بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی‌تکنیک تهران)

دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی کاربردی (آنالیزعددی)

عنوان:

حل تقریبی معادلات انتگرال با استفاده از روشهای نیمه تحلیلی

دانشجو:

جلیل منافیان هریس

استاد راهنما:

دکترمهدی دهقان

استاد مشاور:

دکتر عباس سعادتمندی

آبان ۱۳۸۷

بسمه تعالی

تاریخ:
شماره:

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی‌تکنیک تهران)

فرم اطلاعات پایان‌نامه
کارشناسی- ارشد و دکترا

معاونت پژوهشی
فرم پروژه تحصیلات تکمیلی ۷

مشخصات دانشجو:

نام و نام خانوادگی: جلیل منافیان هریس   دانشجوی آزاد ✓   بورسیه ○   معادل ○

شماره دانشجوئی: ۸۵۱۱۳۰۴۲   دانشکده: ریاضی و علوم کامپیوتر   رشته تحصیلی: ریاضی کاربردی   گروه:

مشخصات استاد راهنما:

نام و نام خانوادگی: مهدی دهقان   درجه و رتبه : دانشیار

نام و نام خانوادگی: درجه و رتبه:

مشخصات استاد مشاور:

نام و نام خانوادگی: عباس سعادتمندی   درجه و رتبه: استادیار

نام و نام خانوادگی: درجه و رتبه:

عنوان پایان‌نامه به فارسی: *حل تقریبی معادلات انتگرال با استفاده از روشهای نیمه تحلیلی*

عنوان پایان‌نامه به انگلیسی: **Approximate solution of integral equations by using the semi-analytical methods**

نوع پروژه: کارشناسی ○   ارشد ✓   دکترا ○   سال تحصیلی: 1387

کاربردی ○   بنیادی ✓   توسعه‌ای ○   نظری ○

تاریخ شروع : ۱۳۸۶/۱۰/۱۰   تاریخ خاتمه : ۱۳۸۷/۹/۱۳   تعداد واحد : 6   سازمان تأمین کننده اعتبار :

واژه‌های کلیدی به فارسی: معادلات انتگرال، روش هموتوپی اختلال، روش هموتوپی تحلیلی، روش تبدیل دیفرانسیل ، معادلات انتگرال ولترا معادلات انتگرال فردهلم

واژه‌های کلیدی به انگلیسی : **Integral equations; Homotopy perturbation method; Homotopy analysis method; Variational iteration method, Differential transform method; Volterra integral equations; Fredholm integral equatioins**

مشخصات ظاهری	تعداد صفحات	تصویر ✓ جدول ✓ نمودار ✓ نقشه ○ واژه نامه ○		تعداد مراجع ۵۶	تعداد صفحات ضمائم
زبان متن	فارسی ✓	انگلیسی	چکیده	فارسی ✓	انگلیسی ✓
یادداشت					

نظرها و پیشنهادها به منظور بهبود فعالیت‌های پژوهشی دانشگاه

استاد:

دانشجو:

امضاء استاد راهنما: تاریخ: ۱۳۸۷/۱۰/۹

چکیده

در این پایان نامه حل معادلات انتگرال از نوع دوم با استفاده از روشهای نیمه تحلیلی مورد بررسی قرار گرفته است. روشهای نیمه تحلیلی همچون روش هموتوپی اختلال (HPM)، روش هموتوپی آنالیز (HAM)، روش تجزیه اصلاح شده ادومیان (MADM)، روش تکرار تغییراتی (VIM) و روش تبدیل دیفرانسیل (DTM) و تعمیم (GTDM) آن مورد بررسی قرار می گیرد. در این پایان نامه ایده اصلی نهفته در این روشها بخصوص جهت حل معادلات انتگرال غیر خطی مورد بحث قرار می‌گیرد. همچنین روشهای ارائه شده روی چند مثال پیاده می‌شود تا کارایی آنها مشخص گردد. نتایج نشان می دهد که این روشها از دقت بالای برخوردارند و برای حل معادلات انتگرال مفیدند. همچنین نتایج نشان می دهد که روشهای معرفی شده ابزار توانایی برای حل معادلات انتگرال نوع دوم می باشند.

کلمات کلیدی: معادلات انتگرال، روش هموتوپی اختلال، روش هموتوپی آنالیز، روش تکرار تغییراتی، معادلات انتگرال ولترا، معادلات انتگرال فردهلم، روش تبدیل دیفرانسیل، روش تبدیل دیفرانسیل تعمیم یافته.

