بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی
گروه آمار

**پایان‌نامه**

**برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته**

**آمار ریاضی**

**عنوان**

# متغیرهای همراه چند بعدی داده‌های ترتیبی

**(شامل آماره‌های مرتب سانسور فزاینده نوع دو و رکوردها)**

استاد راهنما

**دکتر مصطفی رزمخواه**

استاد مشاور

**دکتر مجید سرمد**

نگارنده

سمانه جلمبادانی

بهمن ماه ۱۳۹۱

بسمه تعالی

مشخصات پایان‌نامه تحصیلی دانشجویان

دانشگاه فردوسی مشهد

عنوان:

متغیرهای همراه چند بعدی داده‌های ترتیبی

(شامل آماره‌های مرتب سانسور فزاینده نوع دو و رکوردها)


نام نویسنده: سمانه جلمبادانی

استاد راهنما: دکتر مصطفی رزمخواه

استاد مشاور: دکتر مجید سرمد

دانشکده: علوم ریاضی

گروه: آمار

رشته تحصیلی: آمار ریاضی



تاریخ تصویب: ۱۳۹۱/۰۳/۱۷ تاریخ دفاع: ۱۳۹۱/۱۱/۹

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد تعداد صفحات: ۱۱۲



چکیده پایان‌نامه :

زمانی‌که صحبت از اعمال ترتیب در یك دنباله از بردارهای تصادفی دو یا چند متغیری به میان می‌آید، مسأله متغیرهای همراه از اهمیت بخصوصی برخوردار است. متغیرهای همراه در حقیقت متغیرهای متناظر با داده‌های ترتیبی یکی از مولفه‌های بردارهای تصادفی مورد نظر می‌باشند. در این پایان‌نامه ابتدا نظریه توزیع این متغیرها مورد بررسی قرار گرفته است. سپس با در نظر گرفتن خانواده چندمتغیری فارلی گامبل مورگنشترن به محاسبه گشتاورها و کران ناپارامتری برای کواریانس متغیرهای همراه دو بعدی متناظر با آماره‌های مرتب سانسور فزاینده نوع دو و رکوردها پرداخته‌ایم. همچنین میزان اطلاع فیشر نهفته در این متغیرها را نیز بررسی نموده‌ایم. بررسی‌های مشابهی برای خانواده شبه نمایی سه‌متغیره انجام شده است.



واژگان کلیدی: گشتاورهای متغیرهای همراه، اطلاع فیشر، خانواده فارلی گامبل مورگنشترن، خانواده شبه نمایی


امضای استاد راهنما: تاریخ:

## اظهارنامه

عنوان پایان‌نامه : متغیرهای همراه چندبعدی داده‌های ترتیبی (شامل آماره‌های مرتب سانسور فزاینده نوع دو و رکوردها)

اینجانب سمانه جلمبادانی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد دانشکده علوم ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد نویسنده پایان‌نامه تحت راهنمایی دکتر مصطفی رزمخواه متعهد می‌شوم:

آ. تحقیقات در این رساله توسط اینجانب انجام شده و از صحت و اصالت برخوردار است.

ب. در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.

ج. مطالب مندرج در این پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی به جایی ارائه نشده است.

د. کلیه حقوق این اثر متعلق به دانشگاه فردوسی مشهد است و مقالات مستخرج با نام ”دانشگاه فردوسی مشهد “ و یا ”Ferdowsi University of Mashhad“ به چاپ خواهد رسید.

ه. حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی رساله تاثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از آن رعایت شده است.

و. در کلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که از موجود زنده(یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.

ز. در کلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده، اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاقی انسانی رعایت شده است.

**تاریخ**
**امضای دانشجو**

تقدیم به

آنانکه زیبا می اندیشند

زیبا سخن می گویند و زیبا عمل می کنند.

