دانشکده علوم پایه
گروه آمار
عنوان پایان نامه:
استنباط آماری درباره ضریب تغییر

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته آمار(آمار ریاضی)

استاد راهنما:
دکتر مسعود یارمحمدی

استاد مشاور:
دکتر پرویز نصیری

مولف:
فاطمه درفشان

اسفند ۱۳۸۸

فهرست مطالب

فصل اول بیان مسئله ۱

۱—۱ مقدمه ۱

۱—۲ معیارهای پراکندگی ۳

۱—۲—۱ دامنه ۳

۱—۲—۲ انحراف متوسط ۵

۱—۲—۳ واریانس ۶

۱—۲—۴ انحراف معیار ۶

۱—۳ ضریب تغییر و ویژگی‌های آن ۶

۱—۳—۱ کران‌هایی برای ضریب تغییرات نمونه‌ای ۷

۱—۳—۲ توزیع ضریب تغییر نمونه‌ای ۱۰

۱—۴ نگاهی اجمالی بر فصول بعد ۱۲

فصل دوم استنباط آماری درباره‌ی ضریب تغییر یک جامعه ۱۳

۲—۱ برآورد نقطه‌ای برای ضریب تغییر یک جامعه ۱۳

۲—۱—۱ کران‌هایی برای ضریب تغییر جامعه و برآوردگرهای آن ۱۳

۲—۱—۲ برآورد ماکسیمم راستنمایی CV ۱۸

۲—۲ فاصله اطمینان برای ضریب تغییر ۲۰

۲—۲—۱ معرفی برآوردگری برای τ و بررسی ویژگی‌های آن ۲۰

۲—۲—۲ دو فاصله اطمینان بر اساس برآوردگر جدید ۲۵

۲—۲—۳ مقایسه چند فاصله اطمینان برای τ ۲۵

۲—۳ آزمون‌های معنی‌داربودن ۳۰

۲—۳—۱ آزمون معنی‌داری ۳۰

۲—۳—۲ آزمون تعمیم‌یافته متغیر بر اساس کمیت‌های محوری تعمیم‌یافته . ۳۰

فصل سوم برآورد همزمان ضرایب تغییر چند جامعه ۳۳
۳—۱ مقدمه ۳۳
۳—۲ برآوردگرهای دیگری برای ضریب تغییر ۳۴
۳—۳ نتایج مجانبی ۳۷
۳—۴ مقایسه برآوردگرهای پیشنهادی ۴۱
۳—۴—۱ اریبی و مخاطره برآوردگرها ۴۴
۳—۴—۲ تحلیل مخاطره برآوردگرهای مختلف ۴۹

فصل چهارم کاربرد ضریب تغییرات در بررسی ریسک اعتباری در بانک‌ها ۵۲
۴—۱ مقدمه ۵۲
۴—۲ کفایت سرمایه‌ی بانک و تمرکز ریسک در مجموعه وام‌ها ۵۳
۴—۳ مثال ۵۵

نتیجه گیری ۵۷

برنامه‌های محاسباتی ۵۸

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۶۱

نام‌نامه ۶۴

مراجع ۶۶

چکیده:

ضریب تغییرات یکی از معیارهای پراکندگی می‌باشد که به صورت نسبت انحراف معیار به میانگین تعریف می‌شود. ضریب تغییر به عنوان شاخصی برای تعیین میزان تمرکز ریسک در بانک‌ها و مؤسسه‌های مالی و همچنین معیاری برای اندازه‌گیری دقت در علوم زیستی و پزشکی بکار می‌رود.

در این رساله استنباط آماری درباره ضریب تغییر شامل برآورد نقطه‌ای، برآورد فاصله‌ای و آزمون فرض‌های آماری مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرد. این مراحل برای یک جامعه و چند جامعه مورد بحث و بررسی قرار گرفته و با استفاده از شبیه سازی کامپیوتری مطالعه می‌شود. کاربرد این روش برای یک سری داده واقعی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

کلمات کلیدی: ضریب تغییرات، فاصله اطمینان، آزمون فرض آماری، برآورد نقطه‌ای، $P-$مقدار.

فصل ۱

بیان مسئله

۱—۱ مقدمه

بررسی پراکندگی مشاهده‌ها، موضوعی مهم در آمار توصیفی است. اما متأسفانه با وجود اهمیّت معیارهای پراکندگی، مطالعات و بررسی‌های انجام شده بیشتر معطوف به معیارهای تمرکز بوده است (لوسن و همکاران (۱۹۸۵)، باتانرو و همکاران (۱۹۹۷)). شونسی (۱۹۹۲) بر اساس بسیاری از تحقیق‌های انجام شده تا آن زمان، نتیجه گرفته است که یکی از مباحثی که معمولاً در اکثر این تحقیق‌ها کمتر به آن توجه شده است، موضوع پراکندگی است.
قبل از آن که به شرح شاخص‌های پراکندگی بپردازیم، برای توجیه ضرورت این شاخص‌ها به ذکر مثالی می‌پردازیم. فرض کنید که می‌خواهید در یکی از دو شرکت تجاری «الف» یا «ب» سرمایه‌گذاری کنید. به منظور آنکه تصمیم صحیحی را اتخاذ کرده باشید از آمارگری خواسته‌اید تا وضعیت سودآوری این دو شرکت را در چند سال گذشته بررسی کرده و به صورت خلاصه به شما انعکاس دهد. وی آمار مربوط به سود این دو شرکت را در ۷ سال گذشته بررسی می‌کند و به شما می‌گوید که میانگین سود سالانه این دو شرکت مساوی و برابر ۵ میلیون تومان بوده است. با شنیدن کمیت شاخص میانگین، آنچه در ذهن شما شکل می‌گیرد آن است که این دو شرکت از نظر سودآوری با یکدیگر تفاوت محسوسی ندارند. بنابراین چنین تصور می‌کنید که برای شما فرقی نخواهد کرد که در کدامیک از دو شرکت سرمایه‌گذاری کنید.

