دانشکده‌ی علوم

گروه ریاضی


عنوان:

# نمونه‌گیری تعمیم‌یافته چند متغیره در فضاهای انتقال– پایا و خاصیت‌های تقریب آن


استاد راهنما:

دکتر قاسم نریمانی

استاد مشاور:

دکتر محمدرضا مطلبی

ارائه‌دهنده:

مینا معلایی


زمستان ۱۳۸۹

**نام خانوادگی:** معلایی **نام:** مینا

---

**عنوان پایان‌نامه:** نمونه‌گیری تعمیم‌یافته چند متغیره در فضاهای انتقال− پایا و خاصیت‌های تقریب آن

---

**استاد راهنما:** دکتر قاسم نریمانی

**استاد مشاور:** دکتر محمدرضا مطلبی

---

**مقطع تحصیلی:** کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی **گرایش:** محض **دانشگاه:** محقق اردبیلی

**دانشکده:** علوم **تاریخ فارغ التّحصیلی:** ۱۳۸۹ **تعداد صفحه:** ۷۸

---

**کلید واژه‌ها:** فضای انتقال−پایا، قاب‌های دوگان، نمونه‌گیری تعمیم‌یافته، مرتبهٔ تقریب.

---

**چکیده:**امروزه موضوع نمونه‌گیری تعمیم‌یافته در فضای انتقال− پایا بیشتر مورد توجه قرار گرفته است. در این روش مشکلات وابسته به نظریهٔ کلاسیک شانون مرتفع می‌شود. با اضافه کردن چند فرض، هر تابع چند متغیره در فضای انتقال− پایا را می‌توان از مقادیر تابع در $\mathbb{Z}^d$ بازیابی کرد. معمولاً، داده‌های موجود از مقادیر پیچش تابع با توابع خاصی بدست می‌آیند. لذا بررسی مسئلهٔ نمونه‌گیری تعمیم‌یافتهٔ چند متغیره در فضاهای انتقال− پایا ضروری است. اطلاعات اضافی در مورد تابع‌ها در فضای انتقال− پایا اجازه می‌دهد تا برای اینکه مقادیر تابع در کل $\mathbb{Z}^d$ بکار گرفته شود، فقط در یک زیر مشبکه از $\mathbb{Z}^d$ لازم باشد. در این پایان نامه، این نظریه را برای $L^2(\mathbb{R}^d)$ بکار خواهیم

برد که مستلزم نظریهٔ قاب‌ها می‌باشد. فرمول نمونه‌گیری برای فضای انتقال— پایا از بسط قاب بدست می آید. در مورد فرمول‌های قاب‌های فرا کامل[1]، جستجوی توابع بازسازی با خاصیت‌های مناسب، حائز اهمیت می‌باشد. در نهایت روش‌های تقریب با استفاده از این فرمول‌های نمونه‌گیری ارائه شده است.

[1] overcomplete

# تقدیر و سپاسگزاری:

اکنون که در سایه‌ی لطف خداوند منان شاهد به ثمر رسیدن این پایان‌نامه می‌باشم بر خود لازم می‌دانم از تمامی عزیزانی که در طول این مدت به طور مستمر از راهنمایی‌های ارزشمندشان بهره برده‌ام قدردانی و سپاسگزاری نمایم. به‌خصوص از اساتید محترم، آقایان دکتر نریمانی و دکتر مطلبی که به حق شایسته‌ی تشکر می‌باشند و در تمام این مدت خالصانه اینجانب را مورد لطف و راهنمایی خود قرار داده‌اند و امیدوارم آموخته‌هایم موجبات رضایت خاطر ایشان را فراهم سازد.

و با تشکر از پدرم که آبدانه‌های مهرش در کویران زندگی بهار می‌آفریند، مادرم که سرچشمه‌ی همه‌ی مهربانی‌هاست و مرا مورد لطف و حمایت خود قرار دادند.

