بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض گرایش آنالیز

پایداری قاب‌های موجکی با اتساع‌های ماتریسی

استاد راهنما :
دکتر عطاالله عسکری همت

دانشجو :
عالیه ذبیحی

مهرماه ۸۷

مدیر تحصیلات تکمیلی
دانشگاه ولی عصر(عج) رفسنجان

دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان

دانشکده‌ی علوم‌پایه

گروه ریاضی

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی خانم عالیه ذبیحی

تحت عنوان:

پایداری قاب‌های موجکی با اتساع‌های ماتریسی

در تاریخ ۸۷/۷/۲۵ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ..عالی.... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه آقای دکتر عطاءا... عسکری‌همت با مرتبه‌ی علمی استادیار — امضاء

۲- داور خارج از گروه آقای دکتر عباس سالمی با مرتبه‌ی علمی دانشیار — امضاء

۳- داور داخل گروه آقای دکتر احمد صفاپور با مرتبه‌ی علمی استادیار — امضاء

۴- نماینده تحصیلات تکمیلی آقای دکتر کامران مهدیان با مرتبه‌ی علمی استادیار — امضاء

حمد و سپاس بی کران، ایزد پاک را سزاست. آفریدگاری که عالم هستی، نشانه ای از قدرت بی انتهای اوست.

بر خود واجب می دانم صمیمانه ترین سپاس را به تمام کسانی که در انجام این رساله من را یاری نمودند تقدیم نمایم. پدر و مادر عزیزم که در تمام مراحل زندگی همیشه یار و یاور من بوده اند و استاد گرامی جناب آقای دکتر عسکری همت که مانند پدری دلسوز در انجام این رساله من را همراهی کردند و با راهنمایی های خود راه گشای این جانب بوده اند. هم چنین از زحمات اساتید محترم و دانشجویان صمیمی و مهربان دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان کمال تشکر و سپاسگزاری را دارم.

تقدیم به:

به پدر و مادر عزیزم که شکیبایی و استواریشان را می‌ستایم

بسمه تعالی

چکیده

قاب‌های موجکی به طور گسترده در تحلیل زمان – فرکانس مدرن استفاده می‌شوند. در این پایان‌نامه در یک فضای d – بعدی یک ماتریس $d \times d$ ی حقیقی به عنوان ماتریس اتساع و یک بردار در $\mathbb{R}^d$ به عنوان پارامتر انتقال در نظر گرفته شده و موضوع اغتشاش در ماتریس اتساع و پارامتر انتقال مورد بررسی قرار گرفته است. پایداری قاب‌های موجکی در $L^2(\mathbb{R}^d)$ با اتساع‌های ماتریسی را مورد مطالعه قرار داده و نشان می‌دهیم تحت چه شرایطی یک قاب موجکی با اغتشاش در ماتریس اتساع و پارامتر انتقال آن هنوز یک قاب باقی می‌ماند. در واقع نشان می‌دهیم تحت شرایط معینی قاب موجکی

$$\{\tau(A_j, b_{j,k})\psi\}_{j,k\in Z} := \left\{|\det A_j|^{-1/2}\psi\left(A_j^{-1}(x - b_{j,k})\right)\right\}_{j,k\in Z}$$

در $L^2(\mathbb{R}^d)$، وقتی که در ماتریس‌های اتساع A_j و پارامترهای انتقال $b_{j,k}$ اغتشاش ایجاد می‌کنیم، یک قاب باقی می‌ماند. به ویژه در نتایجمان بدست می‌آوریم اگر برای ماتریس توسعه یافته‌ی A و ماتریس معکوس‌پذیر B مجموعه‌ی $\left\{\tau(A^j, A^jBn)\psi : j \in Z, n \in Z^d\right\}$ یک قاب باشد، آن‌گاه در صورتی‌که برای $\varepsilon, \eta > 0$ روابط $\|A^{-j}A'_j - I\|_2 \leq \varepsilon$ و $\|\lambda_n - n\|_\infty \leq \eta$ برقرار باشد، مجموعه‌ی $\left\{\tau(A'_j, A^jB\lambda_n)\psi : j \in Z, n \in Z^d\right\}$ نیز یک قاب است.

