بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شهید باهنر کرمان

دانشکده ریاضی و کامپیوتر

بخش ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

موجکها و معادلات انتگرال

استاد راهنما:

دکتر عظیم ریواز

استاد مشاور:

دکترمحمود محسنی مقدم

مولف:

فرشته رهنما

دی ماه ۱۳۹۰

این پایان نامه به عنوان یکی از شرایط احراز کارشناسی ارشد به

بخش ریاضی - دانشکده ریاضی و رایانه

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو: فرشته رهنما

استاد راهنما: دکتر عظیم ریواز

استاد مشاور: دکتر محمود محسنی مقدم

داور ۱: دکتر حسین مومنایی

داور ۲: دکترغلامرضا آقاملائی

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه: دکتر محمدعلی ولی

تقدیم به:

به پدر بزرگوار و مادر مهربانم به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ایثار و از خود گذشتگان،به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است، به پاس قلبهای بزرگشان که فریاد رس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید، و به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند.

تقدیر و تشکر

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بیکران خود، آدمی را زیور عقل آراست.در آغاز وظیفه خود می دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر عظیم ریواز صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعا بدون راهنمایی های ارزنده ایشان، این مجموعه به پایان نمی رسید.

از جناب آقای دکتر محمود محسنی مقدم که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

سپاس فراوان از اساتید گرامی جناب آقای دکتر حسین مومنایی و جناب آقای دکتر غلامرضا آقاملائی که مسئولیت داوری این پایان نامه را بر عهده گرفتند و با حسن دقت بنده را در تصحیح آن یاری نمودند.

فرشته رهنما

دیماه ۹۰

چکیده

در این پایان نامه، با بکارگیری موجک های دابیشز در روش گالرکین به حل معادلات فردهلم نوع دوم خطی، غیرخطی و تکین پرداخته شده است. بعد از گسسته سازی، معادلات انتگرال خطی و غیر خطی بترتیب به یک دستگاه خطی و غیر خطی از معادلات تبدیل می شوند.

برای حالت خطی می توان ماتریس را توسط تبدیل سریع موجک به یک ماتریس متقارن و تنک تبدیل نمود. مزیت اصلی روش ارائه شده در این نوشتار نسبت به سایر روش ها، محاسبه ی دقیق ضرائب بسط موجک بدون نیاز به محاسبه ی انتگرال های موجک می باشد. لذا حجم محاسبات پایین تر بوده و دقت عمل بالاتر است.

کلمات کلیدی: معادلات انتگرال فردهلم نوع دوم، موجک، روش گالرکین، موجک دابیشز متناوب

پیش گفتار:

انواع مختلف معادلات انتگرال در بسیاری از رشته ها در زمینه ی علوم و مهندسی نقشی اساسی بازی می کنند. در سالهای اخیر روش هایی مبتنی بر تقریب جواب معادلات انتگرال بر اساس بسط توسط توابع پایه ای متعامد مانند توابع فوریه، توابع چبیشف و موجک ها برای حل معادلات انتگرال کاربرد های بسیاری داشته اند.

اما در این بین استفاده از روش موجک نسبت به سایر روش ها به دلیل دارا بودن خاصیت های مطلوبی نظیر داشتن گشتاور های صفر، موضعی بودن و غیره که در ادامه نشان داده می شوند بیشتر مورد توجه بوده است. در روش تقریب جواب معادله انتگرال بوسیله ی پایه های موجک برای بدست آوردن ضرایب موجک و یا توابع مقیاس نظیر آنها اغلب مجبوریم تا حاصل ضرب داخلی موجک ها یا توابع مقیاس نظیرشان را محاسبه نماییم. از آنجاییکه بیشتر انواع موجک ها هموار نمی باشند انتگرالگیریهای مورد نیاز در این روش اغلب دشوار و وقت گیر می باشند.