فهرست مندرجات

مقدمه

اساساً معادلات انتگرال کاربرد زیادی در علوم، مهندسی، فیزیک و ... دارد. کاربرد معادلات انتگرال باعث شده که این شاخه نیز همچون معادلات دیفرانسیل معمولی و جزیی دارای اهمیت خاصی باشد. معادلات انتگرال به معادلات نوع اول و دوم تقسیم می شوند. در این پایان نامه کار ما بیشتر با معادلات انتگرال نوع دوم است که آن را نیز دسته بندی می کنیم. حالتی که هسته انتگرال جدایی پذیر باشد روشهای تبدیل لاپلاس و فوریه را مورد استفاده قرار داده اند. اما وقتی که هسته انتگرال جداپذیر نباشد روشهای تبدیل لاپلاس و فوریه و روش بسط به خوبی همگرا نمی شوند. در چند دهه اخیر روشهای نیمه تحلیلی همچون روش هموتوپی آنالیز و هموتوپی اختلال و روش تکرارتغییراتی و روش تجزیه ادومیان و همچنین تجزیه اصلاح شده بکار گرفته شده اند. چون حل روشهای عددی برای حل معادلات انتگرال با هسته انتگرال غیر خطی دشوار می باشد و به خوبی همگرا نمی گردند لذا استفاده از روشهای نیمه تحلیلی برای حل چنین انتگرالهایی به صرفه می باشد. به‌همین دلیل ما اساس این پایان نامه را بر این روشها بنا نهاده و به ارائه آنها می پردازیم.

روش تجزیه ادومیان در سال ۱۹۸۰ توسط جورج ادومیان [۱] [٦] پیشنهاد شده است که اساساً این روش بااستفاده از یک چند جمله ای برای حل معادلات غیر خطی بکار گرفته شده است. این روش، یک روش کارا برای حل معادلات انتگرال با هسته انتگرالی غیر خطی می باشد. روش همو توپی [۲] آنالیز در سال ۱۹۹۲ توسط شی جون لیاو [۳] [۳۴] برای حل مسائل غیر خطی بکار گرفته شده است. روش هموتوپی اختلال در سال ۱۹۹۸ توسط خی [۴] [۲٦] معرفی شده است. همچنین روش تکرار تغییراتی اولین بار در سال۱۹۹۷ توسط خی [۲۵] معرفی شده است. تکنیک های تحلیلی برای حل مسائل غیر خطی که کاربردهای گسترده در مهندسی دارند استفاده شده است. اما مثلاً تکنیک های تحلیلی غیر خطی روش های انحرافی دارای محدودیت هایی است. اولاً تقریباً همه روش های اختلال بر اساس پارامتر کوچک هستند طوریکه جوابهای تقریبی می توانند به صورت یک سری از پارامترهای کوچک بیان شوند. این فرض پارامتر کوچک معروف بطور زیاد کاربردهای تکنیک های اختلال را محدود می کند همانطوریکه معلوم است اکثریت زیادی از مسائل غیرخطی در کل پارامتر کوچک ندارند. دوماً تشخیص پارامترهای کوچک به نظر می رسد یک هنر خاص باشد که نیازمند تکنیک های خاص می باشد. یک انتخاب مناسب از پارامترهای کوچک به یک نتیجه ایده‌آل منتهی می شود اما یک انتخاب نامناسب از پارامتر کوچک اثر بدی دارد و بعضی مواقع جدی است. سوماً حتی اگر پارامترهای مناسب وجود داشته باشد جوابهای تقریبی حل شده با استفاده از روشهای اختلال در بیشتر حالتها فقط برای مقادیر کوچک از پارامترها درست هستند. آشکار است که همه این محدودیت ها

---
[۱] Adomian
[۲] Homotopy
[۳] S. J. Liao
[۴] J. H. He

از فرض پارامتر کوچک ناشی می شود. بنابراین خیلی ضروری است که یک نوع از روش تحلیلی غیر خطی جدید که در کل به پارامتر کوچک نیاز ندارد توسعه بدهیم. در سال ۱۹۹۷ Liu [۳۸] یک تکنیک اختلال جدید نه براساس پارامتر کوچک بلکه بر اساس پارامترهای مصنوعی کوچک پیشنهاد داد که در معادلات داخلی هستند. روش ترکیب از تکنیک هموتوپی و تکنیک اختلال روش هموتوپی اختلال نامیده می شود.