اکنون تصور کنید به جای آنکه وضعیت سودآوری این دو شرکت به صورت خلاصه در قالب یک شاخص مرکزی همچون میانگین به شما منعکس شود، آمار مربوط به سود این دو شرکت در ۷ سال گذشته را به گونه‌ای که در جدول ۱—۱ آمده است به شما ارائه کنند. آیا با دیدن ارقام

جدول ۱—۱: سود دو شرکت تجاری «الف» و «ب»

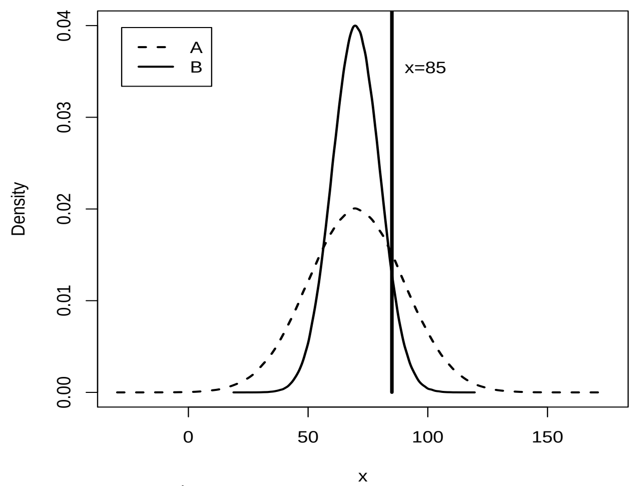
شرکت تجاری	میزان سود به میلیون تومان						
الف	۴	۵	۵	۶	۵	۴	۶
ب	۱۷	۳۱	−۱۵	−۷	۲۰	−۳۰	۱۹

خام مربوط به سود این دو شرکت باز هم همان تصور سابق را خواهید داشت که این دو از نظر سودآوری یکسان هستند و در نتیجه فرقی نمی‌کنند که در کدام یک سرمایه‌گذاری کنید؟ مسلماً چنین نیست. دیدن ارقام خام مربوط به سود این دو شرکت به وضوح نشان می‌دهد که میزان سود شرکت تجاری «ب» از یک سال به سال دیگر بسیار متغیر است. این شرکت ممکن است در یک سال ۲۰ میلیون تومان سود داشته باشد و سال دیگر ۳۰ میلیون تومان ضرر بدهد. در نتیجه ریسک سرمایه‌گذاری در شرکت تجاری «ب» بسیار زیاد است. در حالی که پراکندگی سود شرکت تجاری «الف» به نسبت بسیار کم بوده و معمولاً همواره حدود ۵ میلیون تومان سود دارد.

اکنون ملاحظه می‌فرمائید که اگر بخواهیم تجسّم صحیحی را از وضعیت سودآوری این دو شرکت در ذهن فردی که آمار خام را ندیده است ایجاد کنیم لازم است در کنار شاخص میانگین، شاخص دیگری را ارائه کنیم که میزان پراکندگی سود را نشان دهد. این هدف را شاخص‌های پراکندگی فراهم می‌کنند. قرار گرفتن شاخص پراکندگی در کنار شاخص تمایل مرکزی معمولاً اطلاع مناسبی از مجموعه داده‌های آماری را ارائه می‌کند که برای بسیاری از تصمیم‌گیری‌ها کفایت می‌کند.

به عنوان مثالی دیگر، فرض کنید نمره دانشجوئی را در درس خاصی می‌دانیم. اگر هدف سنجش توان وی نسبت به سایر دانشجویان باشد، دانستن نمره او به تنهائی چندان مفهومی ندارد. این نمره وقتی مفهوم پیدا می‌کند که با نمرات سایر دانشجویان و یا با شاخص‌های تمایل مرکزی مقایسه شود، بنابراین اگر میانگین توزیع نمرات را بدانیم می‌توانیم مشخص کنیم که نمره خاصی بالاتر یا پائین‌تر از حد متوسط است. اما چقدر بالاتر یا پائین‌تر؟ از اینجا روشن می‌گردد که یک شاخص تمایل مرکزی همچون میانگین به تنهائی میزان محدودی اطلاعات را ارائه می‌کند. برای توصیف بیشتر یک توزیع و یا برای توجیه یک نمره خاص، واضح است که نیاز به اطلاعات بیشتر در خصوص پراکندگی نمره‌ها در اطراف شاخص تمایل مرکزی است.

در شکل (۱.۱) هر یک از دو توزیع نمرهٔ A و B دارای میانگین مساوی و برابر ۷۰ است، ولی به اختلاف توجیه نمره ۸۵ در این دو توزیع توجه کنید. در توزیع A چون نمرات دارای پراکندگی زیادی در اطراف میانگین هستند، نمره ۸۵ ممکن است فقط به عنوان نمره‌ای تقریباً بالا تلقی شود. تعداد قابل ملاحظه‌ای از نمرات دانشجویان در این توزیع در بالای ۸۵ قرار دارند. این مسئله را می‌توان توسط سطح زیر منحنی در طرف راست ۸۵ دید. از طرف دیگر در B تمام نمره‌ها به طور فشرده‌ای در اطراف میانگین توزیع شده‌اند. نمرات در این حالت همگون‌تر و یا به عبارت دیگر توزیع نمرات، همگن‌تر است. در نتیجه نمره ۸۵ اکنون تقریباً در بالای توزیع قرار دارد و بنابراین می‌تواند به عنوان نمره بسیار بالائی تلقی شود. پس ملاحظه می‌شود که برای توجیه نمرات، ما نیاز به شاخص دیگری داریم که همراه میانگین یا میانه مورد استفاده قرار گیرد. این همراه باید به طریقی پراکندگی نمرات را در اطراف شاخص تمایل مرکزی نشان دهد. شاخص‌های مختلفی برای این منظور در آمار ساخته شده است که معمول‌ترین آنها عبارتند از دامنه، انحراف متوسط، انحراف معیار، واریانس و ضریب تغییر.