**مینا معلایی**

**زمستان ۱۳۸۹**

# فهرست مندرجات

# مقدمه و شمای کلی پایان نامه

در بسیاری از کاربردهای ریاضیات با توابعی مواجه می‌شویم که بسیار پیچیده‌تر از توابع استاندارد آنالیز کلاسیک هستند. برخی از این توابع را نمی‌توان به‌وسیله‌ی توابع استاندارد به‌شکل بسته بیان نمود و بعضی از آنها به‌طور ضمنی و یا از طریق نمودارشان شناخته می‌شوند. برای مثال یک مدار الکتریکی را در نظر می‌گیریم که در آن شدت جریان را در نقطه‌ی معینی به‌عنوان تابعی از زمان، اندازه می‌گیریم. خروجی ممکن است کاملاً پیچیده باشد و از طریق یک نمودار بهتر از سایر طرق توصیف شود.

مهندسی که در حال اندازه‌گیری شدت جریان در یک مدار الکتریکی است در مورد یک سیگنال صحبت می‌کند؛ درحالی‌که برای یک ریاضیدان، این فقط بدین معنی است که حاصل خروجی، تابعی مانند $f(x)$ است که جریان را بر حسب زمان $x$ می‌دهد. تعریف دقیقی از سیگنال ارائه نمی‌کنیم. برای اهداف ما کافی است سیگنال به‌عنوان بروز یک رخداد فیزیکی برحسب یک تابع، یا بر حسب دنباله‌ای از اعداد باشد.

سیگنال‌ها معمولاً به‌طور صریح بر حسب یک تابع داده نمی‌شوند؛ به‌عنوان مثال آنها از طریق اندازه‌گیری حاصل می‌شوند. این موجب می‌گردد که تعیین اطلاعات دقیق در مورد سیگنال‌ها از روی تابع $f$ که آن را توصیف می‌کند، دشوار و یا غیرممکن باشد، به‌خصوص اگر مجبور به انجام برخی محاسبات روی $f$ باشیم. در چنین مواردی مهم است که $f$ را بتوانیم با توابع ساده‌تری تقریب بزنیم؛ یعنی مایل باشیم تابعی مانند $g$ را طوری بیابیم که داشته باشیم:

i) محاسبات مربوطه را بتوان روی تابع $g$ انجام داد،

ii) تابع $g$ نزدیک به تابع $f$ باشد، به‌طوری‌که خروجی‌های حاصل از $g$ اطلاعات مفیدی از

سیگنال توصیف شده توسط $f$ را بدهد.

این پایان نامه عمدتاً مبتنی بر مقالهٔ

Garcia, A.G., Perez-Villalon, G. 2009. Multivariate generalized sampling in shift-invariant spaces and its approximation properties, J. Math. Anal. Appl. 355: 397-413.

می‌باشد و از سایر منابع جهت توضیح و تفهیم هرچه بیشتر استفاده شده است.

در ادامه شمایی کلی از پایاننامه را مورد مطالعه قرار خواهیم داد.

قضیه نمونه‌گیری کلاسیک ویتاکر– شانون– کوتلنیکوف[۳] (WSK)، بیان می‌کند که هر تابع باند–محدود $f$ به $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$، یعنی

$$f(t)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\hat{f}(\omega)e^{2\pi it\omega}d\omega,\qquad t\in\mathbb{R}$$

را می‌توان از دنبالهٔ نمونه‌های $\{f(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ به صورت

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(n)sinc(t-n),\qquad t\in\mathbb{R}$$

بازیابی کرد. که $sinc$ بیانگر تابع کاردینال $sinc(t)=\frac{sin\pi t}{\pi t}$ می‌باشد. بنابراین فضای پلی– وینر[۱] شامل توابع باند–محدود به $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$، توسط انتقال‌های صحیح از تابع $sinc$ تولید می‌شود. تعمیم فرمول نمونه‌گیری $WSK$ به حالت $d$–بعدی بصورت زیر است

$$f(t)=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^d}f(\alpha)sinc(t_1-\alpha_1)...sinc(t_d-\alpha_d),\qquad t=(t_1,...,t_d)\in\mathbb{R}^d,$$

که در اینجا تابع باند–محدود $f$ به مکعب $d$–بعدی $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^d$، یعنی

$$f(t)=\int_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^d}\hat{j}(x)e^{2\pi ix^Tt}dt,\qquad t\in\mathbb{R}^d$$

[۳] Classical Whittaker-Shannon-Kotel'nikov sampling theorem

[۱] Paley-Wiener space

می‌باشد.