# خدایا...

عقیده مرا از دست عقده‌ام مصون بدار و به من قدرت تحمل عقیده مخالف ارزانی کن.
خدایا به هر که دوست می‌داری بیاموز که عشق از زندگی کردن بهتر است و به هر که دوست‌تر می‌داری بچشان که دوست داشتن از عشق برتر است.
خدایا به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی همراه، جهاد بی‌صلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، مناعت بی غرور، عشق بی هوس، تنهایی در انبوه جمعیت و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند روزی کن.
خدایا به من زیستی عطا کن که در لحظه مرگ بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مردنی عطا کن که بر بیهودگی‌اش سوگوار نباشم. بگذار تا آن (مرگ) را خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست داری.

**خدایا، تو چگونه زیستن را به من بیاموز**

**چگونه مردن را خود خواهم آموخت.**

(دکتر علی شریعتی)

# سپاس گزاری...

حمد و سپاس خداوندگار حکیم را که لطف و نعمت‌های بی‌کرانش نصیب عالمیان شده و می‌شود.

در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر مصطفی رزمخواه صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که از راهنمایی‌های ارزنده ایشان در راستای پیشبرد اهداف این پایان‌نامه استفاده فراوان بردم .

از جناب آقای دکتر مجید سرمد که زحمت مشاوره این پایان‌نامه را تقبل فرمودند و با راهنمایی‌های ارزنده خود به نحو احسن اینجانب را در آماده سازی این پایان‌نامه یاری رساندند، کمال امتنان را دارم.

همچنین لازم می‌دانم از اساتید فرهیخته جناب آقای دکتر غلامرضا محتشمی برزادران و جناب آقای دکتر مهدی دوست‌پرست که داوری این پایان‌نامه را به عهده گرفتند، از تمامی اعضای هیأت علمی گروه آمار و همکاری‌های صمیمانه مسئولین و کارکنان محترم آزمایشگاه رایانه، کتابخانه، انتشارات با تمام وجود تشکر و قدردانی نمایم.

در پایان، از پدر و مادر مهربانم که بعد از خدا، وجود مقدس‌شان را ستایش می‌کنم و از خانواده‌ام به ویژه برادر عزیزم و همسر محترمشان و تمامی دوستانم که همواره یاری‌گر اینجانب بوده‌اند به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، تشکر می‌کنم.

سمانه جلمبادانی

بهمن ماه ۱۳۹۱

## فهرست نمادها و علائم ریاضی

| | |
|---|---|
| متغیر تصادفی $i$ام | $X_i$ |
| $r$امین آماره مرتب در نمونه‌ای به حجم $n$ | $X_{r:n}$ |
| $r$امین آماره مرتب سانسور فزاینده نوع دو با $m$ شکست در نمونه‌ای به حجم $n$ | $X_{r:m:n}$ |
| $r$امین رکورد بالا | $R_r$ |
| متغیر همراه تك بعدی متناظر با $r$امین آماره مرتب از دنباله $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ در نمونه $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ | $Y_{[r:n]}$ |
| متغیر همراه $l$بعدی متناظر با $r$امین آماره مرتب از دنباله $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ در نمونه $(X_1, Y_{11}, \ldots, Y_{l1}), \ldots, (X_n, Y_{1n} \ldots, Y_{ln})$ | $\underline{Y}_{[r:n]} = (Y_{1[r:n]}, \ldots, Y_{l[r:n]})$ |
| متغیر همراه تك بعدی متناظر با $r$امین آماره مرتب سانسور فزاینده نوع دو با $m$ شکست از دنباله $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ در نمونه $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ | $Y_{[r:m:n]}$ |
| متغیر همراه $l$بعدی متناظر با $r$امین آماره مرتب سانسور فزاینده نوع دو با $m$ شکست از دنباله $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ در نمونه $(X_1, Y_{11}, \ldots, Y_{l1}), \ldots, (X_n, Y_{1n} \ldots, Y_{ln})$ | $\underline{Y}_{[r:m:n]} = (Y_{1[r:m:n]}, \ldots, Y_{l[r:m:n]})$ |
| متغیر همراه تك بعدی متناظر با $r$امین رکورد بالا از دنباله$\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ در دنباله $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots$ | $R_{[r]}$ |
| متغیر همراه $l$بعدی متناظر با $r$امین رکورد بالا از دنباله $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ در دنباله $(X_1, Y_{11}, \ldots, Y_{l1}), (X_1, Y_{12}, \ldots, Y_{l2}), \ldots,$ | $\underline{R}_{[r]} = (R_{1[r]}, \ldots, R_{l[r]})$ |
| امید ریاضی | $E(.)$ |
| واریانس | $V(.)$ |
| کواریانس | $Cov(.,.)$ |
| گشتاور $k$ام متغیر تصادفی $X$ | $\alpha_X^{(k)}$ |
| گشتاور $k$ام بزرگترین آماره مرتب در یك نمونه دوتایی از متغیر تصادفی $X$ | $\alpha_{X_{2:2}}^{(k)}$ |
| میزان اطلاع فیشر در $X$ در خصوص پارامتر $\beta$ | $I_X(\beta)$ |