دو فصل اول شامل تعاریف و قضایای مقدماتی بکار رفته در کل پایان نامه، تاریخچه، معرفی روشهای حل عددی می باشد. در فصل سوم مقدماتی راجع به موجک ها و آشنایی با چند موجک معروف آورده شده است. در فصل چهارم به موجک دابیشز و کاربرد آن در حل معادلات انتگرال فردهلم پرداخته شده است.

فهرست مطالب

فصل ۱

پیشنیازها

۱.۱ مقدمه

مفاهیم اساسی استفاده شده در این پایان نامه را در این فصل به اختصار مرور می کنیم که بیشتر مطالب مربوط به مراجع [۱۰] و [۲۳] و [۲۵] می باشد.

۲.۱ معرفی فضاها و توابع متعامد

تعریف ۱.۲.۱. (فضاهای نرم دار) فرض کنیم X یک فضای برداری روی میدان اسکالری $\mathbb{R}$ باشد. هرگاه تابع $||.|| : X \to \mathbb{R}$ به ازای هر $x, y \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{R}$ دارای ویژگی های زیر باشد :

(۱) $||x|| \geq 0$

(۲) $||x|| = 0 \iff x = 0$

(۳) $||\alpha x|| = |\alpha| ||x||$

(۴) $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$

در اینصورت X را فضای برداری نرم دار گوییم .

تعریف ۲.۲.۱. (فضای ضرب داخلی) فضای خطی X را یک فضای ضرب داخلی روی میدان اسکالری $\mathbb{R}$ گوییم هرگاه به ازای هر x, y و z متعلق به مجموعه ی X و اسکالرهای $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ داشته باشیم:

(۱) $\langle x, x\rangle \geq 0$

(۲) $\langle x, x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

(۳) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

(۴) $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$

نماد $\langle .,. \rangle$ را ضرب داخلی برای فضای خطی X می نامیم.

تعریف ۳.۲.۱. (تعامد) در فضای ضرب داخلی X دو عضو x و y راعمود برهم گوییم و با نماد $\perp$ نمایش می دهیم، هرگاه رابطه ی زیر برقرار باشد:

$$\langle x, y\rangle = 0$$

بنابراین زیر مجموعه ی S از فضای ضرب داخلی X را متعامد گوییم هرگاه رابطه ی زیر برقرار باشد:

$$\langle x, y\rangle = o \qquad \forall x, y \in S$$

همچنین زیر مجموعه ی متعامد S را متعامد یکه نامیم هرگاه داشته باشیم:

$$||x|| = 1 \qquad \forall x \in S$$

تعریف ۴.۲.۱. یک فضای برداری با یک نرم را فضای خطی نرم دار گوییم.

تعریف ۵.۲.۱. **(فضای باناخ)** یک فضای نرم دار خطی را که نسبت به نرمش کامل است فضای باناخ می نامیم.در حقیقت فضای باناخ، یک فضای نرم دار خطی است که در آن هر دنباله کشی همگراست.

تعریف ۶.۲.۱. **(فضای هیلبرت)** هر فضای باناخ با یک ضرب داخلی را یک فضای هیلبرت گویند.

تعریف ۷.۲.۱. منظور از $L^p[a,b]$ یک فضای تابعی است که عناصر آن توابع اندازه پذیر روی بازه ی $[a,b]$ بوده و در شرط زیر صدق نمایند:

$$\int_a^b |f(x)|^p dx < \infty$$

در تعریف فوق اگر قرار دهیم $p = ۲$ در اینصورت $L^۲[a,b]$ فضای توابع بطور مربعی انتگرال پذیر می باشد. ضرب داخلی دو تابع f و g در این فضا بصورت زیر تعریف می شود.

