بسم الله الرحمن الرحيم

بسمه تعالی

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه **خانم سیده‌سمیه موسوی** رشته آمار به شماره دانشجویی ۸۷۵۷۰۱۰۰۷ تحت عنوان: «**ارزیابی اثر روش‌های مختلف مدل‌بندی روند فضایی- زمانی بر برآورد توابع کوواریانس**» را از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر محسن محمدزاده	دانشیار	
۲- استاد ناظر داخلی	دکتر مجید جعفری‌خالدی	استادیار	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر موسی گل‌علی‌زاده	استادیار	
۴- استاد ناظر خارجی	دکتر صدیقه شمس	استادیار	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر موسی گل‌علی‌زاده	استادیار	

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه(رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی- پژوهشی دانشگاه است، بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه، دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه‌ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد نگارنده در رشته **آمار ریاضی** است که در سال **۱۳۹۰** در دانشکده **علوم ریاضی** دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی جناب آقای دکتر **محسن محمدزاده** ، مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر ——— و مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر ——— از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر در معرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می‌کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتاب‌های عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب **سیده سمیه موسوی** دانشجوی رشته **آمار ریاضی** مقطع **کارشناسی ارشد** تعهد فوق و ضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: سیده سمیه موسوی

تاریخ و امضا: ۱۳۹۰/۴/۲۲

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱– حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳– انتشار کتاب ، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین نامه های مصوب انجام شود.

ماده ۴– ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه می باشد، باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ۵– این آیین‌نامه در ۵ ماده و یک تبصره در تاریخ۸۷/۴/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/۴/۲۳ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱۵ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

نام و نام خانوادگی: سیده سمیه موسوی

تاریخ و امضا: ۱۳۹۰/۴/۲۲

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد آمار

ارزیابی اثر روش‌های مختلف مدل‌بندی روند فضایی—زمانی بر برآورد توابع کواریانس

توسط

سیده سمیه موسوی

استاد راهنما

دکتر محسن محمدزاده

تیر ماه ۱۳۹۰

اگر شایسته تقدیم باشد به :

ساحت مقدس صاحب الزمان (ارواحنا له الفداء)

آن موعود زمین وزمان که یاد وصل زلالش غبار گناه وغم از چهره‌هایمان

بزداید و با آمدنش قطره‌های اشک چشمان درماندگان منتظر پاک شود؛

روح مطهر شهداء

که جرعه جرعه عشق حقیقی را در خاک دل مردگان زمین افشاندند؛

مادر عزیزم

که هستی من از هستی اوست و بیانم ناتوان از تقدیر منزلت و مقامش؛

خانواده‌ام

که همیشه در پناهشان احساس آرامش، امنیت، امید و شادی داشته‌ام؛

همسر مهربانم

که هدیه‌ای گرانبها و ارزشمند از جانب پروردگار عشق و محبت است.

قدردانی

شکر و سپاس معبود یگانه را که عشق به اندیشیدن و تعقل را در وجود انسان به ودیعه گذاشت و درود خداوند بر پیامبرش که والاترین عالم و معلم جامعهٔ بشریت است. اکنون که به لطف خداوند مهربان و متعال پایان‌نامه این حقیر به اتمام رسیده است، بر خود لازم می‌دانم از کلیهٔ اساتید و دوستانی که در انجام این تحقیق اینجانب را یاری نموده‌اند، مراتب قدردانی و سپاسگزاری خود را بیان دارم.

با تقدیر و سپاس از استاد بزرگوار جناب آقای دکتر محسن محمدزاده که با راهنمایی‌های ظریف و حمایت‌های بی‌دریغ خود در تمامی مراحل این پایان‌نامه از ایمان، دانش و تجربه ایشان بهره‌مند گردیدم.