نظریهٔ نمونه‌گیری شانون علی‌رغم پیچیدگی زیاد، دارای مشکلاتی نیز می‌باشد که آنسر[۲] در منابع [ ۲۹,۲۸] به آنها اشاره کرده است: در آن به کاربرد صافی‌های ایده‌آل تکیه شده است، فرض باند– محدود متناقض با ایدهٔ سیگنال پیوسته با انرژی متناهی می‌باشد، عمل محدود کردن باند، پدیدهٔ گیپس[۳] تولید می‌کند، و سرانجام، سیر نزولی بسیار آهستهٔ تابع $sinc$ باعث می‌شود که محاسبات در دامنهٔ سیگنال ناکارا و غیراقتصادی باشند. بعلاوه، در چندین بعد، فرض اینکه یک سیگنال چندبعدی باند–محدود به یک بازهٔ $d$– بعدی است، ناکارا می‌باشد.

همچنین، تعداد زیادی از مسائل کاربردی محدودیت‌های مختلفی روی نوع توابع تحمیل می‌کنند. بدین دلیل، مسائل نمونه‌گیری و بازسازی در فضای اسپلاین[۴]، موجک[۵] و فضاهای انتقال– پایای تعمیم یافته[٦] مورد تحقیق قرار گرفته است. بعنوان نمونه می‌توانید منابع [۱و ۲۹و ۳٦] را ببینید.

در بسیاری از کاربردهای عملی، فرض بر این است که سیگنال‌ها متعلق به فضای انتقال– پایا به شکل

$$V_\varphi^2 := \overline{span}_{L^2}\{\varphi(t-\alpha) \ : \ \alpha \in \mathbb{Z}^d\}$$

می‌باشند که تابع $\varphi$ متعلق به $L^2(\mathbb{R}^d)$ و مولد $V_\varphi^2$ نامیده می‌شود.

فرض می‌کنیم که $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ یک مولد پایدار برای $V_\varphi^2$ باشد، یعنی دنباله $\{\varphi(t-\alpha)\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^d}$ تشکیل پایهٔ ریس برای $V_\varphi^2$ دهد، فضای انتقال‌پایای $V_\varphi^2$ می‌تواند بصورت

$$V_\varphi^2 = \{\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^d} a_\alpha \varphi(t-\alpha) \ : \ \{a_\alpha\} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)\} \subset L^2(\mathbb{R}^d)$$

---

[۲] Unser

[۳] Gibbs oscillation

[۴] Spline space

[۵] Wavelet space

[٦] General shift-invariant space

توصیف شود. از طرف دیگر، در حالت‌های معمول داده‌های موجود، مقادیر عددی یک نسخه‌ای صافی شده از سیگنال اصلی می‌باشد. این منجر به نمونه‌گیری تعمیم‌یافته در $V_\varphi^2$ می شود. مثلاً فرض کنیم $s$ سیستم زمان‌پایای خطی (صافی‌های) $\mathcal{L}_j$، $j = 1, ..., s$، روی زیر فضای انتقال‌پایای $V_\varphi^2$ از$L^2(\mathbb{R}^d)$ تعریف شده باشد. به زبان ریاضی با عملگرهایی (پیوسته) که با انتقال‌ها جابه‌جامی‌شوند سر و کار داریم.