# فهرست مطالب

# فهرست جدول‌ها

# پیش‌گفتار

بررسی‌های چند متغیره آماری از جمله پرکاربردترین زیر شاخه‌های علم آمار هستند. عمده‌ترین کاربرد این شاخه از آمار پی بردن به ماهیت و کیفیت بین متغیرهای تصادفی می‌باشد. در بین طیف وسیعی از حالات خاص بررسی شده در تحلیل‌های چند متغیره، زمانی که صحبت از ترتیب به میان می‌آید، مسأله متغیرهای همراه از اهمیت بخصوصی برخوردار است. پایان‌نامه‌ای که در پیش رو دارید با هدف آشنایی و ایجاد زمینه تحقیقاتی بیشتر در خصوص مفهوم ترتیب در بیش از دوبعد و متغیرهای همراه چندبعدی رکوردها، آماره‌های مرتب سانسور فزاینده نوع دو و آماره‌های مرتب معمولی تألیف و گردآوری شده است. اگرچه متغیرهای همراه آماره‌های مرتب معمولی یکی از حالات خاص متغیرهای همراه آماره‌های مرتب سانسور فزاینده نوع دو است اما به دلیل ساده‌تر بودن روابط برای متغیرهای همراه آماره‌های مرتب معمولی، برای درک بهتر مطالب این پایان‌نامه ابتدا مبحث متغیرهای همراه آماره‌های مرتب معمولی و سپس متغیرهای همراه آماره‌های مرتب سانسور فزاینده نوع دو را بیان شده‌اند.
دانستن یا ندانستن موضوعی میزان اطلاع در مورد آن موضوع را بیان می‌کند. هرچه میزان اطلاع درباره‌ی یك موضوع بیشتر باشد، تصمیم‌گیری در خصوص اتخاذ بهترین عکس‌العمل ممکن بهتر و شایسته‌تر خواهد بود. اندازه‌گیری میزان اطلاع موجود در مشاهدات گذشته و معرفی معیاری برای این منظور از موضوعات علم آمار در شاخه نظریه اطلاع می‌باشد. معیارهای مختلفی برای اندازه‌گیری میزان اطلاع در یك مجموعه از داده‌ها در مورد پارامتر مجهول جامعه ارائه شده است که از آن جمله می‌توان به معیارهای هارتلی، شانون، فیشر، کولبك و توکی اشاره نمود. با توجه به نقش اساسی که اطلاع فیشر در نامساوی کرامر–رائو برای یافتن کران پایین واریانس برآوردگرها، یافتن برآوردگرهای کارا و همچنین در یافتن واریانس توزیع حدی برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی ایفا می‌کند، یکی از اهداف اصلی این پایان نامه محاسبه میزان اطلاع فیشر موجود در متغیرهای همراه دوبعدی و مقایسه آنها با میزان اطلاع فیشر نهفته در متغیرهای همراه تك‌بعدی می‌باشد. به طور کلی این پایان‌نامه مشتمل بر پنج فصل می‌باشد.