از اساتید گرانقدر دکتر موسی گل‌علی‌زاده، دکتر مجید جعفری‌خالدی و دکتر صدیقه شمس که مطالعه و داوری این پایان‌نامه را بر عهده داشتند، و همچنین از آقای بهزاد محمودیان و خانم الهام بهشاد که در امور پایان‌نامه کمک قابل توجهی به بنده نموده‌اند کمال سپاسگزاری را دارم.

در پایان از مساعدت و همیاری خانواده‌ام و همسر عزیزم که با متانت و شکیبایی مرا یاری نموده‌اند و بیشترین سهم را در موفقیت این جانب داشته‌اند، تشکر و قدردانی می‌نمایم و امیدوارم همواره شاهد موفقیت‌های این عزیزان باشم.

سیده سمیه موسوی

تیر ۱۳۹۰

چکیده

تحلیل آماری داده‌های فضایی–زمانی مستلزم تعیین ساختار همبستگی آن‌ها از طریق تابع کوواریانس فضایی–زمانی است. این تابع که معمولاً نامعلوم است بر اساس مشاهدات برآورد می‌شود. از آنجا که وجود روند در داده‌ها موجب اریبی در برآورد تابع کوواریانس می‌گردد، ضروری است روند داده‌ها مدل‌بندی شده و با کسر روند از مشاهدات، باقیمانده‌های فاقد روند برای برازش تابع کوواریانس مورد استفاده قرار گیرد. اما روش‌های متنوعی برای مدل‌بندی روند داده‌ها وجود دارند. طبیعتاً از روندزدایی داده‌ها با مدل‌های مختلف، توابع کوواریانس متفاوتی حاصل می‌شوند که تأثیر متفاوتی نیز در دقت تحلیل داده‌ها دارند. در این پایان‌نامه چند مدل خطی برای مدل‌بندی روند فضایی–زمانی داده‌ها تعیین و نحوهٔ برازش آن‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای ارزیابی تأثیر مدل‌های مختلف در ویژگی‌های تابع کوواریانس فضایی–زمانی داده‌ها، هریک از مدل‌ها به دو روش جزئی و کلی به داده‌های ازن شهر تهران برازش داده می‌شود. با مقایسه ضریب تعیین مدل‌های مختلف، نشان داده می‌شود مدلی برای روند فضایی–زمانی داده‌ها مناسب‌تر است که دارای ضرایب رگرسیونی پویا و خطاهای وابستهٔ فضایی–زمانی باشد. سپس برای داده‌های روند زدوده شدهٔ حاصل از مدل‌های مختلف ویژگی‌های تقارن و تفکیک‌پذیری تابع کوواریانس فضایی–زمانی داده‌ها مورد آزمون قرار می‌گیرد و نشان داده می‌شود که یک تابع کوواریانس فضایی–زمانی تفکیک ناپذیر مانا و متقارن، ساختار همبستگی داده‌های ازن شهر تهران را مشخص می‌کند. در نهایت مدل‌هایی با این ویژگی معرفی و مناسب‌ترین تابع کوواریانس برای داده‌ها تعیین می‌شود.

واژه‌های کلیدی : داده‌های فضایی–زمانی، روند خطی پویا، مانایی، تفکیک‌پذیری، تقارن

فهرست مندرجات

فصل ۱

مفاهیم آمار فضایی—زمانی

۱.۱ مقدمه

در اغلب روش‌های معمولی و کلاسیک آمار فرض بر این است که مشاهدات تحت شرایط یکسان و به صورت مستقل از هم جمع‌آوری شده‌اند. فرض استقلال کمک شایانی به تسهیل مبانی نظری می‌نماید، اما در عمل ممکن است این فرض ما را از واقعیت دور کرده و موجب از بین رفتن اطلاعات زیادی شود. در برخی از مطالعات محیطی با داده‌هایی مواجه می‌شویم که مستقل نبوده و علاوه بر موقعیت قرارگیری آنها در فضای مورد مطالعه، در طول زمان نیز به یکدیگر وابسته‌اند. به این نوع داده‌ها، داده‌های فضایی—زمانی [۱] می‌گویند که از فرآیندهای دینامیکی و محیطی شامل دو بعد فضا و زمان حاصل می‌شوند.