پایان نامه در ٦ فصل خلاصه شده است: فصل ۱ تعاریف و قضایای مقدماتی بیان شده است. فصل ۲ روشهای نیمه تحلیلی را مورد مطالعه قرار داده ایم. فصل ۳ حل معادلات انتگرال فردهلم—ولترا را با استفاده از روشهای نیمه تحلیلی بررسی کرده ایم. فصل ۴ همگرایی روش هموتوپی اختلال برای دسته ای از معادلات انتگرال غیر خطی بکار برده ایم. فصل ۵ روش تبدیل دیفرانسیل را برای حل مسائل مقدار مرزی مورد استفاده قرار دادیم. فصل ٦ روش تبدیل دیفرانسیل تعمیم یافته را برای حل مسائل مقدار مرزی بکار برده ایم. و در آخر مراجع و واژه نامه فارسی را می آوریم.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی و روشهای نیمه تحلیلی

۱ معادله انتگرال

در این فصل به معرفی مفاهیم ابتدائی که در سراسر این پایان نامه مورد استفاده قرار می‌گیرند، می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱.۱. معادله انتگرال در واقع معادله ای است که در آن تابع مجهول $u(x)$ زیر علامت انتگرال واقع شود.

$$u(x) = f(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)u(t)dt.$$

معادلات انتگرال به سه نوع تقسیم بندی می شود:
(الف) معادله انتگرال فردهلم
(ب) معادله انتگرال ولترا
(پ) معادله انتگرال منفرد

تعریف ۲.۱.۱. معادله انتگرال فردهلم معادله‌ای است که فاصله انتگرالگیری فاصله بسته $[a,b]$ باشد که a و b اعداد ثابت هستند

$$u(x) = f(x) + \int_{a}^{b} K(x,t)u(t)dt,$$

معادله انتگرال فردهلم نوع اول گفته می شود وقتی $f(x) = 0$ در غیر اینصورت نوع دوم گفته می شود.

تعریف ۳.۱.۱. معادله انتگرال ولترا معادله‌ای است که فاصله انتگرالگیری یعنی فاصله $[a,x]$ باشد

$$u(x) = f(x) + \int_{a}^{x} K(x,t)u(t)dt,$$

معادله انتگرال ولترا نوع اول گفته می شود وقتی $f(x) = 0$ در غیر اینصورت نوع دوم گفته می شود.

تعریف ۴.۱.۱. معادله انتگرال منفرد زمانی روی می دهد که فاصله انتگرالگیری نامتناهی یا هسته معادله $K(x,t)$ در یک یا بیشتر از یک نقطه در حوزه انتگرالگیری $a \leq t \leq b$ تکین باشد.

تبصره : گفتنی است معادله انتگرال ولترا حالت خاصی از معادله انتگرال فردهلم می باشد زیرا در معادله انتگرال ولترا هسته انتگرالی $K(x,t)$ برای $t > x$ که $x \in [a,b]$ صفر در نظر گرفته می شود. اگر معادله دیفرانسیل به صورت یک مساله مقدار مرزی باشد معادله انتگرالی که ظاهر می شود از نوع فردهلم خواهد بود و اگر به صورت یک مساله مقدار اولیه باشد معادله انتگرالی از نوع ولترا خواهد بود.

۲ معادله انتگرال–دیفرانسیل

تعریف ۱.۲.۱ . معادله انتگرال–دیفرانسیل به معادله ای گفته می شود که تابع مجهول در دو طرف ظاهر شود، یکی زیر علامت انتگرال واقع می شود و دیگری بصورت مشتق ظاهر می گردد، بعنوان مثال

$$u^{(n)}(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)u(t)dt.$$

لم ۱.۲.۱ . هسته انتگرالی $K(x,t)$ را بر حسب x و t در مربع $a \leq t \leq b$ و $a \leq x \leq b$ انتگرالپذیر گویند هرگاه در شرط (منظم بودن) زیر صدق کند

$$\int_a^b \int_a^b K(x,t)dxdt < \infty.$$

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنیم f و g نگاشت های پیوسته از فضای X به توی فضای Y باشند. f را با g هموتوپ خوانیم در صورتی که نگاشت پیوسته‌ای مانند $F : X \times I \to Y$ موجود باشد به طوریکه به ازای هر x از X داشته باشیم

$$F(x,0) = f(x), \qquad F(x,1) = g(x),$$

در اینجا $I = [0,1]$. نگاشت F را یک هموتوپی[1] بین f و g می نامیم و اگر f با g هموتوپ باشند آنگاه می نویسیم $f \simeq g$.

---

[1] Homotopy

۳ روش تجزیه ادومیان

روش تجزیه ادومیان به عنوان یک روش جدید برای حل معادلات تابعی غیر خطی در سال ۱۹۸۰ توسط جورج ادومیان معرفی شده است. این روش به اختصار با ADM[۲] نشان داده می شود و مورد بررسی زیادی واقع شده است. در روش ADM عملگر خطی نمایش قسمت خطی معادله اصلی می باشد و این عملگر معکوس پذیر است و قسمت غیر خطی بوسیله چند جمله ای ادومیان تجزیه می شود. این روش جواب را به شکل یک سری از جملات که با استفاده از رابطه بازگشتی از چند جمله ای ادومیان بدست می آید تولید می کند. خلاصه ای از روش را به صورت زیر در نظر می گیریم. معادله دیفرانسیل غیر خطی کلی $Fy = f$ را به شکل زیر در نظر می گیریم :