- فصل اول شامل مقدمات، تعاریف و مفاهیم پایه‌ای مورد نیاز در پایان‌نامه، شرح تاریخچه و کاربردهای متغیرهای همراه است.

• در فصل دوم پس از مروری بر نظریه توزیع متغیرهای همراه چندبعدی آماره‌های مرتب معمولی، آماره‌های مرتب سانسور فزاینده نوع دو و رکوردها به معرفی الگوی فارلی گامبل مورگنشترن که نشان‌دهنده یك ساختار همبستگی چندمتغیره است می‌پردازیم و سپس توزیع متغیرهای همراه چندبعدی را تحت این الگوی خاص بررسی می‌کنیم.

• در فصل سوم گشتاورهای متغیرهای همراه دوبعدی آماره‌های مرتب معمولی، آماره‌های مرتب سانسور فزاینده نوع دو و رکوردها، همچنین کران ناپارامتری برای کوواریانس متغیرهای همراه تحت الگوی فارلی گامبل مورگنشترن به دست می‌آیند.

• در فصل چهارم به بررسی میزان اطلاع فیشر نهفته در متغیرهای همراه متناظر با داده‌های ترتیبی مورد نظر تحت الگوی فارلی گامبل مورگنشترن ساده می‌پردازیم.

• در فصل پنجم بعد از معرفی توزیع شبه نمایی سه متغیره به بررسی گشتاورهای متغیرهای همراه دوبعدیو میزان اطلاع فیشر نهفته در آنها می‌پردازیم
. لازم به ذکر است، تمای مطالب این پایان‌نامه توسط مولف بیان و اثبات شده‌اند، که به نوعی تعمیمی بر نتایج بدست آمده توسط امینی (۱۳۸۴ش) می‌باشند.

# فصل ۱

# مقدمات و مفاهیم پایه‌ای

## ۱.۱ مقدمه

با توجه به اینکه موضوع این پایان‌نامه متغیرهای همراه چندبعدی متناظر با آماره‌های مرتب معمولی، آماره‌های مرتب سانسور فزاینده نوع دو و رکوردها بوده و هدف اصلی در آن محاسبه اطلاع فیشر نهفته در متغیرهای همراه می‌باشد، در این فصل به بیان برخی تعاریف و مقدمات پایه‌ای در مورد آماره‌های مرتب معمولی، سانسورها، رکوردها و اطلاع فیشر می‌پردازیم. همچنین بعد از بیان مفهوم ترتیب در بیش از یك بعد و معرفی متغیرهای همراه تك‌بعدی و چندبعدی تاریخچه و کاربرد مختصری در مورد متغیرهای همراه بیان می‌کنیم.

## ۲.۱ آماره‌های مرتب

فرض کنید $X_۱, \ldots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی به حجم $n$ از متغیرهای تصادفی پیوسته‌ی مستقل و هم توزیع با تابع چگالی احتمال $f_X$ و تابع توزیع $F_X$ باشند. آماره‌های مرتب همان مشاهدات نمونه هستند که به ترتیب صعودی مرتب شده‌اند و آنها را با $X_{۱:n} \leq X_{۲:n} \leq \cdots \leq X_{n:n}$ نشان می‌دهیم. تابع چگالی احتمال توأم این آماره‌ها به صورت زیر است:

$$f_{X_{۱:n},\ldots,X_{n:n}}(x_۱, \ldots x_n) = n! \prod_{i=۱}^{n} f_X(x_i). \qquad (۱.۱)$$

بعلاوه، تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای آماره مرتب $r$ام برابر است با :

$$f_{X_{r:n}}(x) = c f_X(x)[F_X(x)]^{r-۱}[\overline{F}_X(x)]^{n-r}, \qquad (۲.۱)$$

