وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه تربیت معلم آذربایجان

دانشکده علوم پایه

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض

عنوان :

خاصیت (T) برای C^* ـجبرها

استاد راهنما :

دکتر قربانعلی حقیقت دوست

پژوهشگر :

میثم حبیب زاده فرد

شهریور / ۱۳۸۸

تبریز / ایران

بسم اللّٰه الرّحمن الرّحيم

تقدیم به

پدر و مادر بزرگوارم

تشکر و قدردانی

با استعانت از خداوند متعال که همواره پشتیبان همگان است، بر خود وظیفه می‌دانم تا از تمامی عزیزانی که راهگشای این پروژه بوده‌اند، تشکر و قدردانی نمایم. امید است که سپاس بی‌دریغ اینجانب را بپذیرند.

استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر قربانعلی حقیقت دوست که گنجینه‌های دانش خود را در نهایت صبوری و سخاوت در اختیار اینجانب قرار دادند و مرا در انجام این پروژه همراهی کردند.

دکتر صادقی و دکتر رضاپور که داوری این پروژه را پذیرفتند.

سایر اساتید محترم که در طول دوران تحصیلم افتخار شاگردی ایشان را داشته‌ام.

خانواده عزیزم و به خصوص پدر و مادر بزرگوارم که یاور و مشوق همیشگی من در زندگی و به ویژه در دوران تحصیلاتم بوده‌اند.

برای تمام این عزیزان، سربلندی و موفقیت و سلامتی در تمام مراحل زندگی آرزومندم.

میثم حبیب زاده فرد

فهرست مندرجات

چکیده

نظریه‌ی جبرهای وُن نیومن در یک سری از مقالات توسط موررای و ون نیومن در سال‌های ۱۹۳۰ و ۱۹۴۰ وارد شد. یک جبر ون نیومن، یک زیرجبر یکدار خود الحاقی M از جبر عملگرهای کراندار روی یک فضای هیلبرت است که نسبت به توپولوژی عملگری ضعیف بسته است. بنابر قضیه‌ی جابجاگری دوم وُن نیومن، M نسبت به توپولوژی عملگری ضعیف بسته است اگر و فقط اگر M برابر جابجاگر جابجاگرش است.

C^* ـ جبرها، جبرهای عملگری روی فضای هیلبرت هستند که نسبت به توپولوژی نرمی بسته‌اند. مطالعه‌ی C^* ـ جبرها با کاری از ژلفاند و نایمارک شروع شد که نشان می‌دهد چنین جبرهایی به تنهایی می‌توانند به عنوان $*$ ـ جبرهای باناخ که در پیوستگی روابط جبری نرم و انوُلوشن صدق می کنند، مشخص شوند. همچنین آن‌ها یک نتیجه‌ی اصلی بدست آوردند که یک C^* ـ جبر یکدار جابجایی با جبر توابع پیوسته‌ی با مقدار مختلط روی یک فضای فشرده یکریخت است.

مفهوم انقلابی کاژدان از خاصیت (T) اخیراً (در سال ۲۰۰۶) توسط بکا به زبان C^* برگردانده شده است. یکی از سوالات که توسط مقاله‌ی بکا مطرح شد این است که آیا می‌توان این حقیقت کلاسیک که یک گروه گسسته که هم پیرو است و هم خاصیت (T) دارد، متناهی است، را به زمینه‌ی C^* تعمیم داد یا نه. بدبختانه، موقعیت C^* کاملاً مانند مثال نیست، اما نتیجه‌ی کافی می‌تواند به دست آید.

حال خاصیت (T) یک مفهوم پایه‌ای با دامنه‌ی وسیع‌تری از نظریه‌ی گروه‌ها، هندسه دیفرانسیل، نظریه‌ی ارگودیک، نظریه‌ی پتانسیل، جبرهای عملگری، ترکیبیات، علم کامپیوتر، و نظریه‌ی الگوریتم می‌باشد. آن مستقیماً نشان داده می‌شود که گروه G با این خاصیت به طور فشرده تولید می‌شود و

