به طور قوی هموار و صادق در شرط (P) سیستم‌های (دوری) روی تکواره‌ها است.

مطالعه سیستم‌ها روی تکواره‌ها حدود سال ۱۹۶۰ به بعد شروع شد و ادامه پیدا کرد. مقالات زیادی در رابطه با خواص همواری سیستم‌ها روی تکواره‌ها (به عنوان مثال [۲, ۳, ۶, ۱۰, ۱۲, ۱۳]) انتشار یافت، که خواص همواری سیستم‌ها را مورد بررسی قرار می‌دادند. خواص همواری سیستم‌ها روی تکواره‌ها، در زنجیر به طور اکید نزولی زیر صدق می‌کنند:

آزاد بودن $\Leftarrow$ تصویری بودن $\Leftarrow$ به طور قوی هموار $\Leftarrow$ شرط (P) $\Leftarrow$ همواری $\Leftarrow$ به طور ضعیف همواری $\Leftarrow$ به طور اساسی ضعیف همواری $\Leftarrow$ بدون تاب بودن

این پایان‌نامه، مشتمل بر چهار فصل است. در فصل اول برخی تعاریف، قضایا و مفاهیم مقدماتی را که برای آشنایی با موضوع پایان‌نامه لازم و در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرد، بیان می‌کنیم.

فصل دوم از سه بخش تشکیل شده است. در بخش اول، مفاهیم شرط (P) و شرط (E) روی سیستم‌های راست دوری را بررسی کرده و شرایطی را روی یک تکواره در نظر می‌گیریم به طوری که سیستم‌های راست دوری آن در شرط (P)(شرط (E)) صدق کنند. در بخش دوم، مفهوم پوشش و برووریختی‌های هم‌ضروری را مطرح می‌کنیم و به توصیف برووریختی‌های هم‌ضروری برحسب رده‌های همنهشتی می‌پردازیم.

کار مطالعه روی تکواره‌های کامل نخستین بار توسط ایزبل[۷] در [۸] صورت گرفت. او نشان داد که یک تکواره کامل راست است اگر و فقط اگر در شرط (A) و شرط (D) صدق کند. با الهام گرفتن از این حقیقت که حلقه‌های کامل، حلقه‌هایی هستند که روی آن‌ها هر حد مستقیم از مدول‌های تصویری، تصویری است، فانتین[۸] در [۵] ثابت کرد که این توصیف برای تکواره‌های کامل نیز معتبر است. به طور معادل، او نشان داد که تکواره S کامل راست است اگر و فقط اگر هر Sـ سیستم راست به طور قوی هموار، تصویری باشد. از این دید، در بخش سوم، خواهیم دید که برای این که تکواره S کامل راست باشد، کافی است نشان دهیم که هر سیستم راست(به طور موضعی دوری) به طور قوی هموار، دارای یک پوشش تصویری است.

فصل سوم از سه بخش تشکیل شده است. در بخش اول، شرایط لازم و کافی برای این که هر سیستم راست دوری، دارای یک پوشش به طور قوی هموار باشد را ارائه کرده و رده‌هایی از تکواره‌ها را عنوان می‌کنیم که تمام سیستم‌های راست دوری آن‌ها دارای پوشش به طور قوی هموار هستند. همچنین نشان می‌دهیم سیستم‌های دوری وجود دارند که دارای پوشش به طور قوی هموار نمی‌باشند. در بخش دوم، به بررسی پوشش‌هایی می‌پردازیم که در شرط (P) صدق می‌کنند و به نتایجی مشابه نتایج بخش اول دست می‌یابیم. در بخش سوم، به شناسایی تکواره‌هایی می‌پردازیم که روی آن‌ها تمام سیستم‌های راست، دارای پوشش به طور قوی هموار(صادق در شرط (P)) هستند، برای رسیدن به این هدف، یک شرط معادل با شرط (A) معرفی می‌کنیم.