$$Ly + Ry + Ny = f, \tag{۱.۱}$$

که L عملگر خطی از قسمت خطی F است که معکوس پذیر می باشد و R باقیمانده قسمت خطی و N عملگر غیر خطی می باشند. با بکارگیری عملگر معکوس L^{-1} معادله (۱.۱) می شود

$$y(t) = g(t) - L^{-1}Ry(t) - L^{-1}Ny(t), \qquad g(t) = L^{-1}f(t), \tag{۱.۲}$$

آنگاه فرض می شود که تابع مجهول می تواند به صورت یک سری نامتناهی $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t)$ در نظر گرفته شود و جمله غیر خطی با یک سری از چندجمله ای ادومیان A_n نشان داده می شود. جمله غیر خطی به صورت زیر در نظر گرفته می شود

$$Ny(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n,$$

که A_n می تواند به صورت زیر مشخص شود

$$A_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n} Ny(\lambda)\bigg|_{\lambda=0},$$

که $y(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n y_n$ و از

$$y(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n y_n = y_0 - L^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} Ry_n - L^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n,$$

رابطه بازگشتی زیر نتیجه می شود

$$y_0(t) = g(t), \tag{۱.۳}$$

$$y_{n+1}(t) = -L^{-1}Ry_n(t) - L^{-1}A_n,$$

این روش یک سری جواب همگرا را فراهم می کند و سری قطع شده جواب تقریبی را فراهم می کند.

---
[۲] Adomian Decomposition Method

۴ روش تجزیه اصلاح شده ادومیان

یک روشی اصلاحی برای محاسبه چندجمله ای ادومیان در [۱۱] آمده است. همچنین در [۵۴] روش اصلاحی بیان شده است که اساس آن بر این بنا شده که تابع $g(t)$ به دو مولفه $g_0(t)$ و $g_1(t)$ تقسیم می شود. تحت این فرض داریم

$$g(t) = g_0(t) + g_1(t), \tag{۱.۴}$$

در نتیجه رابطه بازگشتی اصلاح شده به صورت زیر است [۵۴]

$$y_0(t) = g_0(t), \tag{۱.۵}$$

$$y_1(t) = -L^{-1}Ry_0(t) - L^{-1}A_0,$$

$$y_{k+2}(t) = -L^{-1}Ry_{k+1}(t) - L^{-1}A_{k+1}, \quad k \geq 0,$$

که A_{k+1} چند جمله‌ای های ادومیان نامیده می شوند.

۵ روش اختلال

امروزه اکثر مسائل فیزیکی که فیزیکدان ها و مهندسان و ریاضیدان های کاربردی با آنها مواجه می شوند ویژگی اساسی مشخصی از جوابهای واقعی تحلیلی را که غیر ممکن هستند را به نمایش می گذارند. این ویژگی ها شامل معادلات غیر خطی، شرایط مرزی غیر خطی در بعضی حالتها یا مرزهای نامعلوم با ضرایب متغیر و شکل های مرزی مختلط می باشند. از این رو فیزیکدان ها، مهندسان و ریاضیدان های کاربردی مجبورند تا جوابهای تقریبی از مسائلی که آنها مواجه می شوند را مشخص کنند. تقریب‌ها ممکن است صرفاً عددی یا تحلیلی یا ترکیبی از تکنیک های عددی یا تحلیلی باشد. وقتی تکنیک‌های تحلیلی با یک روش عددی ترکیب می‌شود تکنیک‌های خیلی تواناو همه منظوره را نتیجه می دهند. تقریب های تحلیلی بطور گسترده به دو حالت گویا و گنگ تقسیم می شوند. تقریب گنگ معمولاً با یک مدل بندی ریاضی موقت که شامل نگهداشتن عناصر مشخص و نادیده گرفتن بعضی ها و تقریب عناصر دیگر می باشد. بنابراین آن به بن بست می خورد چون دقت نتایج با تقریب های متوالی بهبود داده نمی شود. تقریب گویا یک بسط سیستماتیک را ارائه می دهد که اختلال یا مجانبی نامیده می شود که در اصل بطور نامتناهی پیوسته می باشد.