مدل‌سازی آماری پدیده‌هایی که روی فضا و زمان در حال تغییر و تحول هستند در عرصه‌های مختلفی مانند محیط‌زیست، زمین‌شناسی، هیدرولوژی و هواشناسی کاربرد دارد. نخستین بار اینون و

[۱] Spatial-temporal data

سویتزر (۱۹۸۳) در طرح تحقیقاتی خود به منظور ارائه راهکار در کاهش آلودگی جوی از داده‌های فضایی-زمانی استفاده کردند. هاس (۱۹۹۸) در بررسی تغییرپذیری فضایی-زمانی و درون‌یابی ذرات آب خاک این نوع داده‌ها را به کار برد. همچنین افرادی از قبیل بیلونیک (۱۹۸۵)، روحانی و مایرز (۱۹۹۰)، کرسی و هوانگ (۱۹۹۹)، دی‌ایاکو و همکاران (۲۰۰۱ و ۲۰۰۲)، گنتینگ (۲۰۰۲)، ما (۲۰۰۲ و ۲۰۰۳)، استاین (۲۰۰۵)، پورکیو و همکاران (۲۰۰۶ و ۲۰۰۸)، فوئنتز (۲۰۰۶) و فوئنتز و همکاران (۲۰۰۸) نیز در توسعه و مدل‌بندی توابع کوواریانس فضایی-زمانی نقش بسزایی داشتند.

معمولاً داده‌های فضایی–زمانی که از موقعیت‌های مکانی مجاور و لحظه‌های زمانی نزدیک گردآوری می‌شوند همبستگی بیشتری دارند و با افزایش فاصلهٔ بین موقعیت‌ها و لحظه‌های زمانی داده‌ها، همبستگی آنها کاهش می‌یابد. به دلیل وجود همبستگی فضایی–زمانی بین آن‌ها، روش‌های معمول آماری برای تحلیل چنین داده‌هایی قابل استفاده نمی‌باشد و لازم است به نحوی ساختار همبستگی فضایی–زمانی داده‌ها در تحلیل آن‌ها لحاظ گردد. بنابراین تحلیل آماری این گونه داده‌ها در آمار فضایی–زمانی مستلزم تعیین ساختار همبستگی فضایی-زمانی آن‌ها از طریق تابع کوواریانس فضایی–زمانی است. در واقع یکی از مراحل مطالعه داده‌های فضایی-زمانی به دست آوردن مدلی مناسب برای کوواریانس فضایی-زمانی آن‌ها است. این تابع که معمولاً نامعلوم و در اکثر موارد پیچیده است بایستی بر اساس مشاهدات برآورد شود. اگر شرط‌هایی از قبیل مانایی، تفکیک‌پذیری، همسانگردی یا تقارن برای تابع کوواریانس فضایی–زمانی برقرار باشد، برازش یک مدل مناسب به آن تسهیل می‌گردد. ولی در اغلب مسائل کاربردی این شرط‌ها محقق نمی‌شوند. به عنوان مثال در فرآیندهای محیطی و ژئوفیزیکی همانند آلاینده‌های جوی، میزان رطوبت زمین و بادهای سطحی به دلیل تأثیر متقابل ساختارهای همبستگی فضایی و زمانی داده‌ها، توابع کوواریانس فضایی–زمانی متناظر با آنها اغلب تفکیک ناپذیر، ناهمسانگرد یا نامتقارن هستند. به علاوه شرط مانایی در حوزه‌های

فضایی بزرگ ممکن است برقرار نباشد. لذا قبل از تحلیل هر مجموعه دادهٔ فضایی—زمانی لازم است هر یک از این شرایط مورد بررسی قرار گیرند.