شکل ۱—۱: توزیع نمرات دانشجویان در یک درس خاص

۱—۲ معیارهای پراکندگی

۱—۲—۱ دامنه

دامنه که ساده‌ترین و واضح‌ترین شاخص پراکندگی است، برابر اختلاف بین بزرگترین و کوچکترین مشاهده در یک مجموعه اطلاعات آماری است.

فرمول دامنه (R) عبارت است از:

$$R = H - L$$

که در آن H بزرگترین عدد و L کوچکترین عدد در بین مشاهدات آماری است.
به عنوان مثالی از شاخص دامنه، سود دو شرکت تجاری «الف» و «ب» مندرج در جدول ۱.۱ را در نظر بگیرید. دامنه سود شرکت «الف» برابر است با:

$$R_A = ۶ - ۴ = ۲$$

یعنی اختلاف بین بیشترین مقدار سود و کمترین میزان سود این شرکت در ۷ سال گذشته برابر ۲ میلیون تومان بوده است. حال اگر همین شاخص دامنه را برای شرکت تجاری «ب» محاسبه کنیم برابر $R_B = ۶۱$ خواهد بود.
یعنی اختلاف بین بیشترین میزان سود و کمترین مقدار سود این شرکت در ۷ سال گذشته ۶۱ میلیون تومان بوده است. مقایسه دامنه سود ۲ میلیونی شرکت «الف» و دامنه سود ۶۱ میلیونی شرکت «ب» به وضوح آشکار می‌سازد که پراکندگی سود در شرکت «ب» به مراتب بیشتر از شرکت «الف» است. اکنون اگر شاخص میانگین سود در کنار شاخص دامنه سود قرار گیرد و به فردی که می‌خواهد تصمیم‌گیری کند در کدامیک از دو شرکت تجاری «الف» و «ب» سرمایه‌گذاری کند به صورت زیر ارائه شود:

$$\mu_A = ۵ \qquad \mu_B = ۵$$
$$R_A = ۲ \qquad R_B = ۶۱$$

وی قادر خواهد بود تصویر نسبتاً واضحی را از وضعیت سودآوری دو شرکت در ذهن خود تجسم کند و تصمیم صحیحی را اتخاذ نماید.
اگر چه دامنه شاخصی است که محاسبه آن بسیار آسان و مفهوم آن کاملاً روشن است ولی شاخص ضعیفی برای نشان‌دادن پراکندگی است و کمتر مورد استفاده قرار می‌گیرد، زیرا تنها دو کمیت در دو کران یک مجموعه اطلاعات آماری را مورد توجه قرار می‌دهد. حال اگر در بین مشاهدات فقط یک مشاهده وجود داشته باشد که از توده مشاهدات پرت باشد، دامنه رقم غیرواقعی بزرگی را به عنوان پراکندگی آن مجموعه اطلاعات آماری نشان خواهد داد. به عنوان مثال فرض کنید که در مثال قبل، شرکت تجاری «ب» هم معمولاً هر ساله حدود ۵ میلیون تومان سود داشته باشد و فقط در یک سال خاص که غیر عادی بوده است، ۳۰ میلیون تومان ضرر بدهد. شاخص دامنه در چنین حالتی کمیت بزرگی را نتیجه خواهد کرد که به مفهوم پراکندگی شدید سود است، حال آنکه واقعیت امر آن است که به طور معمول این شرکت حدود ۵ میلیون

تومان سود داشته است و این سود دستخوش نوسانات شدید نبوده است.

۱–۲–۲ انحراف متوسط

اختلاف بین داده‌های یک مجموعه اطلاعات آماری از میانگین را انحراف از میانگین می‌نامند. انحراف از میانگین نشان می‌دهد که یک مشاهده تا چه میزان با میانگین متفاوت است.
به عنوان مثال تصور کنید زمان تحویل کالائی که در یک هفته خاص به کارخانه آلفا سفارش شده است از زمان درخواست به ترتیب ۸، ۹، ٦، ۴، ۸ روز باشد. بر اساس این آمار مشاهده می‌شود که میانگین زمان تحویل سفارشات ۷ روز است. یعنی از زمان درخواست به طور متوسط ۷ روز طول می‌کشد تا کالای درخواستی تحویل شود. امّا سئوال دیگری که مطرح است آن است که مدت زمان تحویل کالا تا چه اندازه تغییر می‌کند؟ مسلماً هر چه اختلاف بین زمان تحویل کالا از یک سفارش به سفارش دیگر کمتر باشد و یا به عبارت دیگر هر چه پراکندگی مدت زمان تحویل کالا کمتر باشد، امر برنامه‌ریزی موجودی انبار راحت‌تر است.
برای ساختن شاخصی که پراکندگی را نشان دهد شاید فکر بدی نباشد که انحراف هر مشاهده را از میانگین حساب کنیم و سپس از این انحراف میانگین بگیریم. هر قدر این میانگین بزرگتر باشد، مبیّن آن است که اختلاف مشاهدات از میانگینشان بیشتر و در نتیجه پراکندگی مشاهدات بیشتر است. باید گفت که این کار فکر جالبی است ولی متأسفانه میانگین انحراف چیزی را بدست نمی‌دهد چون جمع جبری انحراف از میانگین همواره صفر است. امّا اگر بتوان به گونه‌ای از قید علامتهای منفی انحراف از میانگین خلاص شد، می‌توان متوسط انحراف از میانگین را محاسبه کرد.
یکی از راه‌حل‌ها اینست که قدرمطلق انحرافات را در نظر بگیریم و متوسط قدرمطلق انحرافات را به عنوان شاخص پراکندگی مورد استفاده قرار دهیم. این شاخص پراکندگی را اصطلاحاً متوسط قدرمطلق انحرافات و یا به طور خلاصه انحراف متوسط (AD) می‌نامند.