که در آن $c = r\binom{n}{r}$ و $\overline{F}_X(x) = ۱ - F_X(x)$.
همچنین تابع چگالی احتمال توأم آماره مرتب $r$ام و $k$ام $(۱ \leq r < k \leq n)$ عبارت است از:

$$f_{X_{r:n},X_{r:n}}(x_r, x_k) = c(r,k,n) f_X(x_r) f_X(x_k)[F_X(x_r)]^{r-۱}[F_X(x_k) - F_X(x_r)]^{k-r-۱}[\overline{F}_X(x_k)]^{n-k}, \qquad (۳.۱)$$

که در آن $c(r,k,n) = \frac{n!}{(r-۱)!(k-r-۱)!(n-k)!}$.

جزئیات بیشتر در خصوص آماره‌های مرتب را می‌توان در آرنولد[۱] و همکاران

[1] Arnold

(۲۰۰۸) و همچنین دیوید[1] و ناگاراجا[2] (۲۰۰۳) یافت.

آماره‌های مرتب در مسائل مربوط به طول عمرسیستم‌ها نیز کاربرد دارند. به عنوان مثال سیستم‌های سری، موازی و یا سیستم‌های $k$ از $n$ که در آنها سیستم تا زمانی کار می‌کند که به ترتیب اولین، آخرین و $n-k+1$امین جزء سیستم از کار بیفتد. همچنین روال‌های گزینشی از جمله مباحث کاربردی آماره‌های مرتب هستند. در یک روال گزینشی بر اساس یک مولفه معین، مسأله انتخاب تعدادی از افراد نمونه است که دارای بیشترین و یا کمترین مقادیر مولفه مورد نظر باشند. در واقع در چنین شرایطی، چند آماره مرتب اول و یا آخر یک نمونه تصادفی با حجم معین از جامعه مربوط به مولفه‌ای که در حال بررسی است مورد نظر می‌باشد. تشخیص مشاهدات دور افتاده، مباحث نمونه‌گیری دنباله‌ای، آزمون‌های نیکویی برازش، کنترل کیفیت، برآورد آنتروپی، برآورد پارامترهای مکانی و مقیاسی و مسائل مشابه همه از مواردی هستند که کاربرد آماره‌های مرتب را نمایان می‌سازند.

## ۳.۱ رکوردها

فرض کنید $X_1$، $X_2$، ... دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی پیوسته‌ی مستقل و هم توزیع با تابع چگالی احتمال $f_X$ و تابع توزیع تجمعی $F_X$ باشند. مشاهده $X_j$ را یک رکورد بالا می‌گوییم اگر برای هر $i<j$ داشته باشیم $X_i<X_j$. به عبارت دیگر یک مشاهده را یک رکورد بالا گوییم اگر از تمامی مقادیر ماقبل خود بزرگتر باشد. تعریف مشابهی برای رکوردهای پایین وجود دارد. در این پایان نامه ما تنها به بررسی متغیرهای همراه رکوردهای بالا می‌پردازیم. اولین مشاهده را رکورد بدیهی می‌گوییم و با $R_0$ نمایش می‌دهیم. $r$امین رکورد بالا را با نماد $R_r$ نمایش می‌دهیم و تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر می‌باشد

$$f_{R_r}(x)=\frac{1}{r!}f_X(x)[-\log(\overline{F}_X(x))]^r. \qquad (۴.۱)$$

و برای $r<k$ تابع چگالی توأم دو رکورد $r$ام و $k$ام عبارت است از:

$$f_{R_r,R_k}(x_1,x_2)=\left[-\log\left(\frac{\overline{F}_X(x_2)}{\overline{F}_X(x_1)}\right)\right]^{k-r}\frac{f_X(x_1)f_X(x_2)}{r!(k-r-1)!}\frac{[-\log(\overline{F}_X(x_1))]^r}{\overline{F}_X(x_1)}. \qquad (۵.۱)$$