هدف، بازیابی هر تابع $f$ در $V_\varphi^2$ از زیر دنباله‌ای مناسب از مجموعهٔ نمونه‌های $\{(\mathcal{L}_j f)(\alpha)\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^d, j=1,...,s}$، بوسیلهٔ یک فرمول نمونه‌گیری است که بصورت بسط یک قاب در $V_\varphi^2$ می‌باشد. یادآوری می‌کنیم که دنبالهٔ $\{f_n\}$ تشکیل قاب برای فضای هیلبرت جدایی‌پذیر $H$ می‌دهد، اگر ثابت‌های $A, B > 0$ (کران‌های قاب) موجود باشند بطوریکه برای‌هر $f \in H$

$$A||f||^2 \leq \sum_n | < f, f_n > |^2 \leq B||f||^2.$$

یک قاب $\{f_n\}$ برای $H$، دارای این ویژگی است که نمایشی برای‌هر بردار $f \in H$ بصورت سری $f = \sum_n c_n f_n$ می‌دهد. اما برخلاف پایه‌های ریس، این نمایش منحصربفرد نمی‌باشد.

ضرایب قاب مناسب $c_n$ که بطور خطی وپیوسته به $f$ وابسته می‌باشند، با بکارگیری قاب‌های دوگان $\{g_n\}$ از $\{f_n\}$ بدست می آیند. یعنی $\{g_n\}$ قابی دیگر برای $H$ می‌باشد بطوریکه برای‌هر $f \in H$

$$f = \sum_n < f, g_n > f_n = \sum_n < f, f_n > g_n.$$

برای جزئیات بیشتر در مورد نظریهٔ قاب‌ها می‌توانید منبع [۵] و منابع دیگر مذکور در آن را ببینید. تحت شرایط مناسب، هر تابع در یک فضای انتقال‌پایا در $L^2(\mathbb{R}^d)$ می‌تواند از نمونه‌هایی در مشبکهٔ $\mathbb{Z}^d$ از $\mathbb{R}^d$ بازیابی شود ([۲۶] را ببینید). اگر نمونه‌گیری تابع روی زیر مشبکه $M\mathbb{Z}^d$، که $M$ بیانگر ماتریس با درایه‌های صحیح و دترمینان مثبت می‌باشد، صورت گیرد، نمونه‌گیری با میزان $\frac{1}{detM}$ را بکار می‌گیریم و به زبان غیر دقیق، ما برای بازیابی تابع $f$ به نمونه‌های تعمیم‌یافتهٔ

$s \geq detM$ از $\{(\mathcal{L}_j f)(M\alpha)\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^d, j=1,...,s}$ سیستم خطی $\mathcal{L}_j$ نیازمندیم.

**حالت ۱ – بعدی در منابع [۸و ۱۲و ۳۰] مورد بحث قرار گرفته است: تحت فرضیات مناسب، هر تابع $f$ در $V_\varphi^2$ از دنباله‌ای از نمونه‌های تعمیم‌یافتهٔ $\{(\mathcal{L}_j f)(rn)\}_{n\in\mathbb{Z}, j=1,...,s}$ قابل بازیابی می‌باشد.**

**در این پایان‌نامه، بوسیلهٔ نظریه $L^2(\mathbb{R}^d)$، فرمول نمونه‌گیری برای $V_\varphi^2$ از نوع**

$$f(t) = (detM)\sum_{j=1}^{s}\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^d}(\mathcal{L}_j f)(M\alpha)S_j(t - M\alpha), \qquad t\in\mathbb{R}^d,$$

**را بدست می‌آوریم که دنبالهٔ توابع بازسازی $\{S_j(. - M\alpha)\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^d, j=1,...,s}$ تشکیل یک قاب برای فضای انتقال‌پایای $V_\varphi^2$ می‌دهد. برای این منظور، ابتدا ملاحظه می‌کنیم که فضای انتقال‌پایای $V_\varphi^2$، تصویر $L^2[0,1)^d$ تحت ایزومورفیسم**

$$\tau_\varphi \ : \ L^2[0,1)^d \to V_\varphi^2,$$

**می‌باشد که عملگر $\tau_\varphi$، توابع پایهٔ یکامتعامد $\{e^{-2\pi i\alpha^T x}\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^d}$ برای $L^2[0,1)^d$ را بروی پایهٔ ریس $\{\varphi(t-\alpha)\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^d}$ برای $V_\varphi^2$ نظیر می‌کند.**