$$AD = \frac{\sum |x-\mu|}{N}$$

در نتیجه انحراف متوسط مدت زمان تحویل کالا در مثال برابر ۱٫٦ است. بنابراین می‌توان گفت که مدت زمان تحویل یک سفارش خاص ممکن است به طور متوسط ۱٫٦ روز بیشتر یا کمتر از میانگین باشد.
این شاخص تأثیر انحرافات بزرگ را نشان نمی‌دهد یعنی انحراف بزرگ تأثیر اندکی روی شاخص می‌گذارد، لذا، شاخص ضعیفی است.

۱—۲—۳ واریانس

برای خلاصی جستن از علامتهای منفی انحرافات از میانگین، در قسمت قبل قدر مطلق انحرافات از میانگین را در نظر گرفتیم. راه دیگر آن است که انحراف را به توان دو برسانیم و به این ترتیب از قید علامتهای منفی خلاص شویم. این شاخص « واریانس » یا پراش نامیده می‌شود و با علامت $\sigma^۲$ نشان داده می‌شود.

$$\sigma^۲ = \frac{\sum(x-\mu)^۲}{N}$$

در مثال زمان تحویل کالا واریانس مدت زمان تحویل کالا برابر ۳/۲ است.

۱—۲—۴ انحراف معیار

واریانس واحدی ندارد و کمیت مطلق آن ملاک عمل است، زیرا با عمل توان‌رسانی مقیاس اندازه‌گیری مجذور شده و بی‌مفهوم می‌شود، نظیر مثال فوق که روز به توان دو است.
عمل توان رسانی نه تنها مقیاس اندازه‌گیری واریانس را بی‌مفهوم می‌کند بلکه انحرافات را نیز بزرگ می‌نماید. برای خنثی کردن این اثر می‌توان جذر واریانس را محاسبه کرد. به این ترتیب شاخص پراکندگی دیگری بدست می‌آید که به انحراف استاندارد یا « انحراف معیار » معروف است و با حرف σ نشان داده می‌شود. انحراف معیار و واریانس نقش مهمی را در استنباط‌های آماری ایفا می‌کنند.
به عنوان مثال، انحراف معیار مدت زمان تحویل کالا برابر ۱/۷۹ روز است.

۱—۳ ضریب تغییر و ویژگی‌های آن

مقدار تغییر در سود سال‌های گذشته یک شرکت تجاری شاخصی است که میزان ریسک سرمایه‌گذاری در آن شرکت را مشخص می‌کند. برای مثال اگر دو شرکت تجاری باشند که میانگین سود سالهای قبل آنها تقریباً برابر باشد، سرمایه‌گذاری در آن شرکتی پرمخاطره‌تر است که انحراف معیار بزرگتری دارد. امّا اگر میانگین سودها خیلی با هم متفاوت باشند، مقایسه ریسک موجود در سرمایه‌گذاری توسط پراکندگی نسبی آنها که با ضریب تغییر اندازه‌گیری می‌شود انجام می‌پذیرد.
ضریب تغییرات برای یک توزیع با میانگین μ و واریانس $\sigma^۲$ برابر $CV = \sigma/\mu$ است (البته برخی

از مؤلفین آن را در ۱۰۰ ضرب کرده و به صورت درصد گزارش می‌کنند) که برای سهولت آن را با حرف یونانی τ نشان می‌دهیم. این شاخص نشان می‌دهد که انحراف معیار چند درصد میانگین است.

ضریب تغییرات یکی از معیارهای مفید است که کاربرد گسترده‌ای در تحلیل پراکندگی مشاهده‌ها دارد، (تیان (۲۰۰۵)، آلبرچر و همکاران (۲۰۰۶)). این معیار همان‌طور که مور (۱۹۵۸) نیز نشان داده است به واحد اندازه‌گیری بستگی ندارد (برخلاف بسیاری از معیارهای پراکندگی که به واحد اندازه‌گیری بستگی دارند) و بنابراین می‌توان از آن برای مقایسه‌ی پراکندگی مجموعه مشاهده‌هایی با واحدهای اندازه‌گیری مختلف، استفاده کرد. البته موضوع پایایی ضریب تغییرات نیز بر فواید استفاده از این معیار افزوده است. چنان که اشنایدر وکوکران (۱۹۸۰) نشان داده‌اند، برای مشاهده‌هایی که از منابع و جمعیت‌های مختلف حاصل شده‌اند، غالباً مقدار انحراف معیار و میانگین با هم تغییر می‌کنند. بنابراین معمولاً ضریب تغییرات ثابت یا پایا می‌ماند. سورنسن (۲۰۰۲) نیز درباره‌ی ویژگی بدون واحد بودن، پایایی و موارد استفاده‌ی ضریب تغییرات مطالب جالبی ارائه کرده است.