۱.۵ پارامتر اختلال

اگر مسائل فیزیکی شامل اسکالر بی بعد باشند متغیر برداری $u(x,\epsilon)$ می تواند بطور ریاضی با استفاده از معادله دیفرانسیل $L(y,x,\epsilon)$ و شرط مرزی $B(x,\epsilon) = 0$ که x و ϵ بی بعد می باشند حل شود و در

کل نمی توان آنرا بطور واقعی حل نمود. اما اگر یک $\epsilon = \epsilon_\circ$ وجود داشته باشد مساله داده شده می تواند واقعاً حل شود یا بطور عددی حل می شود و یا جواب $u(x,\epsilon)$ برای مقادیر کوچک ϵ جستجو می کنیم و بسطی بر حسب توانهای ϵ به شکل زیر خواهیم داشت :

$$u(x,\epsilon) = u_\circ(x) + \epsilon u_۱(x) + \epsilon^۲ u_۲(x) + ... = \sum_{k=\circ}^{\infty} \epsilon^k u_k(x)$$

که $u_k(x)$ مستقل از ϵ و $u_\circ(x)$ جواب مساله است وقتی $\epsilon = \circ$. چنین بسط هایی پارامتر انحرافی نامیده می شوند.

٦ روش همو توپی آنالیز

روش هموتوپی آنالیز در سال ۱۹۹۲ توسط توسط لیاو[۳] [۳۴] برای حل معادلات غیر خطی پیشنهاد شده است . معادله دیفرانسیل زیر را در نظر می گیریم

$$\mathcal{A}u(x,t) = \circ, \tag{٦.۱}$$

که $\mathcal{A}$ یک عملگر غیر خطی است که x و t متغیرهای مستقل و $u(x,t)$ یک تابع مجهول است . برای سادگی همه شرایط اولیه و مرزی را نادیده می گیریم که در یک روش ساده بیان می شود. بر اساس معادله تغییر شکل مرتبه صفر ساخته شده توسط لیاو [۳۴] معادله تغییر شکل مرتبه صفر به روش مشابه به صورت زیر می باشد.

$$(۱ - q)\mathcal{L}[\Phi(x,t;q) - u_\circ(x,t)] = qh\mathcal{N}\Phi(x,t;q), \tag{۷.۱}$$

$$\mathcal{L}[f] = \circ \Rightarrow f = \circ,$$

که $q \in [\circ, ۱]$ پارامتر نشاندن، h پارامتر کمکی ناصفر و $\mathcal{L}$ عملگر خطی کمکی با این ویژگی که $\mathcal{L}(\mathcal{C}) = \circ$ که C مجموعه همه توابع پایه می باشد و $u_\circ(x,t)$ یک حدس اولیه از $u(x,t)$ می باشد و $\Phi(x,t;q)$ یک تابع مجهول با متغیرهای مستقل x، t و q است. باید به این نکته مهم توجه کرد که آزادی زیادی برای انتخاب پارامتر کمکی h در روش هموتوپی آنالیز داریم اگر $q = \circ$ و $q = ۱$ بترتیب داریم

$$\Phi(x,t;\circ) = u_\circ(x,t), \qquad \Phi(x,t;۱) = u(x,t), \tag{۸.۱}$$

بنابراین وقتی q از صفر به یک افزایش می یابد آنگاه $\Phi(x,t;q)$ از حدس اولیه $u_\circ(x,t)$ به $u(x,t)$ می باشد. بسط تیلور $\Phi(x,t;q)$ نسبت به q به صورت زیر می باشد

[۳] Liao

$$\Phi(x,t;q) = u_0(x,t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x,t)q^m, \tag{۱.۹}$$

که

$$u_m(x,t) = \left.\frac{\partial^m \Phi(x,t;q)}{\partial q^m}\right|_{q=0}. \tag{۱.۱۰}$$

اگر عملگر خطی کمکی $\mathcal{L}$، حدس اولیه $u_0(x,t)$ و پارامتر کمکی h به درستی انتخاب شوند سری بالا در $q=1$ همگرا می شود

$$\Phi(x,t;q) = u_0(x,t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x,t), \tag{۱.۱۱}$$

که یک جواب برای معادله غیر خطی می باشد که توسط لیاو اثبات شده است وقتی $h=-1$ انتخاب کنیم معادله بالابه صورت زیر می شود

$$(1-q)\mathcal{L}\left[\Phi(x,t;q) - u_0(x,t)\right] + q\mathcal{N}\Phi(x,t;q) = 0, \tag{۱.۱۲}$$

که اکثراً در روش هموتوپی اختلال (HPM) استفاده می شود. بنابراین روش هموتوپی اختلال یک حالت خاص از روش هموتوپی آنالیز می باشد، مطابق با این روند معادله حاکم از معادله تغییر شکل مرتبه صفر نتیجه می شود. بردار زیر را تعریف می کنیم

$$\overrightarrow{u_n}(x,t) = \left\{u_0(x,t), u_1(x,t), ..., u_n(x,t)\right\}, \tag{۱.۱۳}$$