واژه‌های کلیدی : قاب موجکی، پایداری، اتساع ماتریسی ، اغتشاش

پیش‌گفتار

ایده‌ی بسط یک تابع بر حسب سری مثلثاتی اولین بار بین سال‌های ۱۸۳۰ — ۱۷۷۰ توسط ژوزف فوریه[1] ریاضی‌دان و فیزیک‌دان بیان شد. در واقع او به طور اساسی ثابت کرد برای آن‌که یک تابع $f(x)$ به شیوه‌ای ساده و فشرده نمایش داده شود می‌توان از مجموع‌هایی استفاده کرد که به کمک خانواده‌ای نامتناهی از توابع سینوس‌وار ساخته می‌شوند. به عبارت دیگر فوریه نشان داد یک تابع $f(x)$ را می‌توان به صورت حاصل‌جمع بی‌نهایت تابع سینوسی و کسینوسی به شکل $\sin(nx)$ و $\cos(nx)$ نمایش داد.

یکی از دلایل اصلی برای کشف موجک و تبدیل موجکی این بود که تبدیل فوریه اطلاعات موضعی از سیگنال‌ها را شامل نمی‌شد. بنابراین در مورد سیگنال‌های پیچیده که در دامنه‌ی مشترک زمان و فرکانس تجزیه شده‌اند قابل استفاده نبود. مفهوم موجک از مطالعه‌ی آنالیز سیگنال زمان — فرکانس، انتشار موج، و نظریه‌ی نمونه‌گیری سرچشمه می‌گیرد. در سال ۱۹۸۲ ژئوفیزیک‌دان فرانسوی به نام ژان مورلت [2] با همکاری یک گروه از مهندسان فرانسوی، ایده‌ای از موجک‌ها به صورت یک خانواده از توابع ساخته شده با استفاده از انتقال و اتساع یک تابع سیگنال را ارائه داد و برای آنالیز سیگنال ناایستا آن را موجک مادر نامید. این مفهوم جدید را می‌توان به صورت ترکیبی از ایده‌های گوناگون از نظام‌های متفاوت شامل ریاضیات، فیزیک، و مهندسی در نظر گرفت. آنالیز موجک روش جدیدی برای حل مسائل دشوار در ریاضی، فیزیک، و مهندسی همراه با کاربردهای مدرن گوناگون نظیر متراکم‌سازی اطلاعات، شناسایی طرح، پردازش تصویر، کشف هواپیماو زیردریایی، و پیشرفت

[1] Joseph Fourier

[2] Jean Morlet

در ردگیری‌های CAT ارائه داد.

در سال ۱۹۵۲ قاب‌ها توسط دافین [۳] و شیفر [۴] [۱۳] معرفی شدند. آن‌ها از قاب‌ها به عنوان ابزاری در مطالعه‌ی سری فوریه ناهمساز، یعنی، دنباله‌هایی به شکل $\{e^{i\lambda_n x}\}$ که در آن $\{\lambda_n\}_{n\in Z}$ خانواده‌ای از اعداد مختلط یا حقیقی است، استفاده کردند. در سال ۱۹۸۰ یونگ [۵] [۲۶] کتاب خود را که شامل اطلاعات پایه‌ای در مورد قاب‌ها بود به چاپ رساند. سپس در سال ۱۹۸۵ دوبشی [۶]، گراسمان [۷] و مایر [۸] [۱۱] کشف کردند که قاب‌ها می‌توانند به صورت بسط توابع در $L^2(\mathbb{R})$ که خیلی شبیه به بسط‌های پایه‌های متعامد یکه هستند، نمایش داده شوند.

می‌دانیم که اگر یک قاب مانند $\{x_n\}$ داشته باشیم، با شرایطی روی عملگر U می‌توانیم نتیجه بگیریم که $\{Ux_n\}$ نیز یک قاب است. این موضوع را اکرم الدروبی [۹] [۳] بررسی کرده است. شرایط لازم و کافی برای این‌که دستگاه موجکی دودویی در $L^2(\mathbb{R})$ به شکل $\{2^{j/2}\psi(2^{j/2}\psi(2^j x-k)) : j,k\in Z\}$ یک قاب باشد به طور کامل توسط کریستنسن در [۸] بیان شده است. به علاوه شرایط لازم و کافی برای قاب بودن دستگاه موجکی با اتساع‌های ماتریسی در $L^2(\mathbb{R}^d)$ را یانگ [۱۰] [۲۴] مورد بررسی قرار داده است. بررسی پایداری قاب‌ها

---

[۳] Duffin
[۴] Schaeffer
[۵] Young
[۶] Daubechies
[۷] Grossmann
[۸] Meyer
[۹] Akram Aldroubi
[۱۰] Yang