درباره‌ی برآورد فاصله‌ای و آزمون فرض برای ضریب تغییرات هنوز فرمول‌های کلی برای همه‌ی توزیع‌ها وجود ندارد. ونگل (۱۹۹۶) چهار روش تقریبی را برای برآورد فاصله‌ای ضریب تغییرات در توزیع نرمال مورد بررسی قرار داده است. به علاوه وریل (۲۰۰۳) برای ضریب تغییرات در توزیع‌های نرمال و لگ نرمال فاصله‌ی اطمینان دقیق را محاسبه کرده است. واضح است که برای ارزیابی دقت یک فاصله‌ی اطمینان ارائه شده برای ضریب تغییرات، در نظر گرفتن کران‌های قطعی برای آن بسیار مفید است. همچنین تفسیر پراکندگی با در نظر گرفتن خاصیت کرانداری مفهوم بیشتری پیدا می‌کند.

مانند بسیاری از معیارهای پراکندگی، ضریب تغییرات نیز کاربردهای فراوانی دارد که از جمله می‌توان به کاربردهای آن در زیست شناسی ، شیمی ، آمارپزشکی ، اقتصاد ، روانشناسی و علوم اجتماعی اشاره کرد (برای مثال اسمیت و همکاران (۱۹۹۴)، هامبریک و همکاران (۱۹۹۶)، پیگل و همکاران (۲۰۰۰) را ببینید).

۱-۳-۱ کران‌هایی برای ضریب تغییرات نمونه‌ای

در صورتی که $\bar{X}$ و S^2 به ترتیب میانگین و واریانس نمونه‌ای باشند، یک برآوردگر مناسب برای τ به صورت $cv = S/\bar{X}$ است. ثابت می‌شود که این برآوردگر اریب است اما به طور مجانبی

نااریب و سازگار می‌باشد (آلبرچر و همکاران (۲۰۰۶)).
فرض کنید $X_1 \dots X_n$ مشاهده‌های نامنفی باشند. از نامنفی بودن مشاهده‌ها نتیجه می‌شود:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 \geq \sum_{i=1}^{n} X_i^2. \tag{1.1}$$

همچنین با استفاده از نامساوی کوشی– شوارتز برای بردارهای $X' = [X_1 \dots X_n]$ و $1' = [1 \dots 1]$ داریم:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \times 1\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} 1^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 \leq n\sum_{i=1}^{n} X_i^2. \tag{2.1}$$

رابطه (۱.۱) و (۲.۱) نتیجه می‌دهند که:

$$n\bar{X}^2 \leq \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \leq n^2\bar{X}^2. \tag{3.1}$$

از رابطه (۳.۱) و تعریف واریانس نمونه‌ای به راحتی می‌توان دید که $0 \leq S^2 \leq n\bar{X}^2$ بنابراین با توجه به تعریف ضریب تغییرات نمونه‌ای دراین حالت (با توجه به نامنفی بودن مشاهده‌ها) داریم:

$$0 \leq cv \leq \sqrt{n}. \tag{4.1}$$

به راحتی می‌توان دید که در رابطه (۴.۱) کرانه‌ی صفر زمانی حاصل می‌شود که همه‌ی مشاهده‌ها یکسان باشند و کران بالا $(\sqrt{n})$ زمانی حاصل می‌شود که تنها یکی از مشاهده‌ها غیر صفر و بقیه برابر صفر باشند .
همان‌طور که در ابتدا فرض شد، رابطه‌ی (۴.۱) با فرض نامنفی بودن مشاهده‌ها برقرار است. با این حال اگر همه‌ی مشاهده‌ها نامثبت باشند، رابطه (۴.۱) به صورت زیر برقرار است:

$$-\sqrt{n} \leq cv \leq 0. \tag{5.1}$$

حال ممکن است این سؤال مطرح شود که اگر برخی از مشاهده‌ها منفی و برخی دیگر مثبت باشند، آیا باز هم می‌توان برای ضریب تغییرات کرانه‌ای یافت. پاسخ به این سؤال مثبت است. ابتدا توجه کنید که:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \sum_{i\neq j}^{n} X_i X_j \qquad (6.1)$$

با فرض $\sum_{i\neq j}^{n} X_i X_j \geq 0$ ، رابطه (۶.۱) به رابطه (۱.۱) تبدیل می‌شود و لذا می‌توان برای ضریب تغییرات کران‌های مشابهی به دست آورد:

$$0 \leq |cv| \leq \sqrt{n}. \qquad (7.1)$$

همچنین با فرض $\sum_{i\neq j}^{n} X_i X_j \leq 0$ رابطه (۶.۱) نتیجه می‌دهد که $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \geq n\bar{X}^2$ و لذا می‌توان برای ضریب تغییرات کران زیر را به دست آورد:

$$|cv| \geq \sqrt{n}. \qquad (8.1)$$

به عنوان مثالی از کران‌های به دست آمده، کران‌داری ضریب تغییرات جامعه برای توزیع $\bar{X}$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. می‌دانیم که $\tau_{\bar{X}} = \sigma/(\sqrt{n}\mu)$. اگر برای برآورد این ضریب به جای σ از واریانس نمونه‌ای و به جای μ از میانگین نمونه‌ای استفاده کنیم مقدار $cv_{\bar{X}} = S/(\sqrt{n}\bar{X})$ به دست می‌آید. بنابراین با توجه به کران‌های به دست آمده در بالا نتیجه می‌شود که (با برقراری فرض‌های مربوطه):

$$0 \leq |cv(\bar{X})| \leq 1 \qquad (9.1)$$

با اثبات کران‌داری ضریب تغییرات نمونه‌ای (برای برخی از مجموعه مشاهده‌ها)، می‌توان گفت که این معیار نیز همانند بسیاری از معیارهای آماری از جمله ضریب همبستگی کران‌دار است و البته همانند آن به واحد اندازه‌گیری وابسته نیست. به خصوص در رابطه (۹.۱) مشاهده می‌شود که کران‌های به دست آمده برای ضریب تغییرات (مربوط به توزیع $\bar{X}$) با کران‌های ضریب همبستگی یکسان است.