در فصل چهارم، به بررسی و اثبات یکتایی پوشش‌های تصویری و به طور قوی هموار سیستم‌های راست(دوری) روی تکواره‌ها می‌پردازیم.

---

[۷] $Isbell$

[۸] $Fountain$

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱—۱ نیم‌گروه‌ها و تکواره‌ها

تعریف ۱.۱.۱. گروه‌وار $(S,*)$ عبارت است از یک مجموعه ناتهی S که یک عمل دوتایی $*$ روی آن تعریف شده باشد.

$(S,*)$ را نیم‌گروه گوییم، در صورتی که عمل $*$ شرکت‌پذیر باشد، به عبارت دیگر

$$(\forall x,y,z\in S):\quad x*(y*z)=(x*y)*z.$$

از این پس برای راحتی به جای $(*)$ از نماد " . " یا بدون نماد و فقط با کنار هم قرار دادن آن‌ها استفاده خواهیم کرد.

اگر نیم‌گروه S خاصیت اضافی زیر را داشته باشد، آن را نیم‌گروه تعویض‌پذیر گوییم:

$$(\forall x,y\in S):\quad xy=yx.$$

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید S یک نیم‌گروه باشد. اگر عنصر ۱ به گونه‌ای باشد که

$$(\forall x\in S):\quad ۱x=x۱=x,$$

آن‌گاه ۱ را عنصر همانی نیم‌گروه S و S را نیم‌گروه یکدار یا تکواره گوییم. اگر S دارای عنصر همانی نباشد، می‌توان با اضافه نمودن ۱ به S و با تعریف عمل ضرب به صورت زیر، آن را به یک تکواره تبدیل کرد:

$$(\forall x\in S):\quad ۱x=x=x۱,\quad ۱۱=۱.$$

در این صورت $S\cup\{۱\}$ یک تکواره است و نماد $S^۱$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S^۱=\begin{cases} S & ۱\in S\\ S\cup\{۱\} & ۱\notin S.\end{cases}$$

S^1 را تکواره به دست آمده از S با الحاق عنصر همانی به آن گوییم. اگر نیم‌گروه S با حداقل دو عنصر، شامل عنصر 0 به گونه‌ای باشد که

$$(\forall x \in S): \quad 0x = x0 = 0,$$

آن‌گاه 0 را عنصر صفر نیم‌گروه S گوییم.

لازم به ذکر است که S شامل حداکثر یک عنصر صفر می‌باشد. اگر نیم‌گروه S شامل عنصر صفر نباشد، می‌توان عنصر صفر را با خاصیت زیر به آن اضافه نمود:

$$(\forall x \in S): \quad 0x = x = x0, \quad 00 = 0.$$

در این صورت $S \cup \{0\}$ یک نیم‌گروه شامل عنصر صفر می‌باشد و نماد S^0 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S^0 = \begin{cases} S & 0 \in S \\ S \cup \{0\} & 0 \notin S. \end{cases}$$

اگر ابهامی پیش نیاید آن را نیم‌گروه به دست آمده از S با عنصر صفر الحاقی گوییم.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید S یک نیم‌گروه باشد. عنصر $a \in S$ را صفر راست(چپ) گوییم، هرگاه به ازای هر $x \in S$، $xa = a$ $(ax = a)$ و آن را صفر گوییم، هرگاه $ax = xa = a$.
نیم‌گروه S را صفر راست(چپ) گوییم، هرگاه تمام عناصر آن صفر راست(چپ) باشند.

تعریف ۴.۱.۱. نیم‌گروه بدون صفر S را گروه گوییم، هرگاه

$$(\forall x \in S): \quad xS = Sx = S.$$

اگر G یک گروه باشد، آن‌گاه $G \cup \{0\}$ یک نیم‌گروه است که آن را 0ـ گروه گوییم و با G^0 نمایش می‌دهیم.