از آنجا که وجود روند در داده‌های فضایی—زمانی موجب اریبی در برآورد تابع کوواریانس می‌گردد (کرسی، ۱۹۹۳)، برای برازش یک مدل مناسب و دقیق به تابع کوواریانس فضایی—زمانی، شناسایی روند و روند زدایی داده‌ها ضروری به نظر می‌رسد. اما روش‌های متنوعی برای مدل‌بندی روند داده‌ها وجود دارند، که هر یک منجر به مدل خاصی می‌گردد. طبیعتاً از روندزدایی داده‌ها با مدل‌های متفاوت، توابع کوواریانس متفاوتی حاصل می‌شوند که تأثیر متفاوتی نیز در دقت تحلیل فضایی و زمانی داده‌ها دارند. برای این منظور در فصل اول مفاهیم و تعاریف مقدماتی مربوط به داده‌های فضایی—زمانی و ویژگی‌های تابع کوواریانس فضایی—زمانی مطرح می‌شود. سپس تعدادی از مدل‌های معتبر برای ساختار همبستگی فضایی—زمانی داده‌ها ارائه می‌گردد. در فصل دوم ابتدا روش‌هایی برای شناسایی مانایی، تفکیک‌پذیری و تقارن توابع کوواریانس فضایی—زمانی بیان می‌گردد. سپس نحوهٔ ساخت توابع کوواریانس فضایی—زمانی تفکیک ناپذیر مورد بررسی قرار می‌گیرد. آنگاه انواع توابع کوواریانس تفکیک ناپذیر متقارن، نامتقارن و ناهمسانگرد معرفی می‌شود. در فصل سوم روش‌هایی برای برازش مدل به روند داده‌های فضایی—زمانی ارائه و اثر آن‌ها در ویژگی‌های توابع کوواریانس بررسی می‌شود. در فصل چهارم پس از برازش روندهای مطرح شده در فصل سه به داده‌های ازن شهر تهران، مناسب‌ترین روند از بین آنها انتخاب شده و سپس تابع کوواریانس فضایی—زمانی مناسب به داده‌ها برازش داده می‌شود.

۲.۱ تعاریف و مفاهیم اولیه

در این بخش برخی از مفاهیم پایه‌ای آمار فضایی-زمانی مورد استفاده در این پایان نامه به همراه تعاریف مربوطه بیان می‌شود.

تعریف ۱.۲.۱ میدان تصادفی فضایی-زمانی :
میدان تصادفی فضایی-زمانی [۲] برای مدل‌بندی داده‌های فضایی-زمانی به کار می‌رود و مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی به صورت $Z(\cdot,\cdot)=\{Z(\boldsymbol{s},t);\boldsymbol{s}\in S,t\in\mathcal{T}\}$ است، که در آن $\boldsymbol{s}$ موقعیت فضایی در مجموعهٔ اندیس گذار $S\subseteq R^d$، $d\geq 1$ و t لحظهٔ زمانی در مجموعهٔ $\mathcal{T}\subseteq R$ می‌باشد. برای میدان تصادفی $Z(\cdot,\cdot)$ توابع میانگین و کوواریانس فضایی-زمانی به ترتیب به صورت

$$\begin{aligned}\mu(\boldsymbol{s},t) &= E\Big(Z(\boldsymbol{s},t)\Big);\ \ (\boldsymbol{s},t)\in S\times\mathcal{T}\\ C(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s}';t,t') &= Cov\Big(Z(\boldsymbol{s},t),Z(\boldsymbol{s}',t')\Big);\ \ (\boldsymbol{s},t),(\boldsymbol{s}',t')\in S\times\mathcal{T}\end{aligned}$$

تعریف می‌شوند. هر میدان تصادفی فضایی-زمانی را می‌توان به صورت

$$Z(\boldsymbol{s},t)=\mu(\boldsymbol{s},t)+\delta(\boldsymbol{s},t)\ ;\quad (\boldsymbol{s},t)\in S\times\mathcal{T}$$