با m بار مشتق گیری از معادله (۱.۷) نسبت به پارامتر نشاندن q و با جاگذاری $q=0$ و بالاخره با تقسیم آنها بر $m!$ به معادله معروف تغییر شکل مرتبه mام زیر می رسیم

$$\mathcal{L}[u_m(x,t) - \chi_m u_{m-1}(x,t)] = h\mathcal{R}_m\left(\overrightarrow{u}_{m-1}(x,t;q)\right), \tag{۱.۱۴}$$

که

$$\mathcal{R}_m\left(\overrightarrow{u}_{m-1}(x,t;q)\right) = \frac{1}{(m-1)!}\left.\frac{\partial^{m-1}\mathcal{N}(\Phi(x,t;q))}{\partial q^{m-1}}\right|_{q=0}, \tag{۱.۱۵}$$

که

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1, \\ 1, & m > 1. \end{cases} \tag{۱.۱۶}$$

بنابراین داریم

$$u_m(x,t) = \chi_m u_{m-1}(x,t) + h\mathcal{L}^{-1}\mathcal{R}_m\left(\overrightarrow{u}_{m-1}(x,t;q)\right), \qquad (۱.۱۷)$$

معادله تغییر شکل مرتبه mام خطی است، بنابراین به آسانی حل می شود بویژه با استفاده از نرم افزارهای محاسباتی همچون میپل[۴]، مطلب[۵]، ماکسیما[۶] و مسمتیکا[۷] و غیره براحتی حل می شود. باید تاکید شود که معادله تغییر شکل مرتبه صفر با استفاده از عملگر خطی کمکی $\mathcal{L}$، تقریب اولیه $u_0(x,t)$ و پارامتر کمکی h مشخص می شود. بطور تئوری صحبت از جواب $u(x,t)$ داده شده با استفاده از ایده بالا وابسته به عملگر خطی کمکی $\mathcal{L}$، تقریب اولیه $u_0(x,t)$ و پارامتر کمکی h است. بنابراین برخلاف تکنیک های تحلیلی قبلی ایده بالا ممکن نیست بطوریکتا مشخص شود.

قضیه ۱.۶.۱. قضیه همگرایی
وقتی سری (۱.۱۱) همگرا می شود که $u_0(x,t)$ تحت تاثیرمعادله تغییر شکل (۱.۱۴) و تعریف (۱.۱۵) و (۱.۱۶) باشد، آن باید جواب واقعی معادله(۱.۶) باشد.

اثبات. اگر سری

$$\sum_{m=0}^{\infty} u_m(x,t),$$

همگرا باشد، می توانیم بنویسیم

$$S(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m(x,t),$$

و آن برقرار است

$$lim_{n\to\infty} u_n(x,t) = 0,$$

با استفاده از معادلات (۱.۱۴) و (۱.۱۶) داریم

$$\sum_{m=1}^{n}[u_m(x,t) - \chi_m u_{m-1}(x,t)] = u_1 + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + ... + (u_n - u_{n-1}) = u_n(x,t),$$

که داریم

$$\sum_{m=1}^{\infty}[u_m(x,t) - \chi_m u_{m-1}(x,t)] = lim_{n\to\infty} u_n(x,t) = 0,$$

بعلاوه با استفاده از بسط بالا و تعریف (۱.۱۴) از $\mathcal{L}$ و چون $\mathcal{L}$ عملگر خطی است، داریم

$$\sum_{m=1}^{\infty}\mathcal{L}[u_m(x,t) - \chi_m u_{m-1}(x,t)] = \mathcal{L}\sum_{m=1}^{\infty}[u_m(x,t) - \chi_m u_{m-1}(x,t)]$$

---

[۴] Maple
[۵] Matlab
[۶] Maxima
[۷] Mathematica

$$= \mathcal{L} \lim_{n\to\infty} u_n(x,t) = 0,$$

از عبارت بالا و معادله (۱. ۱۴) بدست می آوریم

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{L}[u_m(x,t) - \chi_m u_{m-1}(x,t)] = \sum_{m=1}^{\infty} h\mathcal{R}_m\left(\overrightarrow{u}_{m-1}(x,t)\right) = 0,$$

چون $h \neq 0$ پس داریم

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{R}_m\left(\overrightarrow{u}_{m-1}(x,t)\right) = 0$$

از معادله (۱. ۱۵) نیز خواهیم داشت

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{R}_m\left(\overrightarrow{u}_{m-1}(x,t)\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}\mathcal{N}(\Phi(x,t;q))}{\partial q^{m-1}}\bigg|_{q=0}$$

$$= \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}\mathcal{N}(\sum_{m=0}^{\infty} u_m(x,t)q^m)}{\partial q^{m-1}}\bigg|_{q=0} = 0.$$

که $S(t)$ در معادله بالا صدق می کند و جواب واقعی معادله حاکم اصلی می باشد. اثبات تمام است.