مثال‌هایی از نیم‌گروه و تکواره

(۱) $(\mathbb{N}, .)$ یک تکواره و $(\mathbb{N}, +)$ یک نیم‌گروه می‌باشد.

(۲) $(\mathbb{Z},\ ged)$ با عمل دوتایی $z_۱.z_۲ = ged(z_۱, z_۲)$، که در آن ged بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک می‌باشد، یک نیم‌گروه است.

(۳) $(Mat_n(K), .)$ متشکل از تمام ماتریس‌های $n \times n$ با ضرایب در میدان K، تحت ضرب معمولی ماتریس‌ها یک تکواره است.

نیم‌گروه و تکواره کلمه آزاد

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید X یک مجموعه باشد و $X \neq \emptyset$، که در این جا آن را یک حرف الفبایی می‌نامیم و X^+ مجموعه همه کلمات روی الفبای X باشد، یعنی مجموعه همه دنباله‌های $x_۱x_۲...x_n$ که $x_i \in X$، $i \in \mathbf{n}(\mathbf{n} = \{۱, ..., n\})$، $n \in \mathbb{N}$. کلمه‌های $x_۱x_۲...x_n$ و $y_۱y_۲...y_m$ از X^+ برابرند اگر و فقط اگر $n = m$ و $x_i = y_i$، $i \in \mathbf{n}$.

با تعریف ضرب کلمه‌ها(به صورت اتصال) توسط

$$(x_۱x_۲...x_n).(y_۱y_۲...y_m) = x_۱x_۲...x_ny_۱y_۲...y_m,$$

X^+ به یک نیم‌گروه تبدیل می‌شود، که نیم‌گروه کلمه آزاد روی مجموعه X یا نیم‌گروه آزاد با پایه X نامیده می‌شود.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید X^+ یک نیم‌گروه آزاد با پایه X باشد. در این صورت $X^* = X^+ \cup \{\emptyset\}$، تکواره کلمه آزاد روی X یا تکواره آزاد با پایه X نامیده می‌شود.

زیرنیم‌گروه، مجموعه مولد، ایدآل

تعریف ۷.۱.۱. زیرمجموعه ناتهی T از نیم‌گروه S را زیرنیم‌گروه گوییم، هرگاه $T^{2} \subseteq T$، به عبارت دیگر T زیرنیم‌گروه S است، هرگاه تحت عمل S بسته باشد، یعنی

$$(\forall a, b \in T): \quad ab \in T.$$

اگر S تکواره‌ای با عنصر همانی ۱ باشد، آن‌گاه زیرنیم‌گروه T را زیرتکواره S گوییم، اگر $1 \in T$. اگر S یک گروه باشد، آن‌گاه زیرتکواره T از S را زیرگروه S گوییم، هرگاه به ازای هر $a \in T$، داشته باشیم $a^{-1} \in T$.

تعریف ۸.۱.۱. به ازای هر زیرمجموعه ناتهی A از نیم‌گروه S، کوچک‌ترین زیرنیم‌گروه S شامل A، عبارت است از $\langle A \rangle = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A^{n}$، که آن را زیرنیم‌گروه تولید شده توسط A گوییم(منظور از A^{n}، ترکیب مجموعه A به تعداد n بار می‌باشد). اگر $S = \langle A \rangle$، آن‌گاه A، یک مجموعه مولد برای S نامیده می‌شود. اگر $A = \{a\}$ و $S = \langle a \rangle$، آن‌گاه S نیم‌گروه تک‌مولدی یا دوری نامیده می‌شود.

فرض کنید $S = \langle a \rangle = \{a, a^{2}, a^{3}, ...\}$، یک نیم‌گروه تک‌مولدی باشد. اگر هیچ تکراری در a، a^{2}، a^{3} و ... وجود نداشته باشد، یعنی اگر $a^{m} = a^{n}$، آن‌گاه $m = n$، در این صورت $S = \langle a \rangle$ یک نیم‌گروه تک‌مولدی نامتناهی و a یک عنصر با مرتبه نامتناهی است.