۱–۳–۲ توزیع ضریب تغییر نمونه‌ای

اگر $X_1 \dots X_n$ برای $n \geq 3$، متغیرهای تصادفی نرمال و مستقل با میانگین μ و انحراف معیار σ باشند، آنگاه ایگلویج (۱۹۶۷) نشان داد که توزیع ضریب تغییر نمونه‌ای به صورت زیر است؛

$$f_{cv}(t) = \begin{cases} f_1(t) & \text{اگر } t \geq 0 \\ f_2(t) & \text{اگر } t < 0 \end{cases}$$

که؛

$$f_1(t) = \frac{A}{(1+t^2)^{n/2}} I_{n-1}\left(\frac{\delta}{(1+t^2)^{1/2}}\right),$$

و

$$f_2(t) = \frac{(-1)^n A}{(1+t^2)^{n/2}} I_{n-1}\left(\frac{-\delta}{(1+t^2)^{1/2}}\right),$$

که؛

$$A = \frac{t^{n-2} exp\left(-\frac{\delta^2 t^2}{2(1+t^2)}\right)}{\sqrt{2\pi}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) 2^{\left(\frac{n-3}{2}\right)}}$$

و

$$\delta = \frac{\sqrt{n}}{\tau}$$

I_{n-1} تابع ایری[1] با تعریف زیر می‌باشد:

$$I_{n-1}(b) = \int_0^\infty z^{n-1} exp(-\frac{1}{2}(z-b)^2)\, dz.$$

البته یادآور می‌شویم که ایگلویج تعریف $cv = \frac{S_n}{\bar{x}}$، را که $S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ مورد استفاده قرار داده است.

تقریب‌هایی برای توزیع cv

در بسیاری از محاسبات عملی فرض می‌شود که $P(cv < 0) \approx 0$. تحت این فرض گشتاورها وجود دارند که در این صورت X_i ها به طور دقیق نرمال نخواهند بود.

[1] Airy Function

اگر X_i دارای توزیع نرمال بریده شده در صفر باشد، میانگین و واریانس تقریبی برای cv به صورت زیر محاسبه می‌شوند (با توجه به زیربخش ۲—۲—۱):

$$E(cv) \approx \tau[1 + \frac{1}{n}(\tau^2 - \frac{1}{4}) + \frac{1}{n^2}(3\tau^4 - \frac{\tau^2}{4} - \frac{7}{32})$$
$$+\frac{1}{n^3}(15\tau^6 - \frac{3\tau^4}{4} - \frac{7\tau^2}{32} - \frac{19}{128})],$$
$$Var(cv) \approx \tau[\frac{1}{n}(\tau^2 - \frac{1}{2}) + \frac{1}{n^2}(8\tau^4 + \tau^2 + \frac{3}{8})$$
$$+\frac{1}{n^3}(69\tau^6 + \frac{7}{2}\tau^4 + \frac{3}{4}\tau^2 - \frac{3}{16})],$$

از آنجا که،

$$\sqrt{n}\frac{1}{cv} = \sqrt{n}\frac{\bar{X}}{S} = \left(\sqrt{n}\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} + \sqrt{n}\frac{\mu}{\sigma}\right) / \frac{S}{\sigma},$$

تحت فرض توزیع نرمال مشاهدات، آنگاه

$$\sqrt{n}\frac{1}{cv}$$

دارای توزیع t غیر مرکزی با $n - 1$ درجه آزادی و پارامتر غیر مرکزی

$$\delta = \sqrt{n}\frac{1}{\tau}$$

می‌باشد.

تقریب مک‌کی

مک‌کی (۱۹۳۲)، تقریب زیر را برای توزیع cv^2 معرفی کرد؛

$$\left(\frac{\tau + 1}{\tau}\right) \cdot \left(\frac{n\ cv^2}{1 + cv^2}\right) \approx \chi^2_{n-1}$$

که χ^2_{n-1} توزیع خی‌دو با $n - 1$ درجه آزادی می‌باشد.

تقریب با توزیع نرمال

cv تقریباً به صورت نرمال است و می‌توان از تقریب زیر نیز استفاده کرد:

