بسم الله الرحمن الرحيم

بسمه تعالی

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه هرمزگان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان نامه برای دریافت درجهٔ کارشناسی ارشد در رشتهٔ ریاضی محض

عنوان :

سیستم های نیمه دینامیکی کامل

استاد راهنما :

دکتر محبوبه محمد حسنی

استاد مشاور :

دکتر مسعود هاوشکی

نگارش و تنظیم :

عبداللطیف حسین پور

آبان ۹۰

چکیده

دراین پایان نامه بر پایه مفاهیمی چون "گروه تعمیم یافته" و "فضای تاپ" به معرفی "سیستم نیمه دینامیکی کامل " روی این فضاهای تاپ می پردازیم .

" سیستم نیمه دینامیکی کامل توپولوژیکی " از دیگر مفاهیمی است که مورد بررسی قرار گرفته است.

و در پایان " فضای ژنتیک " را به عنوان یک " سیستم نیمه دینامیکی کامل توپولوژیکی" معرفی می کنیم که تلاشی در جهت نشان دادن کاربردی بودن مبحث سیستم نیمه دینامیکی کامل توپولوژیکی است.

واژگان کلیدی: گروه تعمیم یافته ، فضای تاپ ، سیستم نیمه دینامیکی .

فهرست

مقدمه

دراین پایان نامه بر پایه مفاهیمی چون "گروه تعمیم یافته" و "فضای تاپ" به معرفی "سیستم نیمه دینامیکی کامل " روی این فضاهای تاپ می پردازیم .

در فصل اول با معرفی "گروه تعمیم یافته" ویژگی های مهم آنها در مقایسه با مفهوم "گروه" بررسی می کنیم و مفاهیمی چون منحصر به فرد بودن معکوس هرعضو"گروه تعمیم یافته" در قالب قضیه و لم اثبات می کنیم.

در ادامه فصل یک گروه تعمیم یافته مهم به نام "نیم گروه ماتریسی ریس" به طورکامل معرفی می کنیم و نشان می دهیم که اگر یک مجموعه G "گروه تعمیم یافته" باشد آنگاه G با یک "نیم گروه ماتریسی ریس " یکریخت است.

مفهوم همریختی "گروه تعمیم یافته" و معرفی برخی از ویژگی های آن را در ادامه

می آوریم؛همین طوردر این فصل به تعریف و بررسی فضاهای تاپ می پردازیم و نشان می دهیم که ماتریس ریس یک فضای تاپ است.

معرفی و بررسی " سیستم نیمه دینامیکی کامل " و همین طور " سیستم دینامیکی " در فصل دوم قرار دارند.

" سیستم نیمه دینامیکی کامل توپولوژیکی " از دیگر مفاهیمی است که در این فصل به آنها می پردازیم؛ و در پایان فصل دوم " فضای ژنتیک " به عنوان یک " سیستم نیمه دینامیکی کامل توپولوژیکی " معرفی می کنیم.

فصل اول

فضای تاپ

این فصل مشتمل برسه بخش است که با تعریف و بررسی **" گروه تعمیم یافته"** و خواص آن شروع می شود.

مفهوم " نیم گروه ساده کامل " و " نیم گروه ماتریسی ریس " را در این فصل آورده ایم.

به کمک چند قضیه و لم نشان داده ایم که یک نیم گروه G گروه تعمیم یافته است اگر و تنها اگر نیم گروه ساده کامل باشد؛ و همین طور همریختی گروه های تعمیم یافته را بررسی کرده ایم ؛ در ادامه فضاهای تاپ را تعریف و بررسی می کنیم و نشان می دهیم که ماتریس ریس یک فضای تاپ است.

در این فصل مراجع [1],[2],[3],[4],[5],[6] مورد استفاده قرار گرفته است.

بخش ۱-۱: " گروه تعمیم یافته"

در این قسمت با استفاده از چند لم و قضیه نشان خواهیم داد که یک نیم گروه G گروه تعمیم یافته است اگر و تنها اگر یک نیم گروه ساده کامل باشد.