فرض کنید G یک گروه و $a \in G$ باشد. اگر d کوچک‌ترین عدد مثبتی باشد که $a^{d} = 1$، آن‌گاه d را مرتبه a گوییم و می‌نویسیم $O(a) = |a| = d$. بنابراین $|\langle a \rangle| = d$، که در این صورت $\langle a \rangle = \{a, a^{2}, ..., a^{d-1}, a^{d} = 1\}$، در غیر این صورت، یعنی اگر هیچ توانی از a برابر ۱ نشود، گوییم مرتبه a بی‌نهایت است و می‌نویسیم $O(a) = |a| = \infty$.

تعریف ۹.۱.۱. زیرمجموعه ناتهی I از نیم‌گروه S را ایدآل چپ(راست) S گوییم، اگر $SI \subseteq I$ ($IS \subseteq I$). هر ایدآل چپ و راست S را یک ایدآل دوطرفه یا به اختصار ایدآل S گوییم. واضح است که هر ایدآل S یک زیرنیم‌گروه S است، ولی عکس آن برقرار نیست.

مثال ۱۰.۱.۱. اگر $S = \{۱, a, ۰\}$، نیم‌گروهی با شرط $a^۲ = ۰$ باشد، آن‌گاه $T = \{۰, ۱\}$ زیرنیم‌گروه S است، زیرا نسبت به عمل S بسته است، اما ایدآل S نیست، زیرا

$$TS = \{۱, a, ۰\} \not\subseteq T.$$

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنید S یک نیم‌گروه و $a \in S$ باشد. کوچک‌ترین ایدآل چپ S شامل a عبارت است از $S^۱a = Sa \cup \{a\}$، که آن را ایدآل اصلی چپ تولید شده توسط a گوییم. به طور مشابه $aS^۱ = aS \cup \{a\}$ را ایدآل اصلی راست تولید شده توسط a گوییم و ایدآل اصلی تولید شده توسط a عبارت است از:

$$S^۱aS^۱ = SaS \cup aS \cup Sa \cup \{a\}.$$

مجموعه مرتب جزئی

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنید X یک مجموعه باشد. یک ترتیب(ترتیب جزئی) روی X رابطه‌ای دوتایی مانند $\leq$ روی X است به طوری که به ازای هر $x, y, z \in X$، داریم

(۱) $x \leq x$؛

(۲) $x \leq y$ و $y \leq x$، نتیجه دهد که $x = y$؛

(۲) $x \leq y$ و $y \leq z$، نتیجه دهد که $x \leq z$.

خواص بالا به ترتیب انعکاسی، پادتقارنی و تعدی نامیده می‌شوند.

مجموعه X مجهز به رابطه ترتیب(ترتیب جزئی) یک مجموعه مرتب(مرتب جزئی) گفته می‌شود. اگر X یک مجموعه مرتب جزئی با رابطه ترتیب جزئی $\leq$ باشد، چنین می‌نویسیم $(X, \leq)$.

تعریف ۱.۱.۱۳. مجموعه مرتب جزئی $(X, \leq)$ را یک مجموعه مرتب خطی یا یک زنجیر گوییم، هرگاه به ازای هر $x, y \in X$، $x \leq y$ یا $y \leq x$.

تعریف ۱.۱.۱۴. فرض کنید $(X, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزئی باشد. عنصر $w \in X$ را عنصر ماکسیمال (مینیمال) $(X, \leq)$ گوییم، هرگاه هیچ عنصر $x \in X$ وجود نداشته باشد به طوری که $w \leq x$ $(x \leq w)$ و $w \neq x$.

تعریف ۱.۱.۱۵. مجموعه مرتب جزئی $(X, \leq)$ را خوش‌ترتیب گوییم، هرگاه هر زیرمجموعه ناتهی X، دارای یک عنصر مینیمال باشد.