$$\frac{\tau - E(\tau)}{\sqrt{Var(\tau)}} \approx N(0, 1).$$

۱—۴ نگاهی اجمالی بر فصول بعد

در فصل دوم به استنباط آماری درباره‌ی ضریب تغییر برای یک جامعه می پردازیم. استنباط آماری درباره‌ی ضریب تغییر شامل برآورد نقطه‌ای، برآورد فاصله‌ای و آزمون فرض برای ضریب تغییر می باشد. دانشمندان و محققان اغلب مایل به یافتن برآوردها و فواصل اطمینان مطلوب برای ضریب تغییر جامعه هستند. همچنین باید ذکر گردد که فواصل اطمینان بر اساس برآوردگر نقطه‌ای استوار است. بنابراین، دقت برآوردگر نقطه‌ای نیز بسیار مهم است. نشان می‌دهیم که ضریب تغییر نمونه یک برآوردگر دقیق از CV جامعه نمی باشد، در نتیجه برخی از پیشنهادات را بر اساس برآورد ماکسیمم راستنمایی برای بهبود برآورد CV جامعه ارائه می دهیم.
در فصل سوم به برآورد همزمان ضریب تغییر می‌پردازیم. تئوری برآورد مجانبی بهبود یافته برای ضریب تغییر تحت فرض همگنی مورد بحث قرار می‌گیرد. اگر فرض همگنی قابل قبول باشد، بهتر آن است که داده‌ها را روی هم ریخته و یک برآوردگر مشترک از ضریب تغییر به‌دست آوریم. با این وجود اگر فرض همگنی برقرار نباشد، برآوردگر ترکیبی مطوب نیست. در این شرایط برآوردگرها براساس اصول پیش‌آزمون ارائه می‌گردند (جیمز و استاین (۱۹۶۱)).
همان گونه که می‌دانیم پدیده‌های فراوانی یافت می‌شوند که نتایج و مشاهده‌های حاصل از بررسی آنها نامنفی‌اند. به عنوان مثال می‌توان گفت که همه‌ی علم آمار بیمه مربوط به زیان و توزیع‌های زیان است. از طرفی همه‌ی توزیع‌های شمارشی مورد استفاده برای تعداد خسارت‌ها یا ادعاهای خسارت و توزیع‌های تعریف شده برای مبالغ ادعاهای خسارت بر مقادیر نامنفی تعریف شده‌اند و شامل گستره‌ی زیادی از توزیع‌های آماری هستند (برای توصیف کاملی درباره‌ی توزیع‌های مرسوم و روشهای اشتقاق خانواده‌های جدید توزیع‌ها، کلاگمن وهمکاران (۱۹۹۸) را ببینید). لذا نتایج به دست آمده در بخش کران‌های ضریب تغییرات را می‌توان برای این گونه مشاهده‌ها به کار برد. در فصل چهارم کاربرد ضریب تغییرات در بررسی ریسک اعتباری در بانک‌ها و مؤسسات مالی ارائه شده است و نتایج حاصله با استفاده از داده‌های واقعی تفسیر شده‌اند.

فصل ۲

استنباط آماری درباره‌ی ضریب تغییر یک جامعه

۲—۱ برآورد نقطه‌ای برای ضریب تغییر یک جامعه

در این بخش در مورد اینکه آیا ضریب تغییر نمونه (cv) یک برآوردگر خوب برای ضریب تغییر جامعه است یا خیر بحث می‌کنیم. در زیر بخش ۲—۱—۱ کران‌هایی برای ضریب تغییر جامعه در توزیع‌های برنولی، یکنواخت گسسته، نمایی و نرمال بدست می آوریم. همچنین دقت cv نمونه را به عنوان یک برآوردگر برای τ در هر کدام از توزیع‌های مشخص شده در بالا مدّ نظر قرار می‌دهیم و در زیر بخش ۲—۱—۲ بررسی خواهیم کرد که آیا برآورد ماکسیمم راستنمایی (MLE) می‌تواند به عنوان برآوردگر بهتری برای τ استفاده شود یا خیر.

۲—۱—۱ کران‌هایی برای ضریب تغییر جامعه و برآوردگرهای آن

توزیع برنولی:

فرض کنید $X \sim B(p)$، که ۱ $> p >$ ۰، آنگاه:

$$\tau^{۲} = \frac{\sigma^{۲}}{\mu^{۲}} = \frac{p(۱-p)}{p^{۲}} = \frac{۱-p}{p}$$

از معادله بالا نتیجه می‌شود که:

$$\begin{cases} ۰ \leq \tau \leq ۱ & , p \geq \frac{۱}{۲} \\ ۱ \leq \tau \leq \infty & , p \leq \frac{۱}{۲} \end{cases} \qquad (۱.۲)$$

برای بررسی برآوردگر نمونه‌ای τ، نمونه‌هایی از این توزیع را در نظر می‌گیریم. به عنوان مثال، نمونه $(۱, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۰)$ را از توزیع برنولی با $p \geq \frac{۱}{۲}$ در نظر بگیرید. مقدار cv برای این نمونه ۳ است اما بر طبق رابطه (۱.۲) باید کمتر از ۱ باشد. به طور مشابه نمونه $(۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱)$ را از توزیع برنولی با $p \leq \frac{۱}{۲}$ در نظر بگیرید. cv نمونه برای این مورد ۰ است اما بر طبق رابطه (۱.۲) باید بیشتر از ۱ باشد. این موارد تنها دو مثال هستند که نشان می‌دهند cv نمونه یک برآورد خوب را برای τ در برخی شرایط ارائه نمی‌دهد. در موارد زیر، احتمال نقض رابطه (۱.۲) برای cv نمونه به طور کلی محاسبه می‌شود.
فرض کنید $X_۱ \dots X_n \sim B(p)$ که $p \geq \frac{۱}{۲}$. آنگاه نقض رابطه (۱.۲) برای cv نمونه بدین صورت است:

$$\begin{aligned} P(cv > ۱) &= P(cv^{۲} > ۱) = P\left(\frac{S^{۲}}{\bar{X}^{۲}} > ۱\right) \\ &= P\left(\frac{n\bar{X^{۲}} - n\bar{X}^{۲}}{(n-۱)\bar{X}^{۲}} > ۱\right) \\ &= P\left(\frac{n}{n-۱}\frac{۱-\bar{X}}{\bar{X}} > ۱\right) \qquad (\text{با توجه به اینکه در توزیع برنولی } n\bar{X^{۲}} = n\bar{X}) \\ &= P\left(\sum_{i=۱}^{n} X_i < \frac{n^{۲}}{۲n-۱}\right) = \sum_{k=۰}^{w}\binom{n}{k}p^k(۱-p)^{n-k} \end{aligned}$$