در $L^2(\mathbb{R}^d)$ نیازمند این است که این مسئله در حالت یک متغیره خوب مطالعه شود. سان [۱۱] و ژائو [۱۲] [۲۱،۲۲] نشان داده‌اند که یک قاب موجکی در $L^2(\mathbb{R})$ با اغتشاش در پارامترهای اتساع و انتقال آن یک قاب باقی می‌ماند و در برخی موارد کران‌های پایداری واضحی هم بدست آورده‌اند. کریستنسن در [۹] نتایج بدست آمده در فضای یک بعدی را بسط داده و به بررسی نتایج پایداری در فضای d — بعدی پرداخته است. ولی در حالت کلی برای حالت چند متغیره خصوصاً برای قاب‌های موجکی با اتساع‌های ماتریسی، نتایج بسیار کمی شناخته شده‌اند. یکی از مشکلات اصلی این است که اتساع‌های ماتریسی کلاً با اتساع‌های اسکالر متفاوتند و بنابراین خیلی از روش‌هایی که برای قاب‌های موجکی یک متغیره کاربرد دارد برای حالت چند متغیره کاربردی ندارد.

اکنون وارد جزئیات شده و با محتوای این پایان‌نامه بیشتر آشنا می‌شویم. این پایان‌نامه شامل چهار فصل می‌باشد. در فصل اول دوره‌ای خلاصه از تعاریف.و ویژگی‌های اصلی فضای هیلبرت و فضای اقلیدسی و اصولی از آنالیز فوریه را بیان می‌کنیم. در بخش اول از فصل دوم تعاریف ابتدایی از موجک، قاب، دنباله‌ی قاب و قاب موجکی در فضای $L^2(\mathbb{R})$ و هم‌چنین تعاریف و قضایایی راجع به قاب فوریه، فضای کامل، فضای پلی — وینر، و دنباله‌ی گسسته در $\mathbb{R}$ را آورده‌ایم. بخش دوم این فصل را به تعاریفی از قاب و قاب موجکی در $L^2(\mathbb{R}^d)$ و هم‌چنین فضای وینر اختصاص داده‌ایم و در بخش سوم به مفاهیمی از دنباله‌ها در $\mathbb{R}^d$ پرداخته‌ایم. فصل سوم شامل سه بخش است. در بخش اول مفاهیمی از ماتریس‌های اتساع را بیان می‌کنیم. بخش دوم به دنباله‌ی قاب ماتریسی اختصاص دارد. فرض کنید

---

[۱۱] Sun

[۱۲] Zhou

$\{A_j\}_{j\in Z}$ یک دنباله از ماتریس‌های $d \times d$ حقیقی معکوس‌پذیر و $\left\{\lambda_k : k \in Z^d\right\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد، در بخش آخر فصل سوم شرایط کافی برای این‌که یک دستگاه موجکی به شکل

$$\left\{\tau\left(A_j^{-1}, A_j^{-1} B\lambda_k\right)\psi(x) = |\det A_j|^{1/2}\psi\left(A_j x - B\lambda_k\right) : j \in Z, k \in Z^d\right\}$$

یک قاب برای $L^2(\mathbb{R}^d)$ باشد را بررسی می‌کنیم. در بخش اول از فصل چهارم نشان می‌دهیم که تحت چه شرایطی یک دنباله که عناصر آن انتقال‌ها و اتساع‌های ماتریسی یک تابع در $L^2(\mathbb{R}^d)$ است، یک دنباله‌ی بسل خواهد بود و در بخش دوم اثر اغتشاش در پارامترهای اتساع و انتقال روی یک قاب در $L^2(\mathbb{R}^d)$ را بررسی می‌کنیم. در آخر نتایج بدست آمده در این فصل را با نتایج بدست آمده در فصل سوم مقایسه می‌کنیم.

فهرست مندرجات

فصل ۱

مقدمه

در این فصل سعی بر این است که مقدماتی که در این پایان‌نامه به آن نیاز داریم را بیان کنیم. در بخش اول به معرفی نمادها و تعاریف و قضایای پیش نیاز می‌پردازیم. در بخش دوم خواصی از فضای اقلیدسی را بیان می‌کنیم و بخش سوم شامل اصول مورد نیاز از آنالیز فوریه است.

۱.۱ پیش نیازها

در این بخش نمادهایی را معرفی و تعاریف و قضایایی را بیان می‌کنیم که در فصل‌های دیگر به آن نیاز داریم.