تعریف ۱.۱.۱۶. فرض کنید Y یک زیرمجموعه ناتهی از مجموعه مرتب جزئی $(X, \leq)$ باشد. عنصر $c \in X$ را یک کران پایین (بالا) برای Y گوییم، هرگاه به ازای هر $y \in Y$، $c \leq y$ $(y \leq c)$.

اگر مجموعه کران‌های پایین (بالا) Y، ناتهی و دارای عنصر ماکسیمم (مینیمم) d باشد، آن‌گاه d بزرگ‌ترین کران پایین (کوچک‌ترین کران بالا) برای Y نامیده می‌شود. این عنصر در صورت وجود، یکتا است و به صورت $d = \wedge\{y \mid y \in Y\}$ $(d = \vee\{y \mid y \in Y\})$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۱.۱.۱۷. فرض کنید $(X, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزئی باشد. اگر به ازای هر $a, b \in X$، $a \wedge b$ $(a \vee b)$ وجود داشته باشد، گوییم $(X, \leq)$ یک نیم‌مشبکه پایین (بالا) است.

اگر به ازای هر $a, b \in X$، $a \wedge b$ و $a \vee b$ وجود داشته باشند، آن‌گاه $(X, \leq)$ یک مشبکه نامیده می‌شود.

در صورتی که برای هر زیرمجموعه S از X کوچک‌ترین کران بالا و بزرگ‌ترین کران پایین وجود داشته باشند، آن‌گاه $(X, \leq)$ یک مشبکه کامل نامیده می‌شود.

لم ۱۸.۱.۱(لم زُرن)([۱۱]). اگر $(X, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزئی باشد به طوری که هر زنجیر از عناصر X، دارای یک کران بالا در X باشد، آن‌گاه X دارای حداقل یک عنصر ماکسیمال است.

رابطه هم‌ارزی

تعریف ۱۹.۱.۱. فرض کنید X یک مجموعه و ρ یک رابطه روی X باشد. در این صورت ρ را یک رابطه هم‌ارزی روی X گوییم، هرگاه واجد خواص زیر باشد:

(۱) به ازای هر $x \in X$، $x \ \rho \ x$؛

(۲) به ازای هر $x, y \in X$، $x \ \rho \ y$ نتیجه دهد که $y \ \rho \ x$؛

(۳) برای هر $x, y, z \in X$، $x \ \rho \ y$ و $y \ \rho \ z$ نتیجه دهد که $x \ \rho \ z$.

خواص بالا به ترتیب انعکاسی، تقارنی و تعدی نامیده می‌شوند.

رابطه‌های هم‌ارزی خاص روی مجموعه X، عبارت هستند از رابطه قطری $id_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$، که آن را با Δ_X نیز نمایش می‌دهیم و رابطه کلی $X \times X$، که آن را با ∇_X نمایش می‌دهیم.

فرض کنید $\{P_i \mid i \in I\}$ خانواده‌ای ناتهی از روابط هم‌ارزی روی مجموعه X باشد. به راحتی می‌توان بررسی کرد که $\cap\{P_i \mid i \in I\}$ نیز یک رابطه هم‌ارزی روی X است و اگر R یک رابطه دلخواه روی X باشد، آن‌گاه خانواده روابط هم‌ارزی روی X شامل R ناتهی است(زیرا $X \times X$ یک چنین هم‌ارزی است). بنابراین اشتراک تمام هم‌ارزی‌های روی X و شامل R، کوچک‌ترین رابطه هم‌ارزی شامل R است که آن را هم‌ارزی تولید شده توسط R گوییم و با R^e نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۰.۱.۱. فرض کنید S یک رابطه روی مجموعه X باشد. S^{∞} را بست متعدی S نامیده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S^{\infty} = \bigcup_{n=1}^{\infty} S^n.$$

لم ۲۱.۱.۱([۷]). فرض کنید S یک رابطه روی مجموعه X باشد، در این صورت S^{∞} کوچک‌ترین رابطه متعدی روی X و شامل S است.