تجزیه کرد، که در آن $\mu(\boldsymbol{s},t)$ تغییرات مقیاس بزرگ [۳] یا روند [۴] فضایی-زمانی و $\delta(\boldsymbol{s},t)$ تغییرات مقیاس کوچک [۵] یا خطای میدان تصادفی هستند. تغییرات مقیاس بزرگ از تغییرپذیری مشاهدات در موقعیت‌های مختلف و زمان‌های گوناگون حاصل می‌شود و تشکیل تغییرات مقیاس کوچک ناشی از خطای اندازه‌گیری یا تغییرپذیری مشاهدات در درون موقعیت‌ها می‌باشد.

[۲] Space-time random field
[۳] Large scale variation
[۴] Trend
[۵] Small scale variation

متغیر $Z(s,t)$ ممکن است گسسته یا پیوسته و موقعیت فضایی آن پیوسته یا گسسته، نقطه‌ای یا ناحیه‌ای، منظم یا نامنظم و موقعیت زمانی آن نیز گسسته یا پیوسته مقدار باشد. وقتی مقدار متغیر در زیرمجموعه‌ای از ناحیه مورد مطالعه ثبت شود، موقعیت ناحیه‌ای و اگر در یک موقعیت ثابت با مختصات جغرافیایی مشخص اندازه‌گیری شود، موقعیت نقطه‌ای است. اگر موقعیت‌های نقطه‌ای روی یک مشبکه با فواصل مساوی از هم قرار داشته باشند، موقعیت‌ها منظم و در غیر این صورت نامنظم هستند. اگر موقعیت‌های ناحیه‌ای نیز هم‌شکل و هم‌اندازه باشند منظم و در غیر این صورت نامنظم نامیده می‌شوند.

تعریف ۲.۲.۱ مانای قوی :

میدان تصادفی $Z(\cdot,\cdot)$ مانای قوی[6] است اگر برای هر $(\boldsymbol{h},u) \in S \times \mathcal{T}$ توزیع توأم بردارهای $(Z(\boldsymbol{s}_1,t_1),\ldots,Z(\boldsymbol{s}_m,t_n))'$ و $(Z(\boldsymbol{s}_1+\boldsymbol{h},t_1+u),\ldots,Z(\boldsymbol{s}_m+\boldsymbol{h},t_n+u))'$ یکسان باشند. یعنی برای هر $(z_1,\ldots,z_{mn})$ داشته باشیم:

$$F_{Z(\boldsymbol{s}_1,t_1),\ldots,Z(\boldsymbol{s}_m,t_n)}(z_1,\ldots z_{mn}) = F_{Z(\boldsymbol{s}_1+\boldsymbol{h}\ ,\ t_1+u),\ldots,Z(\boldsymbol{s}_m+\boldsymbol{h}\ ,\ t_n+u)}(z_1,\ldots z_{mn})\ ,$$

$$(\boldsymbol{s}_1,t_1),\ldots,(\boldsymbol{s}_m,t_n),(\boldsymbol{h},u) \in S \times \mathcal{T}$$

ویژگی مانای قوی باعث سادگی در تحلیل میدان تصادفی می‌شود. به عنوان مثال، از آنجایی که هر یک از متغیرهای $\{Z(s_i,t_j);\ i=1,\ldots,m\ ,\ j=1,\ldots,n\}$ می‌توانند دارای توزیع خاصی باشند، نمی‌توان از روی مشاهدات $\boldsymbol{z}=(z(\boldsymbol{s}_1,t_1),\ldots,z(\boldsymbol{s}_n,t_m))$ توزیع میدان در یک موقعیت دلخواه $(\boldsymbol{s}_0,t_0)$، یعنی $Z(\boldsymbol{s}_0,t_0)$، را برآورد کرد. اما در صورتی که فرض مانایی قوی برقرار باشد، مشاهدات از یک توزیع که همان توزیع $Z(\boldsymbol{s}_0,t_0)$ است، پیروی می‌کنند. با این وجود، در عمل پدیده‌هایی را می‌توان یافت که شرط مانایی قوی برای آنها برقرار نباشد.