که $w = [\frac{n^{۲}}{۲n-۱}]$ و همچنین توجه داشته باشید که $\bar{X}$ میانگین نمونه، به عنوان برآوردگر p بکار می‌رود. جدول ۲–۱ مقدار این احتمال نقض را برای مقادیر مختلف n و p نشان می‌دهد. همانطور که از جدول ۲–۱ مشاهده می‌شود، احتمال تولید برآوردگرهای ضعیف برای τ هنگامی که مقادیر n و p افزایش می‌یابد، کاهش می‌یابد. با این وجود، این احتمال در برخی از موارد نسبتاً بالا است. به عنوان مثال، هنگامی که $p = ۰/۶$ و $n = ۱۰$ است این احتمال تقریباً ۰/۳۷ است.

جدول ۲—۱: احتمال تولید برآورد ضعیف برای τ.

		p ۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹
	۱۰	۰/۳۶۶۹	۰/۱۵۰۳	۰/۰۳۲۸	۰/۰۰۱۶
	۲۰	۰/۲۴۴۷	۰/۰۴۸۰	۰/۰۰۲۶	۰/۰۰۰۰
n	۳۰	۰/۱۷۵۴	۰/۰۱۶۹	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۰۰
	۴۰	۰/۱۲۹۸	۰/۰۰۶۳	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
	۵۰	۰/۰۹۷۸	۰/۰۰۲۴	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰

توزیع یکنواخت گسسته:

فرض کنید $X \sim DU\{۰, ۱, \ldots, u-۱\}$ با تابع جرم احتمال زیر باشد:

$$f_X(x) = \frac{۱}{u} \quad , \quad x = ۰, ۱, \ldots, u-۱$$

در این صورت روابط زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &\tau = \sqrt{(u+۱)/(۳(u-۱))} \quad , \\ &\sqrt{۳}/۳ < \tau \leq ۱ \end{aligned} \tag{۲.۲}$$

همانند توزیع برنولی، نمونه‌های زیادی وجود دارند که در آنها cv نمونه در رابطه (۲.۲) صدق نمی‌کند. به عنوان مثال، دو نمونه $(u, ۰, ۰, \ldots, ۰)$ و $(۱, ۱, \ldots, ۱)$ هر کدام با اندازه n در نظر می‌گیریم. مقادیر cv برای این دو نمونه به ترتیب $\sqrt{n}$ و ۰ است، که در رابطه (۲.۲) صدق نمی‌کنند.

مانند مثال قبل، احتمال قرار نگرفتن برآورد τ در فضای τ را می‌توان محاسبه کرد. به عنوان مثال، فرض کنید $X \sim DU\{۰, ۱, ۲\}$. جدول ۲—۲ همه‌ی نمونه‌های با اندازه ۴ از این توزیع را به همراه مقدار cv نمونه در هر مورد ارائه می‌دهد.

جدول ۲—۲: مقادیر cv نمونه برای توزیع یکنواخت گسسته در مجموعه $\{۰, ۱, ۲\}$ به اندازه ۴

cv	تعداد نمونه	نماد نمونه	$\sum_{i=۱}^{۴} X_i$
-	۱	(۰, ۰, ۰, ۰)	۰
۲٫۰۰	۴	(۱, ۰, ۰, ۰)	۱
۲٫۰۰	۴	(۲, ۰, ۰, ۰)	۲
۱٫۱۵	۶	(۱, ۱, ۰, ۰)	۲
۱٫۲۸	۱۲	(۲, ۱, ۰, ۰)	۳
۰٫۶۷	۴	(۱, ۱, ۱, ۰)	۳
۱٫۱۵	۶	(۲, ۲, ۰, ۰)	۴
۰٫۸۲	۱۲	(۲, ۱, ۱, ۰)	۴
۰٫۰۰	۱	(۱, ۱, ۱, ۱)	۴
۰٫۷۷	۱۲	(۲, ۲, ۱, ۰)	۵
۰٫۴۰	۴	(۲, ۱, ۱, ۱)	۵
۰٫۶۷	۴	(۲, ۲, ۲, ۰)	۶
۰٫۳۸	۶	(۲, ۲, ۱, ۱)	۶
۰٫۲۹	۴	(۲, ۲, ۲, ۱)	۷
۰٫۰۰	۱	(۲, ۲, ۲, ۲)	۸

بر طبق جدول ۲—۲، $P(\sqrt{۳}/۳ < cv \leq ۱) = ۰٫۴۱$. یعنی اینکه، ۵۹٪ از نمونه‌ها یک برآورد غیر قابل قبول از τ ارائه می‌دهند.

توزیع نمایی:

فرض کنید $X \sim E(\theta)$ دارای تابع چگالی $f(x) = \theta e^{-\theta x}$ باشد. در این توزیع مقدار τ برای $\theta > ۰$، برابر ۱ است. ده هزار نمونه با اندازه‌های $n = ۵, ۱۰, ۵۰$ از توزیع نمایی با میانگین ۱ شبیه‌سازی شده است. شکل ۲—۱ نمودار احتمال فراوانی را برای cv نمونه برای سه اندازه نمونه مختلف نشان می‌دهد. (برنامه شبیه‌سازی در R در پیوست ارائه شده است). در شکل ۲—۱ محور عمودی نشان دهنده‌ی تابع چگالی احتمال cv نمونه و محور افقی نشان دهنده‌ی مقدار cv نمونه است. باید ذکر گردد دقت این برآوردگر با افزایش مقادیر n زیاد می‌شود.