[1] David

[2] Nagaraja

همچنین تابع چگالی احتمال توأم نخستین $n$ رکورد بالا برابر است با:

$$f_{R_0,\ldots,R_{n-1}}(x_1,\ldots,x_n)=\prod_{i=0}^{n-1}F_X(x_i)/\prod_{i=0}^{n-2}[\overline{F}_X(x_i)]. \qquad (۶.۱)$$

جزئیات بیشتر در خصوص رکوردها را می‌توان در کتاب آرنولد و همکاران (۱۹۹۸) ملاحظه نمود.

تحلیل‌های هواشناسی و زلزله شناسی، مسابقات ورزشی، بازار بورس و غیره از جمله مواردی هستند که نقش و اهمیت مطالعات رکوردی را به وضوح برجسته می‌نمایند. یکی از مهم‌ترین کاربردهای رکوردها در آزمایش‌های طول عمر زمانی که آزمودن یك قطعه، مخرب یا پر هزینه است مطرح می‌شود. اگر قطعات مورد آزمایش در چنین آزمونی گران قیمت باشند می‌توان آزمایش را به گونه‌ای طرح‌ریزی کرد که تنها قطعات با طول عمر کم تخریب شوند. در این رابطه می‌توان به مثال مطرح شده توسط گالتی[1] و پاگت[2] (۱۹۹۵) و گلیك[3] (۱۹۷۸) برای آزمون مقاومت الوارهای چوبی در برابر فشار اشاره کرد، که در آن هر الوار در صورتی که قبل از رسیدن فشار به آستانه تحمل کم تحمل‌ترین الوار ماقبل خود نشکند، با الوار دیگری جایگزین خواهد شد. به عبارت دیگر تنها رکوردهای پایین میزان مقاومت الوارها مشاهده می‌شوند.

## ۴.۱ سانسور

گاهی در آزمایش‌های طول عمر یا دیگر زمینه‌های کاربردی علم آمار با نمونه‌هایی روبرو هستیم که به دلایلی از جمله فرصت کم برای اعلام نتایج، طولانی شدن زمان آزمایش یا عدم دسترسی به همه واحدها همه مشاهدات نمونه ثبت نشده‌اند. واحدهایی را که به هر دلیلی در نمونه مشاهده نمی‌شوند داده‌های سانسور شده گوییم. سانسور معمولا به صورت‌های مختلفی (سانسور نوع یك، سانسور نوع دو، سانسور فزاینده، سانسور فاصله‌ای و سانسور هیبرید) اعمال می‌شوند.
برای جزئیات بیشتر در مورد انواع سانسورها و کاربردهای آن می‌توان لاولس[4](۲۰۰۳) و همچنین نلسن[5]

[1] Gulati

[2] Padgett

[3] Glick

[4] Lawless

(۲۰۰۴) مراجعه کرد.
اگر آزمایش را تنها تا یك زمان معین ادامه دهیم و بعد از آن زمان واحدها را از آزمایش خارج کنیم، به این نوع از سانسور، سانسور نوع یك گفته می‌شود. چنانچه در آزمایشی با $n$ واحد نمونه بخواهیم $m$ $(m < n)$ شکست را مشاهده کنیم، در این صورت $n - m$ واحد باقیمانده سانسور می‌شوند، به این روش از سانسور، سانسور نوع دو گفته می شود. برای جزئیات بیشتر در مورد سانسورهای نوع یك و دو می‌توان به کوهن[۱] (۱۹۹۱)، بالاکریشنان و کوهن (۱۹۹۱)، بین[۲] و انگلهارت[۳] (۱۹۹۱) و همچنین هارتر[۴] و بالاکریشنان[۵] (۱۹۹۶) مراجعه نمود. اما یکی از پرکاربردترین انواع سانسورها که در این پایان نامه نیز مورد توجه قرار گرفته است، سانسور فزاینده است که در ادامه به طور مفصل‌تر آن را توضیح می‌دهیم.