[6] Strong stationarity

تعریف ۳.۲.۱ مانای مرتبه دوم :

میدان تصادفی $Z(\cdot,\cdot)$ را مانای مرتبه دوم[۷](مانای ضعیف) در فضا گویند هر گاه $\mu(s,t)$ مستقل از s و تنها تابعی از t و $C(s,s';t,t')$ تابعی از $s-s'$، t و t' باشند. همچنین میدان، مانای مرتبه دوم در زمان گفته می‌شود هر گاه $\mu(s,t)$ تنها تابعی از s و $C(s,s';t,t')$ تابعی از $t-t'$، s و s' باشند.

میدان تصادفی $Z(\cdot,\cdot)$ را مانای مرتبه دوم در فضا و زمان گویند هرگاه میانگین آن مستقل از (s,t) و ثابت باشد و کوواریانس فضایی–زمانی آن فقط تابعی از فاصلهٔ موقعیت‌ها به صورت

$$Cov\Big(Z(\boldsymbol{s},t),Z(\boldsymbol{s}',t')\Big)=C(\boldsymbol{h},u)\ ,\quad (\boldsymbol{s},t),(\boldsymbol{s}',t')\in S\times\mathcal{T}$$

باشد، که در آن $\boldsymbol{h}=\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'$ و $u=t-t'$ به ترتیب تأخیرهای[۸]فضایی و زمانی هستند.

تعریف ۴.۲.۱ مانای ذاتی :

میدان تصادفی $Z(\cdot,\cdot)$ مانای ذاتی[۹]نامیده می‌شود، هرگاه میانگین آن ثابت و واریانس عبارت $\Big(Z(\boldsymbol{s},t)-Z(\boldsymbol{s}',t')\Big)$ فقط تابعی از تأخیرهای فضایی $\boldsymbol{h}=\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}'$ و زمانی $u=t-t'$ باشند، یعنی

$$Var\Big(Z(\boldsymbol{s},t)-Z(\boldsymbol{s}',t')\Big)=2\gamma(\boldsymbol{h},u)\ ,\quad (\boldsymbol{s},t),(\boldsymbol{s}',t')\in S\times\mathcal{T}$$

تعریف ۵.۲.۱ میدان تصادفی گاوسی :

در صورتی که توزیع توأم هر تعداد متناهی از متغیرهای میدان تصادفی $\Big\{Z(\boldsymbol{s},t);\boldsymbol{s}\in S,t\in\mathcal{T}\Big\}$ نرمال چند متغیره باشند، آن را میدان تصادفی گاوسی[۱۰]گویند.

---

[۷] Second-order stationarity

[۸] Lags

[۹] Intrinsic stationary

[۱۰] Gaussian

مانایی قوی شرط کافی برای مانایی مرتبه دوم است، ولی عکس آن لزوماً برقرار نیست مگر اینکه میدان تصادفی گاوسی باشد، که در این صورت چون بردارهای تصادفی $\Big(Z(\boldsymbol{s}_1,t_1),\ldots,Z(\boldsymbol{s}_m,t_n)\Big)'$ و $\Big(Z(\boldsymbol{s}_1+\boldsymbol{h},t_1+u),\ldots,Z(s_m+\boldsymbol{h},t_n+u)\Big)'$ هم‌توزیع و دارای توزیع نرمال با میانگین $\mu 1_{mn\times 1}$ و ماتریس کوواریانس $\Sigma_{mn\times mn}=\Big(C(\boldsymbol{s}_i-\boldsymbol{s}_j,t_{i'}-t_{j'})\Big)$ هستند، میدان $Z(\cdot,\cdot)$ مانای قوی است. مانایی مرتبه دوم نیز شرط کافی برای مانایی ذاتی است ولی عکس آن لزوماً برقرار نیست.