بزرگترین خارج قسمت آبلی هاوسدورف $G/\overline{[G,G]}$ فشرده است. به ویژه گروه شمارش‌پذیر Γ با خاصیت (T)، متناهیاً تولید شده است و اولین گروه هومولوژی آن $H_1(\gamma, Z) = \gamma/\overline{[\Gamma,\Gamma]}$ متناهی است. در این پایان‌نامه، مفهوم خاصیت (T) برای C^* ـ جبر دلخواه A که یک حالت اثر را می‌پذیرد، تعریف می‌شود. سپس این مفهوم، به یک مفهوم خاصیت (T) برای جفت (A,B) بسط داده می‌شود، که در آن B یک C^* ـ زیرجبر از A است. فرض کنید Γ یک گروه گسسته و $C_r^*(\Gamma)$ جبر کاهشی آن باشد. نشان داده می‌شود که $C_r^*(\Gamma)$ دارای خاصیت (T) است اگر و فقط اگر گروه Γ خاصیت (T) داشته باشد. به طور کلی، بازای هر زیرگروه Λ از Γ، جفت $(C_r^*(\Gamma), C_r^*(\Lambda))$ خاصیت (T) دارد اگر و فقط اگر جفت گروهی (Λ,Γ) خاصیت (T) داشته باشد.

واژه‌های کلیدی: خاصیت (T)، جبر وُن نیومن، C^* ـ جبر کاهشی، C^* ـ جبر ماکسیمال، هیلبرت C^* ـ مدول دوطرفه، هسته‌ای‌سازی، عملگرهای هیلبرت—اشمیت، C^* ـ جبر انژکتیو.

مقدمه

برای فهم بهتر این رساله به اطلاعات مربوط به کتابهایی در زمینه‌های جبرهای عملگری، C^* ـ جبرها، آنالیز تابعی، آنالیز هارمونیک، جبر خطی، جبر پیشرفته، گروه‌های کوانتومی، قسمتهایی از K ـ تئوری و ... نیازمند می‌باشد که خلاصه‌ای از این مطالب به صورت زیر است:

فصل اول، مفاهیم مقدماتی اعم از فضاهای هیلبرت، توپولوژی عملگری ضعیف و توپولوژی عملگری قوی، جبرهای ضربگر، عملگرهای خطی و ماتریس‌ها، مثال‌ها و قضایای مربوطه بیان شده است که از کتابهای آنالیز تابعی، جبرهای عملگری گرفته شده است.

فصل دوم، مفاهیم C^* ـ جبر، خلاصه‌ی نظریه‌ی اندازه، خلاصه‌ی آنالیز هارمونیک، جبر وُن نیومن، مثال‌ها و قضایای مربوطه بیان شده است که از کتابهای آنالیز هارمونیک، C^* ـ جبر و جبرهای عملگری گرفته شده است.

در فصل سوم توابع و هسته‌ها از نوع مثبت و به طور مشروط از نوع منفی، مثال‌ها و ساختارهای GNS مربوطه و در انتها قضیه‌ی شوینبرگ بیان و اثبات می‌شود.

در فصل چهارم خاصیت (T) کاژدان، پیرو بودن و روابط بین آنها، C^* ـ مدول دوطرفه، خاصیت (T) برای C^* ـ جبرها، نگاشت کاملاً مثبت، قضیه‌ی بسط آروسون، مثال‌ها و قضایای مربوطه بیان و اثبات می‌شود. به علاوه نشان داده می‌شود که $C_r^*(\Gamma)$ دارای خاصیت (T) است اگر و فقط اگر گروه Γ خاصیت (T) داشته باشد. به طور کلی، بازای هر زیرگروه Λاز Γ، جفت $(C_r^*(\Gamma), C_r^*(\Lambda))$ خاصیت (T) دارد اگر و فقط اگر جفت گروهی (Λ, Γ) خاصیت (T) داشته باشد.

در فصل پنجم رابطه‌ی بین خاصیت (T) و هسته ای سازی بررسی می‌شود که درک آن نیازمند

دانستن تعاریف و قضایای مربوط به ضرب تانسوری، کلاس $trace$ و عملگرهای هیلبرت اشمیت از آنالیز هارمونیک، C^* ـ جبر انژکتیو و C^* ـ جبر هسته‌ای از جبرهای عملگری و از همه مهم‌تر قضیه‌ی جابجاگری و مثال‌های آن است که در اثبات قضیه‌ی اصلی استفاده می‌شود.

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

۱.۱ فضاهای هیلبرت

فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای برداری است.