قضیه ۲۲.۱.۱([۷]). اگر R یک رابطه روی مجموعه X باشد، آن‌گاه $R^e = \left[R \cup R^{-1} \cup 1_X\right]^{\infty}$.

لم ۲۳.۱.۱([۷]). اگر R یک رابطه روی مجموعه X باشد، آن‌گاه $(x,y) \in R^e$ اگر و فقط اگر $x = y$ یا به ازای عنصری مانند $n \in \mathbb{N}$، دنباله‌ای از انتقالات به صورت $x = z_1 \longrightarrow z_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow z_n = y$ وجود داشته باشد به طوری که برای $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$، $(z_i, z_{i+1}) \in R$ یا $(z_{i+1}, z_i) \in R$.

همنهشتی و نیم‌گروه خارج‌قسمتی

تعریف ۲۴.۱.۱. فرض کنید $\rho \subseteq S \times S$ یک رابطه هم‌ارزی روی نیم‌گروه S باشد. در این صورت ρ یک همنهشتی چپ روی S است، هرگاه

$$(\forall s,t,u \in S): \quad s\ \rho\ t \Longrightarrow (us)\ \rho\ (ut);$$

ρ را همنهشتی راست روی S گوییم، هرگاه

$$(\forall s,t,u \in S): \quad s \rho t \Longrightarrow (su)\ \rho\ (tu);$$

و آن را یک همنهشتی روی S گوییم، هرگاه

$$(\forall s,t,u,v \in S): \quad (s \ \rho \ t), (u \ \rho \ v) \Longrightarrow (su) \ \rho \ (tv).$$

لم ۲۵.۱.۱([۷]). فرض کنید S یک نیم‌گروه باشد. مجموعه $S/\rho = \{[a]_\rho : a \in S\}$ تحت عمل $[s]_\rho[t]_\rho = [st]_\rho$ یک نیم‌گروه است، که آن را نیم‌گروه خارج‌قسمتی گوییم. اگر S یک تکواره باشد، آن‌گاه S/ρ نیز یک تکواره با عنصر همانی $[۱]_\rho$ است.

فرض کنید I یک ایدآل سره و ρ یک همنهشتی روی نیم‌گروه S باشد. در این صورت

$$\rho_I = (I \times I) \cup ۱_S,$$

یک همنهشتی روی S می‌باشد.

با توجه به تعریف ρ_I بدیهی است که $x \ \rho_I \ y$ اگر و فقط اگر $x = y$، یا x و y هر دو در I باشند. حال S/ρ_I را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S/\rho_I = \{I\} \cup \{\{x\} : x \in S\backslash I\}.$$

عمل ضرب دو عنصر از S/ρ_I را چنین در نظر می‌گیریم، که اگر نماینده آن‌ها در $S\backslash I$ قرار داشته باشد، مشابه ضرب آن‌ها در S و در غیر این صورت برابر I باشد. با توجه به مطالب فوق بدیهی است که S/ρ_I یک نیم‌گروه است. S/ρ_I را ترجیحاً با S/I نشان می‌دهیم و آن را نیم‌گروه خارج‌قسمتی ریس [۱] گوییم.

واضح است که اشتراک یک خانواده ناتهی از همنهشتی‌ها روی نیم‌گروه S، یک همنهشتی روی S است. لذا می‌توان برای هر رابطه R روی S، کوچک‌ترین همنهشتی یکتای شامل R، روی S را در نظر گرفت که آن را همنهشتی تولید شده توسط R گفته و با $R^\#$ نمایش می‌دهیم.