تعریف ۱.۱.۱:مجموعه غیر تهی G همراه با یک عمل دوتایی که ضرب نامیده می شود را نیم گروه می نامیم هرگاه عمل دوتایی شرکت پذیر باشد، یعنی:

برای هر x,y,z در G : $(xy)z=x(yz)$

تعریف ۲.۱.۱:در نیم گروه G عضو a که به ازای هر x در G :

$$ax=xa=a$$

را عضو صفر G می نامیم و با 0 نشان می دهیم.

تعریف ۳.۱.۱: در نیم گروه G عضو a را خودتوان می نامیم هرگاه $a^2 = a$.

تعریف۴.۱.۱: یک نیم گروه G را نیم گروه کاملا ساده می نامیم هرگاه:

۱) به ازای هر عضوغیر صفر a در G : GaG= G

۲) اگر e , f دو عضو غیر صفر و خودتوان G باشند به طوری که ef=fe آنگاه: e=f

تعریف ۵.۱.۱: یک نیم گروه G را گروه تعمیم یافته می نامیم اگر شرایط زیر را داشته باشد:

۱) با ازای هر x در G عنصر یکتای e(x) در G به گونه ای وجود داشته باشد که:

e(x)x=x و xe(x)=x

۲) برای هر x در G یک عنصر x^{-1} در G وجود داشته باشد که:
x^{-1} x=e(x) و x x^{-1} =e(x) .

مثال ۶.۱.۱: هر گروه یک گروه تعمیم یافته است.

لم۷.۱.۱: اگر G یک گروه تعمیم یافته باشد و x در G آنگاه e(e(x))=e(x).

اثبات: چون e(x)x=x پس

(e(x)x) x^{-1}=xx^{-1}بنابراین

e(x)(xx^{-1})= xx^{-1}

با توجه به اینکه xx^{-1} = e(x) پس:

$$e(x)e(x)=e(x) \rightarrow e(e(x))=e(x).$$ □

قضیه ۸.۱.۱ : اگر G یک گروه تعمیم یافته باشد هر x در G یک معکوس منحصر به فرد

در G دارد.

اثبات: فرض کنیم $x \in G$ و $y,z \in G$ به گونه ای باشند که :

$$zx=xz=e(x) \quad \text{و} \quad yx=xy=e(x)$$

بنابراین

$$x=xe(x)=x(yx)=x(ye(y))x=((xy)e(y))x=(e(x)e(y))x$$

و

$$x=xe(x)=x(xy)=x(x(ye(y))=x((xy)(e(y))=x(e(x)(e(y))$$

پس :

$$x=x(e(y)e(x))=(e(y)e(x))x$$

بنا به یکتایی e(x) نتیجه می گیریم :

$$e(x)e(y)=e(y)e(x)=e(x)$$

پس : $e(e(x))=e(y)$ در آخر با توجه به لم ۷.۱.۱ داریم:

$$e(x)=e(y)$$

به طریق مشابه نتیجه میشود $e(z)=e(x)$:

بنابراین : $y=ye(y)=ye(x)=y(xz)=(yx)z=e(x)z=e(z)z=z$. □

معکوس $x\in G$ رابا x^{-1} نشان می دهیم.

قضیه ۹.۱.۱: اگر G یک گروه تعمیم یافته باشد :

الف) به ازای هر x در G: $e(x^{-1})=e(x)$.

ب) اگر x و y دو عضو G به گونه ای باشند که $xy=yx$ آنگاه: $e(x)=e(y)$.

اثبات:

الف) $e(x)=x\,x^{-1}=e(x^{-1})\,x^{-1}\,x=e(x^{-1})\,e(x)$

بنابراین: $e(x)=e(x^{-1})\,e(x)$ (۱)

از طرفی $e(x)=x\,x^{-1}=x\,x^{-1}\,e(x^{-1})$

بنابراین: $e(x)=e(x)\,e(x^{-1})$ (۲)

از (۱) و (۲) نتیجه می شودکه : $e(e(x))=e(x^{-1})$

ب) $xe(y)=xyy^{-1}=yx\,y^{-1}$

$$\Longrightarrow xe(y)y=yx\,y^{-1}\,y \Longrightarrow xy=yxe(y) \Longrightarrow yx=yxe(y) \qquad (۳)$$

به طریق مشابه $xy=xye(x)$.   (۴)

از اینکه $xy=yx$ پس با توجه به (۳) و (۴) داریم :

$$xye(x)=yxe(y)=xye(y) \Longrightarrow e(x)=e(y).\Box$$

بخش ۱-۲:نیم گروه ماتریسی ریس

قضیه و تعریف ۱.۲.۱: فرض کنیم D یک گروه باشد و I و Λ دو مجموعه دلخواه باشند.