### ۱.۴.۱ سانسور فزاینده

در سانسور نوع یك و نوع دو معرفی شده در بخش قبل، امکان خروج واحدها به جز در نقطه نهایی آزمایش وجود ندارد که این یك ضعف برای این سانسورها به حساب می‌آید. در آزمون‌های طول عمر ممکن است مواردی پیش بیاید که واحدها قبل از شکست به دلایلی مانند کمبود هزینه و زمان، نبودن امکانات لازم و غیره با طراحی قبلی از آزمایش حذف شوند. حذف واحدها از آزمایش، قبل از به پایان رسیدن آزمایش، مساله‌ای است که باعث به وجود آمدن موضوع سانسور فزاینده شده است. سانسور فزاینده نیز شامل دو نوع می‌باشد که تعمیمی از سانسورهای نوع یك و دو می‌باشند. در سانسور فزاینده نوع یك، در زمان‌های ثابت $T_۱, \ldots, T_{m-۱}$، به ترتیب $R_۱$، ...، $R_{m-۱}$ واحد از آزمایش خارج می‌شوند و در زمان ثابت $T_m$ واحدهای باقیمانده از آزمایش خارج می‌شوند و آزمایش به پایان می‌رسد. در این روش که تعمیمی از سانسور نوع یك می‌باشد تعداد شکست‌ها یك متغیر تصادفی و $T_i$ها مقادیری ثابت می‌باشند.
به طور مشابه با تعمیم سانسور نوع دو، می‌توان به روش سانسور فزاینده نوع دو دست یافت. در این روش از سانسور $n$ واحد در زمان صفر مورد آزمایش قرار می‌گیرند، بلافاصله بعد از مشاهده اولین شکست تعداد $R_۱$ واحد از $n - ۱$ واحد باقیمانده به طور تصادفی از آزمایش حذف می‌شوند، بعد از مشاهده دومین شکست تعداد $R_۲$ واحد از $n - R_۱ - ۲$ واحد

[5] Nelson

[1] Cohen

[2] Bain

[3] Englhardt

[4] Harter

[5] Balakrishnan

باقیمانده به طور تصادفی از آزمایش خارج می‌شوند و در نهایت در زمان مشاهده $m$امین شکست تعداد $R_m$ واحد باقیمانده از آزمایش حذف می‌شوند به طوری که $R_m = n - \sum_{i=1}^{m-1} R_i$.
در این پایان نامه $R_i$ها مقادیر ثابت و از پیش تعیین شده‌ای در نظر گرفته شده‌اند و زمان‌های شکست متغیرهای تصادفی هستند که آماره‌های مرتب سانسور فزاینده نوع دو گفته می‌شوند. بنابراین طرح سانسور فزاینده نوع دو بر اساس $m$ و بردار $\tilde{R} = (R_1, \ldots, R_m)$ مشخص می‌شود.
در سانسور فزاینده نوع دو از راست اگر $R_m = n - m$ و در نتیجه $R_1 = \cdots = R_{m-1} = 0$ آنگاه سانسور فزاینده نوع دو به سانسور نوع دو تقلیل می‌یابد. در این حالت آماره‌های مرتب سانسور فزاینده نوع دو همان $m$ آماره مرتب معمولی خواهند بود.

فرض کنید $X_1$، ...، $X_n$ نمونه‌ای تصادفی به حجم $n$ از متغیرهای تصادفی پیوسته‌ی مستقل و هم توزیع با تابع چگالی احتمال $f_X$ و تابع توزیع $F_X$ باشند. آماره‌های مرتب سانسور فزاینده نوع دو با طرح $\tilde{R} = (R_1, \ldots, R_m)$ را با $X_{1:m:n} \leq X_{2:m:n} \leq \cdots \leq X_{m:m:n}$ نشان می‌دهیم. تابع چگالی احتمال توأم $m$ آماره مرتب سانسور فزاینده نوع دو به صورت زیر است:

$$f_{X_{1:m:n},\ldots,X_{m:m:n}}(x_1, \ldots x_m) = c' \prod_{i=1}^{m} f_X(x_i)(\overline{F}_X(x_i))^{R_i}, \tag{۷.۱}$$

که در آن $c' = \prod_{j=1}^{m} \gamma_j$ طوری‌که $\gamma_1 = n$ و به ازای $2 \leq j \leq m$، $\gamma_j = n - \sum_{i=1}^{j-1} R_i - j + 1$.