تعریف ۱.۱.۱ یک ضرب داخلی روی $\mathcal{H}$ نگاشتی است مانند $\langle .,. \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathcal{C}$ به طوری که دارای خواص زیر باشد،

۱) $\langle x,y \rangle = \overline{\langle y,x \rangle}$؛

۲) $\langle x+y,z \rangle = \langle x,z \rangle + \langle y,z \rangle$ و $\langle x,y+z \rangle = \langle x,y \rangle + \langle x,z \rangle$؛

۳) $\langle \alpha x,y \rangle = \alpha \langle x,y \rangle$ و $\langle x,\alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x,y \rangle$؛

۴) $\langle x,x \rangle \geq 0$، $\langle x,x \rangle = 0$ اگروفقط اگر $x = 0$.

تعریف ۲.۱.۱ فضای برداری $\mathcal{H}$ با ضرب داخلی فوق را فضای هیلبرت می‌نامیم هرگاه نسبت به نرم $\|x\| = \langle x,x \rangle^{1/2}$ کامل باشد.

مثال ۱.۱.۱ میدان اعداد مختلط با ضرب داخلی $\langle x,y\rangle := x\overline{y}$، یک فضای هیلبرت ۱ بعدی است.

مثال ۲.۱.۱ فرض کنیم G یک گروه گسسته باشد. آنگاه فضاهای برداری
$\ell^{2}(G)=\{f:G\to C;\sum_{g\in G}|f(g)|^{2}<\infty\}$ و $L^{2}(G)=\{f:G\to C;\int_{G}|f(g)|^{2}dg<\infty\}$
به ترتیب با ضرب های داخلی $\langle f,h\rangle := \sum_{g\in G}f(g)\overline{h(g)}$ و $\langle f,h\rangle := \int_{G}f(g)\overline{h(g)}dg$، دو فضای هیلبرت می‌باشند.

تعریف ۳.۱.۱ یک نیم نرم روی یک فضای برداری X، یعنی یک تابع $p:X\to\mathcal{R}$ که برای هر $x,y\in X$ و هر $\alpha\in\mathcal{C}$ خواص زیر برقرار باشند:

۱) $p(x+y)\leq p(x)+p(y)$؛

۲) $p(\alpha x)=|\alpha|p(x)$.

در این حالت به (X,p) یک فضای نیم نرم دار می‌گوییم.

اگر (X,p) یک فضای نیم نرم دار باشد، آن‌گاه برای هر $x,y\in X$، $p(x)\geq 0$ و

$$|p(x)-p(y)|\leq p(x+y)\ .$$

تعریف ۴.۱.۱ کامل شده‌ی یک فضای نیم نرم دار (X,p)، یک فضای نیم نرم دار کامل (Y,q) به همراه یک نگاشت خطی و ۱−۱ $T:X\to Y$ می‌باشد که دارای خواص زیر است:

۱) $img(T)$ در Y چگال است؛

۲) T حافظ نیم نرم ها است. یعنی برای همه‌ی $x\in Y$، $p(x)=q(T(x))$.

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنید X یک فضای باناخ باشد. یک تابع φ از X به $\mathbb{C}$، یک تابعک خطی کراندار است اگر:

۱) برای همه‌ی f_1, f_2 در X و λ_1, λ_2 در $\mathbb{C}$، $\varphi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1\varphi(f_1) + \lambda_2\varphi(f_2)$؛ و

۲) وجود دارد یک M به طوری که برای هر f در X، $|\varphi(f)| \leq M\|f\|$.

قضیه ۱.۱.۱ **(هان باناخ)** فرض کنید Y یک زیرفضای فضای باناخ X باشد. اگر φ یک تابعک خطی کراندار روی Y باشد، آن‌گاه یک Φ در X^* وجود دارد به طوری که برای f در Y، $\Phi(f) = \varphi(f)$ و $\|\Phi\| = \|\varphi\|$.

نتیجه ۱.۱.۱ فرض کنید X یک فضای برداری است و $\widehat{X}$ کامل شده‌ی X است. فرض کنید $f : X \to \mathbb{R}$ یک تابعک خطی کراندار باشد، آن‌گاه f را می‌توان به $\widehat{X}$ توسیع داد.