C اعداد مختلط، $\mathbb{R}$ اعداد حقیقی، Z مجموعه‌ی اعداد صحیح، $Z_+ = \{x \in Z : x \geq 0\}$، $Z_p = \{jn_0 + p : j \in Z, n_0 > 0\}$، $\mathbb{N}$ مجموعه‌ی اعداد صحیح مثبت و $\mathbb{R}^d$ فضای اقلیدسی $d-$ بعدی را نشان می‌دهد. همچنین $Z^d = \{(n_1, \ldots, n_d) : \forall \ 1 \leq i \leq d \ \ n_i \in Z\}$.

به‌طور کلی برای نمایش یک نقطه در $\mathbb{R}^d$ و یک عضو در Z^d از یک حرف استفاده می کنیم. دنباله‌ها و سری‌هایی که حدود آنها مشخص نشده روی $\mathbb{N}$ در نظر گرفته شده‌اند. $\mathcal{H}$ فضای هیلبرت را نشان می‌دهد و # نشان دهنده‌ی تعداد اعضای مجموعه داده شده است. اگر M و $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ثابت باشند، آن‌گاه منظور از $M(c_1, \ldots, c_n)$ این است که ثابت M به ثابت‌های c_1 تا c_n وابسته است.

قضیه ۱.۱.۱ [۵] اگر $\{f_n\}$ یک دنباله از توابع انتگرال‌پذیر باشد به طوری‌که $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu < \infty$، آن‌گاه $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ یک تابع انتگرال پذیر است و رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\int_X (\sum_{n=1}^{\infty} f_n) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu.$$

قضیه ۲.۱.۱ [۲۰] (**قضیه‌ی همگرایی یکنواخت لبگ**) فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه پذیر باشد و نیز

۱) برای هر $x \in X$ و هر n، $0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots \le \infty$؛

۲) برای هر $x \in X$، اگر $n \to \infty$ آن‌گاه $f_n(x) \to f(x)$.

در این صورت f اندازه پذیر است و هر گاه $n \to \infty$ آن‌گاه $\int_X f_n(x) d\mu \to \int_X f(x) d\mu$.

قضیه ۳.۱.۱ [۲۰] (**قضیه‌ی همگرایی تسلطی لبگ**) فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه پذیر مختلط باشد به‌طوری که برای هر $x \in X$،

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

هرگاه تابعی مانند $g \in L^1(\mu)$ وجود داشته باشد که برای $n = 1, 2, \ldots$ و $x \in X$، $|f_n(x)| \leq g(x)$، آن‌گاه $f \in L^1(\mu)$ و

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x) d\mu = \int_X f(x) d\mu.$$

تعریف ۴.۱.۱ فضای برداری مختلط $\mathcal{H}$ را یک فضای ضرب داخلی نامیم، هرگاه به هر جفت مرتب از بردارهای $x, y \in \mathcal{H}$ یک عدد مختلط مانند $\langle x, y\rangle$ به نام « ضرب داخلی» x, y چنان مربوط شده باشد که قواعد زیر برقرار باشد:

۱) $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$ (علامت بار نشانگر مزدوج مختلط است)؛

۲) اگر $x, y, z \in \mathcal{H}$، $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$؛

۳) اگر $x, y \in \mathcal{H}$ و α اسکالر باشد، $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$؛

۴) به ازای هر $x \in \mathcal{H}$، $\langle x, x\rangle \geq 0$؛

۵) $\langle x, x\rangle = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$.

تعریف ۵.۱.۱ اگر فضای ضرب داخلی $\mathcal{H}$ تحت متر

$$d(x, y) = \| x - y \| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$$

کامل باشد، یعنی هر دنباله‌ی کشی در آن فضا همگرا باشد، آن‌گاه $\mathcal{H}$ را یک فضای هیلبرت می‌نامیم.

یک پایه متعامد یکه یک سیستم متعامد یکه $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ است، هرگاه یک پایه برای $\mathcal{H}$ باشد.

مثال ۶.۱.۱ مجموعه‌ی $\left\{e^{2\pi ikx}\chi_{[0,1]}(x)\right\}_{k\in Z}$ یک پایه‌ی متعامد یکه برای $L^2(0,1)$ است؛ با انتقال می‌بینیم که برای هر $n\in Z$ مجموعه‌ی

$$\left\{e^{2\pi ik(x-n)}\chi_{[0,1]}(x-n)\right\}_{k\in Z}=\left\{e^{2\pi ikx}\chi_{[n,n+1]}(x)\right\}_{k\in Z}$$

یک پایه‌ی متعامد یکه برای فضای $L^2(n,n+1)$ است. با کنار هم قرار دادن این پایه‌ها، پایه‌ی متعامد یکه‌ی

$$\left\{e^{2\pi ikx}\chi_{[n,n+1]}(x)\right\}_{k,n\in Z}$$

برای $L^2(\mathbb{R})$ بدست می آید.