**سپس، نمونه‌های تعمیم‌یافته $\{(\mathcal{L}_j f)(M\alpha)\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^d, j=1,...,s}$ را بصورت ضرب داخلی تابع $F = \tau_\varphi^{-1} f \in L^2[0,1)^d$ با بردارهای یک قاب خاص در $L^2[0,1)^d$ بیان می‌کنیم. در جستجو برای قاب‌های دوگان، بسط‌هایی برای $F$ در $L^2[0,1)^d$ بدست می‌آید که در آن ضرایب قاب، نمونه‌های $\{(\mathcal{L}_j f)(M\alpha)\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^d, j=1,...,s}$ می‌باشند.**

**این بسط‌های قاب دقیقاً به فرم**

$$F(t) = (detM)\sum_{j=1}^{s}\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^d}(\mathcal{L}_j f)(M\alpha)d_j(x)e^{-2\pi i\alpha^T M^T x}, \qquad (*)$$

**در $L^2[0,1)^d$ می‌باشد که توابع $d_j \in L^2[0,1)^d$، $j = 1, ..., s$، بوسیلهٔ حل معادلهٔ ماتریسی**

$$[d_1(x), ..., d_s(x)]G(x) = [1, 0, ..., 0]$$

تقریباً همه جا در $L^{۲}[۰,۱)^d$ بدست می‌آیند. $G(x)$ یک ماتریس $s \times (detM)$ از توابع تعریف شده در $L^{۲}[۰,۱)^d$ است که تنها وابسته به مولد $\varphi$ و سیستم‌های $\mathcal{L}_j$، $j = ۱, ..., s$ می‌باشد.

سرانجام با بکارگیری ایزومورفیسم $\tau_\varphi$ در بسط قاب $(*)$ برای $F$، بسط نمونه‌گیری فوق الذکر برای $f = \tau_\varphi F$ در $V_\varphi^{۲}$ را بدست خواهیم آورد که $S_j = \tau_\varphi d_j$، $j = ۱, ..., s$.

تمامی مراحل بیان شده در فصول بعدی مورد بررسی قرار می‌گیرند.

# فصل ۱

# مقدمات و پیش نیازها

## ۱—۱ مفاهیم مقدماتی

در ابتدا بعضی از مفاهیم و نتایج مقدّماتی که در ادامه مورد استفاده قرار می‌گیرند را بیان می‌کنیم.

$\mathbb{C}$، $\mathbb{R}$، $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{N}$ بترتیب بیانگر مجموعه‌های اعداد مختلط، حقیقی، صحیح و طبیعی می‌باشند.

در تمامی فصول $\mathbb{R}^d$ را با اندازه‌ی لبگ[1] در نظر می‌گیریم.

فضای توابع پیوسته روی $\mathbb{R}^d$ را با $C(\mathbb{R}^d)$ نمایش می‌دهیم.

**۱—۱—۱ تعریف.** *گوییم تابع مختلط $f$ بر فضای هاسدورف موضعاً فشرده‌ی $\mathbb{R}^d$ در بی‌نهایت صفر می‌شود، هرگاه به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ مجموعهٔ فشرده‌ای مانند $k \subset \mathbb{R}^d$ موجود باشد بطوریکه به‌ازای‌هر $x$ غیر واقع در $k$، $|f(x)| < \varepsilon$.*

ردهٔ تمام توابع پیوسته روی $\mathbb{R}^d$ را که در بی‌نهایت صفر می‌شوند با $C_0(\mathbb{R}^d)$ نشان می‌دهیم و ردهٔ توابع کراندار و پیوسته روی $\mathbb{R}^d$ را هم با $C_b(\mathbb{R}^d)$ نشان می‌دهیم.