بعلاوه تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای $r$امین آماره مرتب سانسور فزاینده نوع دو برابر است با :

$$f_{r:m:n}(x) = c_{r-1} f_X(x) \sum_{i=1}^{r} a_{i,r} [\overline{F}_X(x)]^{\gamma_i - 1}, , \tag{۸.۱}$$

که در آن $c_{r-1} = \prod_{j=1}^{r} \gamma_j$ و به ازای $1 \leq i \leq r \leq n$ داریم $a_{i,r} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{r} 1/(\gamma_j - \gamma_i)$ و در غیر این صورت $a_{i,r} = 1$.

تابع چگالی احتمال توأم $r$امین و $k$امین آماره مرتب سانسور فزاینده نوع دو ($1 \leq r < k \leq m$) عبارت است از:

$$\begin{aligned} f_{r,k:m:n}(x_1, x_2) &= c'' \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{k-r-1} c_{i,r-1}(R_1 - 1, \ldots, R_{r-1} + 1) c_{j,k-r-1}(R_{r+1}, \ldots, R_{k-1}) \\ &\times f_X(x_1) f_X(x_2) \left[\overline{F}_X(x_1)\right]^{R'_{ij}-1} \left[\overline{F}_X(x_2)\right]^{R''_j-1}, \quad x_1 \leq x_2, \end{aligned}$$

(۹.۱)

که در آن

$$\begin{aligned} c_{i,s}(a_1, \ldots, a_s) &= (-1)^i \left[\left(\prod_{j=1}^{i} \sum_{j'=s-i+1}^{s+j-i} a_{j'}\right)\left(\prod_{j=1}^{s-i} \sum_{j'=j}^{s-i} a_{j'}\right)\right]^{-1}. \\ R''_i &= n - r + 1 - \sum_{i=1}^{r-1} R_i + \sum_{j=r-i}^{r-1} (R_j + 1). \end{aligned}$$

همچنین $c'' = \prod_{i=1}^{r}(n - \sum_{j=1}^{i-1} R_j - i + 1)$ بوده و $R'_{ij} = \sum_{j'=r-i}^{k-1-j'} (R_{j'} + 1)$ می‌باشد.

برای جزئیات بیشتر در مورد آماره‌های مرتب سانسور فزاینده نوع دو می‌توان به کمپس و کرامر[1] (۲۰۰۱)، بالاکریشنان و آگاروالا [2] (۲۰۰۰)، بالاکریشنان و همکاران (۲۰۰۲) و بالاکریشنان (۲۰۰۷) مراجعه نمود.

مزیت استفاده از سانسور فزاینده نوع دو بر سانسور نوع دو معمولی این است که در سانسور فزاینده می‌توان تعدادی از واحدهای تحت آزمایش را در زمان‌های دلخواه مثلا لحظه از کار افتادگی هر مولفه، از آزمایش خارج نمود. همچنین در سانسور فزاینده قطعات سانسور شده دارای طول عمر بیشتری نسبت به سانسورهای معمولی هستند زیرا به محض از کار افتادن اولین واحد تعداد $R_1$ واحد از آزمایش خارج می‌شوند و می‌توان از آنها به عنوان قطعات دست دوم در آزمایش‌های دیگر استفاده نمود که از نظر اقتصادی مقرون به صرفه می‌باشد.

[1] Keramer

[2] Aggarwala