اگر $P:\Lambda\times I\rightarrow D$ یک نگاشت باشد، آنگاه $I\times D\times\Lambda$ با ضرب :

$$(i,a,\lambda)(j,b,\mu)=(i,aP(\lambda,j)b,\mu)$$

یک گروه تعمیم یافته است که آن را نیم گروه ماتریسی ریس می نامیم و با

$M(D, I,\Lambda,P)$ نشان می دهیم.

اثبات: ابتدا نشان می دهیم این عمل ضرب خوش تعریف است. فرض کنیم: (i,a,λ) و (j,b,μ) و (k,c,t) و (l,d,u) چهارعضو دلخواه $I\times D\times\Lambda$ باشند به طوری که :

$(i,a,\lambda)= (j,b,\mu)$ و $(k,c,t) = (l,d,u)$

بنابراین: $i=j$ و $a=b$ و $\mu=\lambda$ و $l=k$ و $d=c$ و $u=t$.

با توجه به اینکه P یک نگاشت است داریم: $P(\lambda,k)=P(\mu,l)$

بنابراین: $(j,bP(\mu,l)d,u)= (i,aP(\lambda,k)c,\mu)$.

فرض کنیم (i,a,λ) و (j,b,μ) و (k,c,t) سه عضو دلخواه $I\times D\times\Lambda$ باشند:

۱) به ازای هر $(i,a,\lambda)\in I\times D\times\Lambda$, $e(i,a,\lambda)= (i, [P(\lambda, i)]^{-1},\lambda)$ زیرا:

$$(i,a,\lambda)\,(i, [P(\lambda, i)]^{-1},\lambda)=(i,a,\lambda)$$

$$(i, [P(\lambda, i)]^{-1},\lambda)\,(i,a,\lambda)= (i,a,\lambda)$$

۲) به ازای هر $(i,a,\lambda)\in I\times D\times\Lambda$ برای یافتن $(i, a, \lambda)^{-1}$ معرفی می کنیم (j,b,μ) :

$$(i,a,\lambda)(j,b,\mu)= (i,aP(\lambda,j)b,\mu)$$

$$(j,b,\mu)\,(i,a,\lambda)=(j,bP(\mu,i)a,\lambda)$$

چون $e(i,a,\lambda)=(i, [P(\lambda, i)]^{-1},\lambda)$ پس:

$$(i,aP(\lambda,j)b,\mu)= (j,bP(\mu,i)a,\lambda)= (i, [P(\lambda, i)]^{-1},\lambda)$$

بنابراین (j,b,μ) را به صورت زیر معرفی می کنیم:

j:=i , μ:=λ , b:= $[P(\lambda,i)]^{-1}a^{-1}[P(\lambda,i)]^{-1}$

بنابراین I×D×Λ یک گروه تعمیم یافته است.□

لم ۲.۲.۱: اگر G یک گروه تعمیم یافته باشد و a∈G آنگاه:

aG=e(a)G

که {aG={ag : g∈G .

اثبات: اگر a∈G و a^{-1} معکوس a باشد داریم :

aG=e(a)aG⊆ e(a)G

e(a)G=aa^{-1}G⊆aG

بنابراین: aG=e(a)G .□

لم ۳.۲.۱: اگر G یک گروه تعمیم یافته باشد به ازای هر a∈G :

GaG=G

اثبات: اگر a∈G آنگاه GaG⊆G ،

برای اینکه نشان دهیم G⊆GaG فرض کنیم x∈G آنگاه:

e(x) e(x) a e(x) = e(x) a e(x) و e(x) a e(x) e(x) = e(x) a e(x)