۱.۶ جملات جواب

متفاوت از جملات جواب پیشین که توسط روشهای انحرافی و غیر انحرافی داده شده، جواب داده شده با استفاده از روش هموتوپی آنالیز می تواند با استفاده از چند تابع پایه متفاوت بیان شود که در زیر آمده است.

۲.۶ توابع چند جمله ای

عبارت جواب ممکن است مجموعه ای از توابع پایه زیر باشد [۳۷]

$$t^{2m+1}\Big| m = 0, 1, 2, \ldots,$$

و

$$u_m(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(x) t^{2m+1},$$

که $a_m(x)$ ضریب t^{2m+1} است.

۳.۶ توابع کسری
عبارت جواب ممکن است مجموعه ای از توابع پایه به شکل زیر باشد

$$(1+t)^{-m}\,|\,m=0,1,2,...,$$

$$u_m(x,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{b_m(x)}{(1+t)^m},$$

که $b_m(x)$ ضریب $(1+t)^{-m}$ است.

۴.۶ توابع نمایی
عبارت جواب ممکن است مجموعه ای از توابع پایه‌نمایی زیر باشد

$$e^{-nt}\Big|\,n\neq 0,$$

$$u_m(x,t)=\sum_{m=0}^{\infty}c_m(x)e^{-mt},$$

که $c_m(x)$ ضریب e^{-mt} است. یا توابع پایه ممکن است ترکیبی از سه حالت گفته شده باشد. نکته جالب این است که می توان برای توابع پایه کسری از قضیه دو جمله ای نیوتن استفاده کرد برای نشان دادن آن سری زیر را در نظر می گیریم

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-t^3+...=\lim_{m\to+\infty}\sum_{n=0}^{m}(-1)^n t^n,\qquad |t|<1,$$

تعریف می کنیم $x=1+h+ht$ آنگاه داریم

$$\frac{1}{1+t}=-\lim_{m\to+\infty}h\sum_{n=0}^{m}(1+h+ht)^n,\qquad -1<t<\frac{2}{|h|}-1,\quad (-2<h<0),$$

داریم

$$-h\sum_{n=0}^{m}(1+h+ht)^n=-h\sum_{n=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n\\ k\end{pmatrix}(1+h)^{n-k}(ht)^k=$$

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k t^k(-h)^{k+1}\sum_{i=0}^{m-k}\begin{pmatrix} i+k\\ k\end{pmatrix}(1+h)^i=\sum_{n=0}^{m}(-1)^n t^n\mu_{-1}^{m,n}(h),$$

که‌بنابراین خواهیم داشت

$$\mu_{-1}^{m,n}(h)=(-h)^{n+1}\sum_{j=0}^{m-n}\begin{pmatrix} n+j\\ j\end{pmatrix}(1+h)^j$$

$$\frac{۱}{۱+t} = \lim_{m\to+\infty}\sum_{n=۰}^{m}(-۱)^n t^n \mu_{۰}^{m+۱,n+۱}(h), \quad -۱ < t < \frac{۲}{|h|} - ۱, (-۲ < h < ۰),$$

بوضوح ناحیه همگرایی $۱ > t > ۱-$ است وقتی $h = -۱$ و $۳ > t > ۱-$ است وقتی $h = -\frac{۱}{۲}$، بویژه ناحیه همگرایی $+\infty > t > ۱-$ می شود وقتی h به صفر میل می کند، بنابراین ناحیه همگرایی را می توان با استفاده از پارامتر کمکی h تنظیم و کنترل کرد.

قضیه ۱.۶.۲.[۳۷]

$$(۱+t)^\alpha = \lim_{m\to+\infty}\sum_{n=۰}^{m}\left(\begin{array}{c}\alpha\\ n\end{array}\right) t^n \mu_\alpha^{m,n}(h), \tag{۱.۱۸}$$

برای عدد حقیقی α $(\alpha \neq ۰, ۱, ۲, ۳, ...)$ در ناحیه $-۱ < t < \frac{۲}{|h|} - ۱$ که

$$\left(\begin{array}{c}\alpha\\ n\end{array}\right) = \frac{\alpha(\alpha-۱)(\alpha-۲)...(\alpha-n+۱)}{n!},$$

$$\mu_\alpha^{m,n}(h) = (-h)^{n-\alpha}\sum_{j=۰}^{m-n}(-۱)^j \left(\begin{array}{c}\alpha-n\\ j\end{array}\right)(۱+h)^j.$$

برای اثبات به [۳۷] رجوع شود.