تعریف ۶.۲.۱ همسانگردی:
هرگاه تابع کوواریانس $C(\boldsymbol{h},u)$ فقط تابعی از اندازهٔ تأخیرهای فضایی و زمانی، یعنی $\|\boldsymbol{h}\|$ و $|u|$ بوده و به جهت آن‌ها بستگی نداشته باشد میدان تصادفی $Z(\cdot,\cdot)$ همسانگرد[11] نامیده می‌شود.

تعریف ۷.۲.۱ تابع کوواریانس فضایی–زمانی تفکیک‌پذیر :
تابع کوواریانس فضایی–زمانی تفکیک‌پذیر[12] نامیده می‌شود، اگر توابع کوواریانس صرفاً فضایی و صرفاً زمانی به ترتیب C_T و C_S وجود داشته باشند به طوری که

$$Cov\Big(Z(\boldsymbol{s},t),Z(\boldsymbol{s}',t')\Big)=C_S(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s}')\times C_T(t,t')\ ,\quad (\boldsymbol{s},t),(\boldsymbol{s}',t')\in S\times\mathcal{T}$$

در این صورت میدان تصادفی نیز تفکیک‌پذیر نامیده می‌شود. به عبارت دیگر یک میدان تصادفی تفکیک‌پذیر است اگر و تنها اگر تابع کوواریانس آن تفکیک‌پذیر باشد.
تحت فرض مانایی و تفکیک‌پذیری، تابع کوواریانس میدان به صورت

$$C(\boldsymbol{h},u)=C_S(\boldsymbol{h})\times C_T(u)\ ,\quad (\boldsymbol{h},u)\in S\times\mathcal{T}$$

[11] Isotropic
[12] Seperable

خواهد بود، یا به عبارت دیگر

$$C(\boldsymbol{h},u)=\frac{C(\boldsymbol{h},0)C(\mathbf{o},u)}{C(\mathbf{o},0)}\ ,\quad (\boldsymbol{h},u)\in S\times\mathcal{T}$$

این فرم بیانگر آن است که هر جفت از سری‌های زمانی که به فاصله فضایی $\boldsymbol{h}$ از یکدیگر قرار دارند دارای ساختار همبستگی زمانی یکسانی می‌باشند. همچنین هر جفت فرآیند فضایی که به اندازهٔ تأخیر زمانی u از یکدیگر جدا شده‌اند نیز دارای ساختار همبستگی فضایی یکسانی می‌باشند. یک تابع کوواریانس فضایی—زمانی تفکیک‌پذیر را می‌توان به طور جداگانه یا به وسیلهٔ تکنیک‌های موجود در سری‌های زمانی و آمار فضایی مدل‌بندی نمود. به علاوه ماتریس کوواریانس فضایی—زمانی بر اساس ضرب کرونه‌کر[13] ماتریس کوواریانس فضایی و زمانی به صورت $\Sigma=\Sigma_S\otimes\Sigma_T$ قابل محاسبه است. بر خلاف ویژگی‌های توابع کوواریانس تفکیک‌پذیر، چنین توابع کوواریانسی به دلیل لحاظ نکردن اثر متقابل فضایی—زمانی در عمل بسیار محدود هستند.

تعریف ۸.۲.۱ تقارن کامل :

تابع کوواریانس فضایی-زمانی مانای $C(\boldsymbol{h},u)$ کاملاً متقارن[14] نامیده می‌شود هرگاه

$$C(\boldsymbol{h},u)=C(-\boldsymbol{h},u)=C(\boldsymbol{h},-u)=C(-\boldsymbol{h},-u)\ ,\quad (\boldsymbol{h},u)\in S\times\mathcal{T}$$

نکتهٔ قابل توجه این است که هر تابع کوواریانس تفکیک‌پذیر همواره کاملاً متقارن است، اما تقارن کامل تفکیک‌پذیری تابع کوواریانس را نتیجه نمی‌دهد.

[13] Kronecker
[14] Fully symmetric