پس : [e(x)=e[e(x)ae(x ، بنابراین:

x∈Gxx^{-1}G=Ge(x)G =G e[e(x)ae(x)]G =G [e(x)ae(x)] $[e(x)ae(x)]^{-1}$G

⊆GaG

پس GaG=G . □

لم ۴.۲.۱: اگر G گروه تعمیم یافته باشد و $a,b\in G$ و $e(b)G\cap e(a)G \neq \emptyset$ آنگاه:

$$e(b)G = e(a)G$$

اثبات: فرض کنیم $c \in (e(b)G\cap e(a)G)$ آنگاه وجود دارند $f , d \in G$ به طوری که:

$$c = e(b)d = e(a)f$$

بنابراین : $e(a)\, c = e(a)\, e(a)\, f = e(a)\, f = c$ (۱)

با توجه به لم قبل ، $GcG = G$ ؛ پس $z , t \in G$ وجود دارند که :

$$e(a) = zct$$

با توجه به (۱) داریم: $e(a) = ze(a)ct$ ؛ پس :

$$e(a) = (e(a))^3 = e(a)\,(ze(a)ct)\,e(a)$$

اگر قرار دهیم $x:= e(a)z\, e(a)$ و $y:= t\, e(a)$ آنگاه: $e(a) = xcy$

بنابراین $y\, e(a) = y$ و $x\, e(a) = x$. (۲)

فرض کنیم $g:= cyx$ آنگاه :

$$g^2= cyx\, cyx = cy\,(xcy)x = cy\, e(a)\, x = c(y\, e(a))\, x = cyx = g$$

که نتیجه می دهد $e(g) = g$ (۳)

از طرفی با توجه به (۱) داریم: $e(a)g = e(a)cyx = cyx = g$

و همین طور با توجه به (۲) داریم: $g\, e(a) = cyx\, e(a) = cyx = g$

بنابراین: $e(a) =e(g)$.

که از (۳) نتیجه می گیریم : $e(a) = g$ ؛ پس :

e(a)G = cyxG ⊆ cG = e(a)fG ⊆ e(a)G

که نتیجه می دهد : e(a)G = cG ؛

به طریق مشابه می توان نشان داد که e(b)G = cG ؛

بنابراین : e(a)G = e(b)G .□

قضیه ۵.۲.۱: اگر G یک گروه تعمیم یافته باشد آنگاه G با یک نیم گروه ماتریسی ریس یکریخت است .

اثبات: مجموعه e(G) را به صورت زیر تعریف می کنیم:

e(G):={ e(a):a∈G}

یک عنصر a∈G را انتخاب می کنیم و e(a) را با 1 نشان می دهیم.

دو مجموعه I⊆ e(G) و Λ⊆e(G) وجود دارند به طوری که :

۱) {aG : a∈ e(G)} = {iG : i∈I }

و اگر I ∋ i_1 , i_2 و $i_1 \neq i_2$ آنگاه $i_1G \cap i_2G \neq \emptyset$.

۲) {Gb : b ∈ e(G) } = { Gλ : λ∈Λ }

اگر Λ∋ λ_1 , λ_2 و $\lambda_1 \neq \lambda_2$ آنگاه Gλ_2 ∩Gλ_2≠ ø .

۳) 1 ∈ I∩Λ .

برای (i , λ) ∈ I×Λ دلخواه فرض کنیم :

$r_i = i1$

نگاشت (1G∩G1)→(iG∩G1): f_{r_i} با تعریف f_{r_i}(x) = r_i x یک نگاشت یک به یک است .

برای نشان دادن این مطلب می نویسیم :

$1(1r_i) = (11)\ r_i = 1r_i$

$(1r_i)1 = 1(r_i 1) = 1r_i$

پس $e(1r_i) = 1$.

حال اگر $r_i x_1 = r_i x_2$ آنگاه $1r_i x_1 = 1\ r_i x_2$ بنابراین:

$(1r_i)^{-1}1r_i x_1 = (1r_i)^{-1}1\ r_i x_2 \quad \Longrightarrow\ x_1 = x_2$

بنابراین f_{r_i} یک نگاشت یک به یک است.