تبصره: برای هر عدد k با استفاده از تعریف رابطه زیر برقرار است

$$\mu_k^{m,n}(h) = (-h)^{n-k}\sum_{j=۰}^{m-n}\left(\begin{array}{c}n-k-۱+j\\ j\end{array}\right)(۱+h)^j \tag{۱.۱۹}$$

اثبات می شود که برای هر عدد $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ و $\mu_\alpha^{m,n}(-۱) = ۱$ و برای هر عدد مثبت n و $|۱+h| < ۱$ داریم

$$\lim_{m\to+\infty}\mu_\alpha^{m,n}(h) = (-h)^{n-\alpha}\sum_{k=۰}^{+\infty}(-۱)^k\left(\begin{array}{c}\alpha-n\\ k\end{array}\right)(۱+h)^k \tag{۱.۲۰}$$

$$= (-h)^{n-\alpha}\left[۱+(-۱-h)\right]^{\alpha-n} = ۱,$$

خاصیت دیگر

$$\sum_\alpha^{m,n,k}\sigma_\alpha^{m,n,k}(h) = \frac{۱}{۲}\left[\mu_\alpha^{m,n+k}(h) + \mu_\alpha^{m,n+k-۱}(h)\right], \quad -\infty < \alpha < +\infty, \tag{۱.۲۱}$$

آسان است اثبات کنیم که برای $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ و $۰ \leq n \leq m+۱$ آن برقرار است

$$\sum_{\alpha}^{m,n,k} \sigma_{\alpha}^{m,n,k}(h) = \begin{cases} 1, & 0 \le k < m+1-n \\ \frac{1}{2}, & k = m+1-n \end{cases} \tag{۱.۲۲}$$

$$\lim_{m\to+\infty} \sigma_{\alpha}^{m,n,k}(h) = \begin{cases} 1, & |1+h| < 1, \\ \infty, & |1+h| > 1. \end{cases}$$

ایده توابع $\mu_{\alpha}^{m,n}(h)$ و $\sigma_{\alpha}^{m,n,k}(h)$ دارای مفهوم کلیتری می باشند و بنابراین می تواند بطور کلی برای بسط دامنه های همگرایی از سری های تقریب بکار می‌رود. بسط تیلور را در نظر می گیریم و فرض کنیم $f(z)$ یک تابع است

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n, \tag{۱.۲۳}$$

ما می توانیم سری تیلور تعمیم یافته از نوع اول را به صورت زیر تعریف کنیم

$$\lim_{m\to+\infty} \sum_{n=0}^{m} \mu_{\alpha}^{m,n}(h) \left[\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n\right], \tag{۱.۲۴}$$

تکنیک هموتوپی–پاده ترکیبی از روش پاده و روش هموتوپی آنالیز می باشد. تکنیک پاده $[m,n]$ با پارامتر نشاندن[۸] q بکار می گیریم تقریب پاده $[m,n]$ بصورت زیر در می آید [۳۷]

$$\frac{\sum_{k=0}^{m} A_{m,n}(x,t)q^k}{\sum_{k=0}^{m} B_{m,n}(x,t)q^k}, \tag{۱.۲۵}$$

که ضرایب $A_{m,n}$ و $B_{m,n}$ با استفاده از تقریب های زیر بدست می آیند

$$u_0(x,t), u_1(x,t), ..., u_{m+n}(x,t),$$

پس با جاکذاری $q=1$ تقریب هموتوپی–پاده $[m,n]$ را به شکل زیر خواهیم داشت

$$\frac{\sum_{k=0}^{m} A_{m,n}(x,t)}{\sum_{k=0}^{m} B_{m,n}(x,t)}, \tag{۱.۲۶}$$

ضرایب $A_{m,n}$ و $B_{m,n}$ با استفاده از توابع پایه بدست می آیند. در کل تقریب هموتوپی–پاده $[m,n]$ بصورت زیر بیان می شود

$$\frac{\sum_{n=1}^{m^2+m+1} a_2^{m,n} t^n}{\sum_{n=1}^{m^2+m+1} b_2^{m,n} t^n}, \tag{۱.۲۷}$$

که ضرایب $a_2^{m,n}$ و $b_2^{m,n}$ مستقل از پارامتر کمکی h هستند. با مقایسه در می یابیم که دقت تقریب هموتوپی–پاده $[m,m]$ هم ارز تقریب پاده قدیمی $[m^2+m+1, m^2+m+1]$ می باشد

می توانیم معادله تغییر شکل مرتبه صفر به شکل (۱.۷) یا حتی کلیتر از آن بسازیم. گیریم $A(q)$ و $B(q)$ توابع مختلط تحلیلی در ناحیه $|q| < 1$ که توابع نشاندن نامیده می شوند که در رابطه زیر صدق می کند

$$A(0) = B(0) = 0, \qquad A(1) = B(1) = 1, \tag{۱.۲۸}$$

[۸] embedding