**۱—۱—۲ تعریف.** *محمل تابع مختلط $f$ بر فضای $\mathbb{R}^d$، بست مجموعه‌ی $\{x : f(x) \neq 0\}$ می‌باشد.*

$$Supp(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^d \ : \ f(x) \neq 0\}}.$$

همچنین $C_c(\mathbb{R}^d)$ نمایانگر گردایهٔ تمام توابع مختلط پیوسته روی $\mathbb{R}^d$ که محمل فشرده دارند می‌باشد.

[1] Lebesgue's measure

### ۱-۱-۳ گزاره.

$$C_c(\mathbb{R}^d) \subseteq C_\circ(\mathbb{R}^d) \subseteq C_b(\mathbb{R}^d) \subseteq C(\mathbb{R}^d)$$

**۱-۱-۴ تعریف.** *اگر $1 \leq p < \infty$ و $f$ یک تابع اندازه‌پذیر مختلط بر $\mathbb{R}^d$ باشد، $||\cdot||_p$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم*

$$||f||_p = \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p dt\Big)^{1/p}$$

*و $L^p(\mathbb{R}^d)$ از تمام $f$ هایی تشکیل شده است که $||f||_p < \infty$.*

*$L^\infty(\mathbb{R}^d)$ نیز رده‌ی تمام توابع به‌طوراساسی کراندار (نسبت به اندازهٔ لبگ) بر $\mathbb{R}^d$ است و $\ell^\infty(A)$ رده‌ی تمام توابع کراندار بر $A$ می‌باشد.*

**۱-۱-۵ تعریف.** *فرض می‌کنیم که $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ یک تابع اندازه‌پذیر لبگ باشد، در این صورت نرم $|\cdot|_p$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم*

$$|\varphi|_p := \Bigg(\int_{[0,1)^n}\Big(\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} |\varphi(t-\alpha)|\Big)^p\, dt\Bigg)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty)$$

*و $|\cdot|_\infty$ را نیز به صورت زیر تعریف می کنیم*

$$|\varphi|_\infty := \sup_{t\in[0,1)^n} \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} |\varphi(t-\alpha)|.$$

*برای $1 \leq p \leq \infty$ تعریف می‌کنیم*

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C} \text{ ، اندازه‌پذیر لبگ } f \text{ ،} |f|_p < \infty\}.$$

**۱–۱–۶ تعریف.** هرگاه $p,q$ اعداد حقیقی مثبتی باشند که $p+q=pq$، آنگاه $p,q$ را یک جفت از نماهای مزدوج می‌نامیم.

**۱–۱–۷ قضیه.** فرض کنیم $p,q$ یک جفت از نماهای مزدوج باشند، اگر $f\in L^p(\mathbb{R}^d)$ و $g\in L^q(\mathbb{R}^d)$، آنگاه $f.g\in L^1(\mathbb{R}^d)$ و به‌ازای‌هر $x\in\mathbb{R}^n$، داریم

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^d} f.g\ \ dx\Big| \le ||f||_p\ \ ||g||_q$$

بعبارتی

$$||f.g||_1 \le ||f||_p\ \ ||g||_q$$

نامساوی فوق را نامساوی هولدر[1] می‌نامیم.

اگر $p,q=2$، نامساوی بالا ، نامساوی شوارتس[2] نامیده می‌شود.

**۱–۱–۸ تعریف.** پیچش دو تابع $f,g$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(f*\ g)(x)=\int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)d(t)$$

**۱–۱–۹ قضیه.** فرض می‌کنیم که $\infty \ge 1,q,r \le p$ و در رابطهٔ $1/p+1/q=1+1/r$ صدق کند. اگر $f\in L^p(\mathbb{R}^d)$ و $g\in L^q(\mathbb{R}^d)$، آنگاه $f*\ g\in L^r(\mathbb{R}^d)$ و

$$||f*\ g||_r \le ||f||_p\ ||g||_q$$

[1] Holder's inequality

[2] Schwarz's inequality

این نامساوی به نامساوی یانگ [۳] مشهور است.