برای پوشایی f_{r_i} فرض کنیم $y \in iG \cap G1$ آنگاه:

$f_{r_i}((r_i)^{-1}y) = y$

زیرا اگر قرار دهیم $z := r_i(r_i)^{-1}y$ آنگاه : $1z = 1r_i(r_i)^{-1}y$

بنابراین : $1z = 1y$

با توجه به تعریف z , y می توانیم قرار دهیم :

$y := i\boldsymbol{\mathcal{Y}} \qquad , \qquad z := i\boldsymbol{\mathcal{Z}} \qquad$ که $\boldsymbol{\mathcal{Z}} , \boldsymbol{\mathcal{Y}} \in G$

پس : $1\ i\boldsymbol{\mathcal{Z}} = 1\ i\boldsymbol{\mathcal{Y}}$. درنتیجه:

$$(i1i)\ \boldsymbol{\mathcal{Y}} = (i1i)\ \boldsymbol{\mathcal{Z}} \ \Longrightarrow (i1i)^{-1}\ (i1i)\ \boldsymbol{\mathcal{Y}} = (i1i)^{-1}\ (i1i)\ \boldsymbol{\mathcal{Z}} \qquad (۱)$$

چون $i \in I \subseteq e(G)$ وجود دارد $g \in G$ که $i = e(g)$. درنتیجه:

$ii = e(g)\ e(g) = e(g) = i$

بنابراین داریم:

$$\begin{cases}(i1i)i = i1i \\ i(i1i) = i1i\end{cases} \Longrightarrow e(i1i) = i \Longrightarrow (i1i)^{-1}(i1i) = i$$

بنابراین رابطه (۱) به تساوی زیر می انجامد: $i\mathcal{Y} = i\mathcal{Z}$ پس $z = y$.

پس f_{r_i} یک نگاشت پوشا است.

بطور مشابه $f^{(i,q_\lambda)}: (iG \cap G1) \rightarrow (iG \cap G\lambda)$ با تعریف :

$$f^{(i,q_\lambda)}(x) = xq_\lambda$$

یک نگاشت یک به یک و پوشا است.

لم ۲.۲.۱ و لم ۴.۲.۱ نشان می دهند که $\{iG : i\in I\}$ یک افراز برای G است .

به طریق مشابه $\{G\lambda : \lambda\in\Lambda\}$ یک افراز برای G است.

بنابراین $\{iG \cap G\lambda : i\in I , \lambda\in\Lambda\}$ یک افراز برای G است. (۱)

این حقیقت و این مطلب که $f^{(i,q_\lambda)} o f_{r_i}$ یک نگاشت یک به یک و پوشا است؛ نشان می دهد که هر $a\in G$ نمایش منحصر به فرد به صورت $r_i a q_\lambda$ دارد.

زیرا با توجه به (۱) : $i\in I$ و $\lambda\in\Lambda$ منحصر به فرد وجود دارند که :

$a = t\lambda$, $a = is$ (t و s∈G) و

$$(f^{(i,q_\lambda)} o f_{r_i})(a) = r_i a q_\lambda$$

تعریف می کنیم : $P : \Lambda\times I \rightarrow (1G \cap G1)$ که دارای ضابطه زیر است:

$$P(\lambda , i) = q_\lambda r_i$$

محاسبات سرراست نشان می دهد که نگاشت:

$$\Psi: I\times(1G \cap G1)\times\Lambda \rightarrow G$$

با تعریف $\Psi(i , a , \lambda) = r_i a q_\lambda$ یک یکریختی بین نیم گروه ماتریسی ریس $M((1G \cap G1) , I , \Lambda , P)$ و G است.

قضیه ۶.۲.۱ (قضیه ریس):

a) فرض کنیم D یک گروه باشد و I و Λ دو مجموعه دلخواه باشند.

اگر $P: \Lambda\times I \to D$ یک نگاشت باشد،و گروه تعمیم یافته ی $I\times D\times\Lambda$ با ضرب :

$(i,a,\lambda)(j,b,\mu)=(i,aP(\lambda,j)b,\mu)$

در نظر بگیریم آنگاه نیم گروه ماتریسی ریس $M(D,I,\Lambda,P)$ یک نیم گروه ساده کامل است.

b) هر نیم گروه ساده کامل با یک نیم گروه ماتریسی ریس یکریخت است.