اگر $(f_i)_{i\in \mathbb{N}}$ پایه‌ای در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد، هر $f\in\mathcal{H}$ به‌صورت یک ترکیب خطی از اعضای f_i نمایش داده می‌شود؛ یعنی

$$f=\sum_{i=1}^{\infty}c_i(f)f_i \qquad (1.1)$$

که در آن ضرایب $c_i(f)$ یکتا هستند. در این حالت، عناصر یکتای $g_i\in\mathcal{H}$ وجود دارند که $c_i(f)=\langle f,g_i\rangle$.

قضیه ۷.۱.۱ [۸] اگر $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ یک مجموعه‌ی متعامد یکه در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند:

۱) $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ یک پایه متعامد یکه برای $\mathcal{H}$ است.

۲) برای هر $x\in\mathcal{H}$، $x=\sum_{i=1}^{\infty}\langle x,e_i\rangle e_i$.

۳) برای هر $x\in\mathcal{H}$، $\| x\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|\langle x,e_i\rangle|^2$ (اتحاد پارسوال).

۴) $\overline{span}(e_i)_{i=1}^{\infty}=\mathcal{H}$.

۵) اگر $x\in\mathcal{H}$ و برای هر i، $\langle x,e_i\rangle=0$ باشد، آن‌گاه $x=0$.

قضیه ۸.۱.۱ [۱۸] (قضیه‌ی فوبینی) فرض کنید $f(x,y)$ یک تابع دو متغیره‌ی حقیقی و انتگرال

$$\int_a^b \int_c^d |f(x,y)|dxdy$$

موجود و همگرا باشد. در این صورت انتگرال‌های $\int_a^b |f(x,y)|dx$ و $\int_c^d |f(x,y)|dy$ تقریباً همه جا همگرا هستند و f روی بازه‌ی (a,b) (و نیز روی (c,d)) انتگرال‌پذیر است و داریم:

$$\begin{aligned}\int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy &= \int_c^d (\int_a^b f(x,y)dx)dy \\ &= \int_a^b (\int_c^d f(x,y)dy)dx.\end{aligned}$$

قضیه ۹.۱.۱ [۱۴] (قانون متوازی الاضلاع) فرض کنید X یک فضای داخلی باشد. برای هر $x, y \in X$ داریم:

$$\|x+y\|^۲ + \|x-y\|^۲ = ۲(\|x\|^۲ + \|y\|^۲).$$

تعریف ۱۰.۱.۱ اگر $\circ < p < \infty$ و X یک فضای اندازه دلخواه با اندازه‌ی مثبت μ باشد،

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{۱/p}$$

و اگر $p = \infty$ باشد،

$$\|f\|_\infty = inf\{M : |f(x)| \leq M \quad a.e.\}.$$

واضح است که تقریباً برای هر $x \in X$ داریم: $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$. برای هر $0 < p < \infty$ فضای $L^p(X)$، گردایه‌ی همه‌ی توابع اندازه‌پذیر و مختلط مقدار f بر X است که $\| f \|_p < \infty$. اگر μ اندازه‌ی شمارشی بر مجموعه‌ی A باشد، معمولاً فضای L^p نظیر را با $\ell^p(A)$ یا، اگر A شمارش‌پذیر باشد، فقط با ℓ^p نشان می‌دهند. هر عنصر ℓ^p را می‌توان یک دنباله‌ی مختلط $x = \{x_n\}$ در نظر گرفت و $\| x \|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$.

فضای $L^2(X)$ با ضرب داخلی

$$\langle f, g \rangle = \int_X f(t)\overline{g(t)}dt,$$

یک فضای هیلبرت است.

تعریف ۱۱.۱.۱ اگر a و $0 < b$ اعداد حقیقی باشند، عملگرهای انتقال و اتساع روی $L^2(\mathbb{R})$ که به ترتیب با T_a و D_b نشان داده می‌شوند چنین تعریف می‌شوند:

$$T_a : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}), \qquad T_a(f)(x) = f(x - a)$$

$$D_b : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}), \qquad D_b(f)(x) = \sqrt{b}f(bx).$$

تعریف ۱۲.۱.۱ برای عدد صحیح دلخواه j عملگر اتساع دودویی D_2^j به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_2^j : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}), \qquad D_2^j(f)(x) = f(2^j x).$$

همان‌طور که می‌بینیم $D_2^j(f)(x) = 2^{-j/2} D_{2^j}(f)(x)$.