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

تعریف ۸.۲.۱. **(پایه ی ریس)** مجموعه ی توابع $\{u_i\}$ یک پایه ی ریس برای $L^۲[a,b]$ نامیده می شود هرگاه بتوان هر عضو $f \in L^۲[a,b]$ رابصورت ترکیب خطی از اعضای $\{u_i\}$ نوشت، بعبارت دیگر:

$$f(x) = \sum_{i=۱}^{n} c_i u_i$$

و همچنین اعداد مثبت A و B موجود باشند بطوریکه برای هر f دلخواه از فضا با ترکیب خطی بالا داشته باشیم :

$$A||f||^۲ \geq \sum_i |c_i|^۲ \geq B||f||^۲$$

تعریف ۹.۲.۱. (پایه متعامد یکه) به یک پایه ریس که اعضای پایه نسبت به هم متعامد باشند، پایه متعامد یکه گفته می شود. در این حالت داریم :

$$A = B = ۱$$

تعریف ۱۰.۲.۱. (بسط توابع در $L^۲[a,b]$ نسبت به پایه های متعامد یکه) هر پایه متعامد یکه $L^۲[a,b]$ شمارش پذیر است لذا می توان آن را بصورت $\{\phi_i(x)\}_{i=۱}^{\infty}$ در نظر گرفت. بنا به تعریف پایه متعامد یکه، بسط هر تابع $f(x) \in L^۲[a,b]$ نسبت به پایه $\{\phi_i(x)\}_{i=۱}^{\infty}$ را می توان به صورت زیر در نظر گرفت :

$$f(x) = \sum_{i=۱}^{\infty} f_i \phi_i(x)$$

که در آن

$$f_i = (f(x), \phi_i(x)) = \int_a^b f(x)\phi_i(x)dx$$

می باشد. به f_i ها ضرائب فوریه یا طیف تابع f نسبت به پایه متعامد یکه $\{\phi_i(x)\}_{i=۱}^{\infty}$ می گویند.

قضیه ۱۱.۲.۱. (فرآیند متعامد سازی گرام-اشمیت) مجموعه چندجمله ایهای $\{\psi_۰, \psi_۱, ..., \psi_n\}$ تعریف شده به طریق زیر، نسبت به تابع وزن نامنفی و پیوسته $w(x)$ بر $[a,b]$ متعامد است :

$$\psi_۰(x) = ۱$$

$$\forall a \leq x \leq b \quad , \quad \psi_۱(x) = x - B_۱$$

که در آن

$$B_۱ = \frac{\int_a^b x w(x)[\psi_۰(x)]^۲\, dx}{\int_a^b w(x)[\psi_۰(x)]^۲\, dx}$$

وقتی $k \geq ۲$، برای هر $a \leq x \leq b$ داریم:

$$\psi_k(x) = (x - B_k)\psi_{k-۱}(x) - C_k\psi_{k-۲}$$

که در آن

$$B_k = \frac{\int_a^b xw(x)[\psi_{k-۱}(x)]^۲\, dx}{\int_a^b w(x)[\psi_{k-۱}(x)]^۲\, dx}$$

و

$$C_k = \frac{\int_a^b xw(x)\psi_{k-۱}(x)\psi_{k-۲}(x)\, dx}{\int_a^b w(x)[\psi_{k-۲}(x)]^۲\, dx}.$$

تعریف ۱.۲.۱۲. فرض کنیم :

$$\{\phi_i(x)\}_{i=۱}^{\infty} \in L^۲(a,b)$$

یک مجموعه از توابع متعامد دوگانه باشد، اگر پایه ی دیگری مانند $\{\tilde{\phi}_i(x)\}_{i=۱}^{\infty} \in L^۲(a,b)$ موجود باشد بطوریکه:

$$\langle \phi_i(x), \tilde{\phi}_j(x)\rangle = \int_a^b \phi_i(x)\tilde{\phi}_j(x)dx$$

آنگاه مجموعه ی $\{\tilde{\phi}_i(x)\}_{i=۱}^{\infty}$ را پایه ی دوگان $\{\phi_i(x)\}_{i=۱}^{\infty}$ گوییم.