به ازای هر رابطه دلخواه R روی S تعریف می‌کنیم

$$R^c = \Big\{(xay, xby) : x, y \in S^۱, (a,b) \in R\Big\}.$$

[۱] Rees

قضیه ۲۶.۱.۱([۷]). به ازای هر رابطه R روی نیم‌گروه S داریم
$$R^{\#} = (R^c)^e.$$

لم ۲۷.۱.۱([۷]). فرض کنید R یک رابطه روی نیم‌گروه S باشد و $a, b \in S$. در این صورت $(a, b) \in R^{\#}$ اگر و فقط اگر $a = b$، یا به ازای عنصری مانند $n \in \mathbb{N}$، یک دنباله از Rـانتقالات مقدماتی به صورت $a = z_۱ \longrightarrow z_۲ \longrightarrow ... \longrightarrow z_n = b$ وجود داشته باشد که a را به b متصل می‌کند.

همریختی نیم‌گروه‌ها و تکواره‌ها

تعریف ۲۸.۱.۱. فرض کنید $(S, .)$ و $(T, .)$ دو نیم‌گروه باشند. در این صورت نگاشت $\varphi : S \longrightarrow T$ را یک همریختی نیم‌گروه‌ها گوییم، هرگاه

$$(\forall x, y \in S): \quad \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y).$$

اگر S و T تکواره باشند به طوری که ۱_S و ۱_T به ترتیب عناصر همانی S و T باشند، آن‌گاه $\varphi : S \longrightarrow T$ را همریختی تکواره‌ها گوییم، هرگاه

$$(\forall x, y \in S): \quad \varphi(xy) = \varphi(x)\phi(y), \quad \varphi(۱_S) = ۱_T.$$

در هر دو مورد

$$\ker \varphi = \{(a, b) \in S \times S \mid \varphi(a) = \varphi(b)\},$$

همنهشتی هسته از همریختی φ نامیده می‌شود.

تعریف ۲۹.۱.۱. اگر ρ یک همنهشتی راست روی نیم‌گروه S باشد، آن‌گاه نگاشت کانونی

$$\begin{aligned} \pi_\rho : S &\longrightarrow S/\rho \\ x &\longmapsto [x]_\rho \end{aligned}$$

را پوشای کانونی گوییم.

اگر φ یک‌به‌یک باشد، آن را تکریختی و اگر پوشا باشد، آن را برووریختی می‌نامیم. همچنین اگر φ یک‌به‌یک و پوشا باشد، آن را دوسویی می‌نامیم. در این صورت S و T را یکریخت گوییم و می‌نویسیم $S \cong T$.

نیم‌گروه آزاد، حذف‌پذیر، حل‌پذیر و ساده

تعریف ۳۰.۱.۱. زیرمجموعه M از عناصر مولد نیم‌گروه S را یک پایه S گوییم، هرگاه هر عنصر S، دارای نمایش یکتایی به صورت حاصل‌ضرب عناصر M باشد.

تعریف ۳۱.۱.۱. یک نیم‌گروه را آزاد گوییم، هرگاه شامل یک پایه باشد. تکواره T را آزاد گوییم، هرگاه برای یک نیم‌گروه آزاد مانند S، داشته باشیم $T = S^1$.

تعریف ۳۲.۱.۱. فرض کنید S یک نیم‌گروه باشد. عنصر $c \in S$ را حذف‌پذیر راست(چپ) گوییم، هرگاه به ازای هر $a, b \in S$، اگر $ac = bc$ $(ca = cb)$، آن‌گاه $a = b$ و عضو c را حذف‌پذیر گوییم، هرگاه حذف‌پذیر چپ و راست باشد. نیم‌گروه S را حذف‌پذیر راست(چپ) گوییم، هرگاه تمام عناصر آن حذف‌پذیر راست(چپ) باشند.

تعریف ۳۳.۱.۱. نیم‌گروه S را(به طور یکتا) حل‌پذیر راست(چپ) گوییم، هرگاه به ازای هر $a, b \in S$، عنصر(یکتای) $s \in S$ وجود داشته باشد به طوری که $as = b$ $(sa = b)$.
نیم‌گروه به طور یکتا حل‌پذیر راست(چپ) را یک راست(چپ) گروه گوییم.