**۱—۱—۱۰ تعریف.** *تابع $\varphi \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$ و دنباله $a \in \ell^\infty(\mathbb{Z}^d)$ داده شده‌اند. ضرب پیچشی نیمه‌گسسته را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم*

$$\varphi *' a\ (t) := \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} a(\alpha)\varphi(t-\alpha)$$

**۱—۱—۱۱ قضیه.** *اگر $\varphi \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$، آنگاه*

*الف)* $|\varphi *' a|_p \leq |\varphi|_p\ ||a||_1$

ب) $||\varphi *' a||_p \leq |\varphi|_p\ ||a||_p$ .

**اثبات .** مراجعه شود به منبع [۱۴]. ■

**۱—۱—۱۲ قضیه.** . *$L^p(\mathbb{R}^d)$ به‌ازای‌هر $1 \leq p \leq \infty$ یک فضای متری تام است.*

**۱—۱—۱۳ قضیه.** . *به ازای $1 \leq p < \infty$، $C_c$ در $L^p$ چگال است.*

**۱—۱—۱۴ قضیه.** . *$C_\circ(\mathbb{R}^d)$ تتمیم $C_c(\mathbb{R}^d)$ نسبت به متر تعریف شده با نرم سوپریمم*

$$||f|| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

*می‌باشد.*

**۱—۱—۱۵ تعریف.** *اگر $A$ یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ باشد و $x, y, z \in A$، با تعریف عمل (۰)*

[۳] Young's inequality

در $A$ با ویژگی‌های

$$(x.y).z = x.(y.z) \quad , \ x.(y+z) = x.y + x.z \quad , (y+z).x = y.x + z.x$$

و برای $\alpha \in \mathbb{C}$،

$$\alpha(x.y) = (\alpha x).y = x.(\alpha y)$$

$A$ یک جبر مختلط است.

هرگاه یک نرم در $A$ موجود باشد که $A$ را به یک فضای خطی نرمدار تبدیل کند و در نامساوی ضربی $||x.y|| \leq ||x|| \, ||y||$ صدق کند، آنگاه $A$ یک جبر مختلط نرمدار می‌باشد. حال اگر جبر نرمدار $A$ با نرم تعریف شده کامل باشد، جبر باناخ خواهد بود.

**۱‑۱‑۱٦ تعریف.** فرض کنیم $X$ مجموعه و $(Y,d)$ یک فضای متریک باشد. دنبالهٔ توابع $\{f_n\}$ که $f_n : X \longrightarrow Y$ است به طور یکنواخت به تابع $f : X \longrightarrow Y$ همگراست، هرگاه

$$\forall \varepsilon > \circ \quad \exists N : \ \forall n \geq N \ , x \in X \Longrightarrow \quad d\Big(f_n(x), f(x)\Big) < \varepsilon.$$

**۱‑۱‑۱۷ تعریف.** فرض کنیم $f \in L^{۱}(\mathbb{R}^d)$ باشد، تبدیل فوریهٔ تابع $f$ را با نماد $\hat{f}$ نمایش داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} f(t) e^{-۲\pi i \xi t} dt \quad .$$

**۱‑۱‑۱۸ تعریف.** ضرب داخلی توابع $f,g$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\langle \ f, \ g \ \rangle := \textstyle\int_{\mathbb{R}^d} f\bar{g} \ .$$