یک تابع $f(x)$ را برحسب جملات یک پایه متعامد دوگانه می توان بصورت زیر بسط داد:

$$f(x) = \sum_{i=۱}^{\infty} c_i\phi_i(x) \quad ; \quad \tilde{c}_i = \langle f(x), \tilde{\phi}_i(x)\rangle = \int_a^b f(x)\tilde{\phi}_i(x)dx$$

و یا

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\tilde{c}_i\tilde{\phi}_i \quad ; \quad \tilde{c}_i=\langle f(x),\phi_i(x)\rangle=\int_a^b f(x)\phi_i(x)dx$$

در یک پایه ی متعامد همه ی توابع پایه به یک مجموعه تعلق دارند در حالیکه در پایه های متعامد دوگانه توابع پایه ی دوگان لزوما در همان فضای اصلی نیستند. اگر پایه های متعامد دوگانه و دوگان متعلق به یک مجموعه باشند این پایه ها را شبه متعامد گویند. توابع بی اسپلاین نمونه ای از توابع پایه ی شبه متعامد هستند .

تعریف ۱۳.۲.۱. چند جمله ای های متعامد T_n که در روابط زیر صدق می کنند، چند جمله ای چبیشف نوع اول گویند :

$$T_0(x)=1 \quad , \quad T_1(x)=x \quad , \quad T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)$$

تابع مولد گشتاور این دنباله را می توان بصورت زیر در نظر گرفت :

$$\sum_{n=0}^{\infty}T_n(x)t^n=\frac{1-tx}{1-2tx+t^2}$$

تعریف ۱۴.۲.۱. گوییم دنباله a_n از مرتبه b_n است و می نویسیم $a_n=O(b_n)$ در صورتیکه برای عدد مثبت ثابتی مانند k و برای هر مقدار بقدر کافی بزرگ n داشته باشیم :

$$|a_n|\leq k|b_n|$$

تعریف ۱۵.۲.۱. فرض کنیم $\lim_{n\to\infty}S(n)=L$ همگرایی را از مرتبه $f(n)$ نامیم هرگاه به ازای یک عدد مثبت

ثابتی چون k و برای هر n بقدر کافی بزرگ داشته باشیم :

$$\frac{|S(n)-L|}{|f(n)|} \leq k$$

و می نویسیم :

$$S(n) = L + O(f(n))$$

تعریف ۱۶.۲.۱. گوییم تابع $f(x)$ دارای محمل فشرده است هرگاه تابع در داخل بازه ای با اندازه ی متناهی دارای مقادیر غیرصفر متناهی بوده و خارج از این بازه دارای مقدار صفر باشد. محمل تابع را با نماد $supp(f)$ نمایش می دهیم.

$$supp(f) = \overline{\{x|f(x) \neq 0\}}$$

تعریف ۱۷.۲.۱. فرض کنیم A یک ماتریس $(n \times n)$ با درایه های حقیقی و v یک بردار در فضای برداری $\mathbb{R}^n$ باشد. اگر اسکالر λ موجود باشد بطوریکه معادله ی زیر برقرار گردد:

$$Av = \lambda v \quad , \quad v \neq 0$$

آنگاه v را یک بردار ویژه برای ماتریس A و λ را یک مقدار ویژه ی ماتریس گویند.

تعریف ۱۸.۲.۱. مجموعه ی n عضوی از بردارهای مستقل خطی

$$B = \{v_1, ..., v_n\}$$

در فضای برداری V_n را یک پایه برای این فضا می نامیم، هرگاه هر عضو این فضا را بتوان بصورت ترکیب خطی منحصر بفرد از اعضای B نوشت و با نماد زیر نشان می دهیم:

$$V_n = span\{v_1, ..., v_n\}$$

بعلاوه عدد n را نیز بعد فضا می نامیم.