اثبات:

a) قرار می دهیم $S := M(D,I,\Lambda,P)$ با توجه به قضیه ۱.۲.۱ , S یک گروه تعمیم یافته است و با توجه به لم ۲.۱.۱ به ازای هر $a\in S$:

$SaS = S$

عنصر غیر صفر (i , a , λ) در S خودتوان است اگر و تنها اگر

$(i , a , \lambda) = (i , a , \lambda) (i , a , \lambda) = (i , aP(\lambda , i)a , \lambda)$

که معادل است با $a = [P(\lambda , i)]^{-1}$ و $P(\lambda , i) \neq 0$.

حال فرض کنیم $e = (i , [P(\lambda , i)]^{-1} , \lambda)$ و $f = (j , [P(\mu , j)]^{-1} , \mu)$

دو عضو خودتوان غیر صفر S باشند و $fe = ef$ یعنی :

$(i , [P(\lambda , i)]^{-1} P(\lambda , i) [P(\mu , j)]^{-1} , \mu) = (j , [P(\mu , j)]^{-1} P(\mu , j) [P(\lambda , i)]^{-1} , \lambda)$

که نتیجه می دهد: $j = i$ و $\lambda = \mu$ پس : $f = e$

بنابرین S یک نیم گروه ساده کامل است.

b) مرجع[2].

قضیه ریس و قضیه ۱.۲.۱ قضیه بعد را به ما نتیجه می دهند.

قضیه ۷.۲.۱ : یک نیم گروه G , گروه تعمیم یافته است اگر و تنها اگر نیم گروه ساده کامل باشد.

تعریف ۸.۲.۱: یک مجموعه G را نیم گروه ساده ی کامل توپولوژیکی (یا گروه تعمیم یا فته ی توپولوژیکی) می نامیم هرگاه:

۱) G یک گروه تعمیم یافته باشد.

۲) G یک فضای هاسدورف باشد.

۳) نگاشت های $\begin{matrix} m_1:G \to G \\ g\mapsto g^{-1} \end{matrix}$ و $\begin{matrix} m_2:G\times G \to G \\ (g,h)\mapsto gh \end{matrix}$

نگاشت های پیوسته باشند.

مثال ۹.۲.۱ : هر فضای ناتهی توپولوژیکی هاسدورف G با عمل دوتایی

$$\begin{matrix} G\times G \to G \\ (a,b)\mapsto a \end{matrix}$$

یک نیم گروه ساده کامل توپولوژیکی است .

تعریف ۱۰.۲.۱ : یک نیم گروه ساده کامل را نیم گروه ساده کامل نرمال می نامیم هرگاه به ازای هر x , y∈G :

$$e(xy) = e(x)\, e(y).$$

مثال ۱۱.۲.۱ : فرض کنید $G= \mathbb{R} \times(\mathbb{R} -\{0\})$ که $\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی است ، آنگاه

G با ضرب زیر:

$.: G$
$((a\,,b),(c$

نیم گروه ساده کامل نرمال است.

تعریف ۱۲.۲.۱: اگر G و H دو گروه تعمیم یافته باشند و $f : G \rightarrow H$ یک نگاشت باشد آنگاه f را **همریختی** می نامیم هرگاه به ازای هر $a\,,b \in G$:

$f(ab) = f(a)f(b).$

اگر f یک همریختی باشد آنگاه روابط زیر به ازای هر $a\in G$ برقرار است:

۱) $f(e(a)) = e(f(a))$
۲) $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$

به ازای هر $a\in G$ **هسته f در a** را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$\text{Ker } f(a) := \{ x \in G : f(x) = f(e(a))\}$

اگر $G_a := \{ g\in G : e(g) = e(a) \}$ و $f_a := f\,|_{G_a}$ باشند ؛ آنگاه $\text{Ker } f_a$ و Ker f را چنین تعریف می کنیم :

$\text{Ker } f_a := \{x\in G_a : f(x) = f(e(a))\}.$

$\text{Ker } f := \bigcup_{a\in G} \ker f_a$

قضیه ۱۳.۲.۱ : فرض کنید $a\in G$ و $f : G \rightarrow H$ یک همریختی باشد آنگاه Ker f(a) یک زیرگروه تعمیم یافته G است , بعلاوه f یک به یک است اگر و تنها اگر به ازای هر