**۱–۱–۱۹ تعریف.** *تابع دلتای دیراک [۱] را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم*

$$\delta(x)=\begin{cases} 1 & : x=0 \\ 0 & : x\neq 0 \end{cases}$$

**۱–۱–۲۰ تعریف.** *عملگر انتقال $T_\alpha$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم*

$$T_\alpha(f)=f(.-\alpha), \qquad \alpha\in\mathbb{Z}^d.$$

**۱–۱–۲۱ تعریف.** *فضای هیلبرت $H$ را جدایی‌پذیر گوئیم هرگاه زیر مجموعه‌ای شمارا از آن موجود باشد که در $H$ چگال است.*

*فرض کنید $\varphi\in L^2(\mathbb{R}^d)$ دلخواه باشد.*

**۱–۱–۲۲ تعریف.** *گوئیم $\varphi$ یک مولد پایدار می‌باشد اگر مقادیر ثابت $B,A>0$ موجود باشند بطوریکه برای‌هر دنبالهٔ متناهی $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ نامساوی زیر برقرار باشد*

$$A\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2\leq ||\sum_{k=1}^{\infty}c_k\varphi(x-k)||^2\leq B\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2$$

**۱–۱–۲۳ تعریف.** *گوئیم دنبالهٔ $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$، دنباله ریس می‌باشد هرگاه مقادیر ثابت $B,A>0$ موجود باشند بطوریکه برای‌هر دنبالهٔ متناهی $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ نامساوی زیر برقرار باشد*

$$A\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2\leq ||\sum_{k=1}^{\infty}c_kf_k||^2\leq B\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2$$

[۱] Dirac delta

بزرگترین مقدار ممکن $A$ و کوچکترین مقدار ممکن $B$ را کران‌های ریس بهین می نامیم.

**۱—۱—۲۴ تعریف.** پایه ریس برای فضای هیلبرت H، خانواده‌ای بصورت $\{Ue_k\}_{k=1}^{\infty}$ می‌باشد بطوریکه $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ پایهٔ یکامتعامد برای H و $U : H \to H$ عملگری کراندار و وارون‌پذیر است.

از این تعاریف بسادگی نتیجه می‌شود که اگر $\varphi$ مولد پایدار برای فضا باشد آنگاه دنبالهٔ انتقال های صحیح آن یعنی $\{\varphi(.-k)\}_k$، تشکیل پایهٔ ریس برای فضای $\overline{span}\{\varphi(.-k)\}$ می‌دهد.

**۱—۱—۲۵ تعریف.** گردایه شمارای $\{f_k\}_{k\in I}$ از عناصر H را دنبالهٔ بسل گوئیم هرگاه ثابت $B > 0$ موجود باشد بطوریکه

$$\sum_{k\in I} | < f, f_k > |^2 \le B||f||^2, \qquad f \in H$$

هر عدد B را کران بسل برای دنباله $\{f_k\}_{k\in I}$ گوئیم.

**۱—۱—۲۶ تعریف.** گردایه شمارای $\{f_k\}_{k\in I}$ از عناصر $H$ تشکیل قاب برای فضای هیلبرت جدایی‌پذیر $H$ می‌دهند هرگاه مقادیر ثابت $A, B > 0$ موجود باشند بطوریکه برای‌هر $f \in H$

$$A||f||^2 \le \sum_{k\in I} | < f, f_k > |^2 \le B||f||^2$$

$A$ و $B$ را کران‌های قاب گوئیم که منحصربفرد نیستند. سوپریمم همهٔ کران‌های پایین و انفیمم همهٔ کران‌های بالایی را کران‌های بهین قاب گوئیم.

**۱—۱—۲۷ قضیه.** اگر $\{Ue_k\}_{k=1}^{\infty} = \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ تشکیل پایهٔ ریس برای فضای هیلبرت $H$ دهد، آنگاه ثابت‌های $B, A > 0$ موجودند بطوریکه

$$A||f||^2 \le \sum_{k=1}^{\infty} | < f, f_k > |^2 \le B||f||^2, \qquad f \in H$$

بزرگترین مقدار A، $\frac{1}{||U||^2}$ و کوچکترین مقدار B، $||U||^2$ می‌باشد.