تعریف ۱.۲.۱۹. ماتریس A ، $N \times N$ را یک ماتریس دوری گویند هرگاه داشته باشیم:

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_N & \dots & a_1 \\ a_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_N \\ a_N & \dots & a_1 & a_0 \end{bmatrix}_{N\times N}$$

فصل ۲

مقدمه ای بر معادلات انتگرال

۱.۲ تاریخچه ای بر معادلات انتگرال

نظریه معادلات انتگرال یکی از مهمترین شاخه های آنالیز ریاضی است که اصولاً اهمیت آن از لحاظ مقدار مرزی در تئوری معادلات با مشتقات جزئی است. معادلات انتگرال در بسیاری از مسائل فیزیکی و فنی ظاهر می شوند. در تحقیقات قرن اخیر در نظریه کشسانی ، این نوع معادلات نقش مهمی را بازی کرده اند. بخصوص مطالعه و بررسی روی دسته ای از آنها که به معادلات انتگرال فردهلم شهرت دارند، به دلیل سادگی و کاربرد فراوان آن در حل مسائل مختلف، بیشتر صورت گرفته است. مطالب این بخش مربوط به مرجع [۲۴] می باشد.

در ابتدا حل معادله انتگرال تحت عنوان معکوس گرفتن از انتگرال مطرح شد. لیکن اولین بار اصطلاح معادله انتگرال بوسیله بویس ریموند [۱] پیشنهاد شد. لاپلاس [۲] در سال ۱۷۸۲ معادله انتگرالی برای تابع f بصورت زیر ارائه داد :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} f(s) ds$$

[۱] $Boise - Reymond$
[۲] $Laplace$

در جریان تکامل و پیشرفت ریاضیات، فوریه [۳] در سال ۱۸۱۱ روی مسئله حرارت کار کرد و مقالاتی از خود بر جای گذاشت. آبل [۴] نیز در سال ۱۸۲۳ در مسئله خود که به مسئله مکانیکی آبل معروف است کاربرد معادلات انتگرال را مطرح کرد. در سال ۱۸۲۶ پوآسن [۵] در نظریه مغناطیس خود، نوعی معادله انتگرال را مطرح کرد. لیوویل [۶] مستقلاً معادلات انتگرال خاصی را از سال ۱۸۳۲ به بعد حل کرد. یک قدم مهم در راه توسعه معادلات انتگرال توسط لیوویل برداشته شد و آن چگونگی حل بعضی معادلات دیفرانسیل به کمک معادلات انتگرال بود. اصطلاح نوع اول و دوم که امروزه در معادلات انتگرال بکار میرود اولین بار توسط هیلبرت [۷] پیشنهاد شد. البته قبل از هیلبرت معادلات آبل و لیوویل به فرم های زیر مطرح بود که هر دو از نمونه های مهم در معادلات انتگرال هستند :

$$g(s) = \int_a^s k(s,t)f(t)dt$$

$$f(s) = h(s) + \int_a^s k(s,t)f(t)dt$$

پوآنکاره [۸] در سال ۱۸۹۶ معادله انتگرال زیر را که متناظر با معادله دیفرانسیل جزئی (حرکت موج) می باشد مطرح کرد :

$$g(s) = f(s) + \lambda \int_a^b k(s,t)f(t)dt$$

که در آنها $g(s)$ و $k(s,t)$ توابعی معلوم و $f(s)$ تابعی مجهول است. لازم به ذکر است که $k(s,t)$ را هسته معادله می نامند که در قسمت های بعد مورد بررسی قرار خواهد گرفت. فردهلم [۹] جهت بدست آوردن جواب این معادله تحقیقاتی انجام داد. ولترا [۱۰] اولین کسی بود که در اواخر قرن نوزدهم نظریه عمومی معادلات انتگرال را ارائه کرد. فردهلم در اوایل

---
[۳] $Fourier$
[۴] $Abel$
[۵] $Poisson$
[۶] $Liovil$
[۷] $Hilbert$
[۸] $H.Poincare$
[۹] $Fredholm$
[۱۰] $Volterra$