۱.۱.۱ مجموعه‌های جهت دار و تورها

فرض کنید X یک فضای توپولوژی باشد.
یک مجموعه‌ی جهت دار A، یک مجموعه‌ی مرتب جزیی با این خاصیت است که برای هر جفت α و β در A، وجود دارد γ در A به طوری که $\alpha \geq \gamma$ و $\beta \geq \gamma$. یک تور، یک تابع $A \to X$، $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$ است. یک تور $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha\in A}$ به λ در X همگرا است اگر برای هر همسایگی U از از λ، وجود دارد α_U در A به طوری که برای $\alpha \geq \alpha_U$، λ_α در U است.

تعریف ۶.۱.۱ یک تور $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ در فضای باناخ X کوشی است اگر برای هر $\epsilon > 0$، وجود دارد α_0 در A به طوری که $\alpha_1, \alpha_2 \geq \alpha_0$ نتیجه دهد $\|f_{\alpha_1} - f_{\alpha_2}\| < \epsilon$.

۲.۱ توپولوژی عملگری ضعیف و توپولوژی عملگری قوی

فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت باشد.

تعریف ۱.۲.۱ توپولوژی موضعاً محدب تولید شده توسط مجموعه‌ی

$$\mathcal{F}= \{p_{\xi,\eta} =\mathcal{B}(\mathcal{H})\to \mathbb{C}; p_{\xi,\eta}(T) = \langle T\xi, \eta\rangle, \xi, \eta \in \mathcal{H}\}$$

را توپولوژی عملگری ضعیف نامیده و با $w.o.t$ نشان می‌دهیم. به این‌صورت که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $\xi_i, \eta_i \in \mathcal{H}$ و $r_i \in \mathbb{R}$ و $i = ۱, ۲, ..., n$، یک همسایگی از $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ به‌صورت

$$N(T, n, r_i, \xi_i, \eta_i) = \bigcap_{i=۱}^{n} \{T' \in \mathcal{B}(\mathcal{H}); |p_{\xi,\eta}(T - T')| \leq r_i\}.$$

تعریف می شود که پایه های این توپولوژی را تشکیل می دهند.

می‌گوییم $U \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ باز است، هرگاه برای هر $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$، یک $n \in \mathbb{N}$ و $\xi_i, \eta_i \in \mathcal{H}$ و $r_i \in \mathbb{R}$ برای $i = ۱, ۲, ..., n$ موجود باشند به طوری که $N(T, n, r_i, \xi_i, \eta_i) \subset U$.

برای هاوسدورف بودن، کافی است نشان دهیم

$$\forall\ T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \quad \exists\ \xi, \eta \in \mathcal{H}\ :\quad p_{\xi,\eta}(T) \neq ۰.$$

فرض کنیم $\{T_i\}_{i\in I}$ یک تور از $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ باشد. آن‌گاه گوییم $\{T_i\}_{i\in I}$ به طور ضعیف به $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ همگراست اگر و فقط اگر برای همه‌ی $\xi, \eta \in \mathcal{H}$، $\{p_{\xi,\eta}(T_i)\}_{i\in I}$ به $p_{\xi,\eta}(T)$ همگرا باشد.

تعریف ۲.۲.۱ توپولوژی موضعاً محدب تولید شده با مجموعه‌ی

$$\mathcal{F}= \{p_\xi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to\mathbb{R}; p_\xi(T) = ||T(\xi)||_{\mathcal{H}},\xi \in \mathcal{H}\}$$

از نیم نرم ها را توپولوژی عملگری قوی نامیده و با $s.o.t$ نشان می‌دهیم. به این صورت که یک همسایگی حول $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ و به شعاع $r \in \mathbb{R}$ به صورت

$$N_r(T) = \{T' \in \mathcal{B}(\mathcal{H}); p_\xi(T - T') \leq r, \xi \in \mathcal{H}\}$$

تعریف می شود که پایه‌های این توپولوژی را تشکیل می دهند.

می گوییم $\mathcal{U} \subset\mathcal{B}(\mathcal{H})$ باز است اگر برای هر $T \in \mathcal{U}$، وجود دارد یک $r > ۰$ به طوری که $Nr(T) \subset \mathcal{U}$.

برای هاوسدورف بودن، کافی است نشان دهیم:

$$\forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \ \ \exists \xi \in \mathcal{H} \ \ ; p_\xi(T) \neq \circ.$$

اگر $\{T_i\}_{i\in I}$ یک تور از $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ باشد. آن‌گاه می گوییم: $\{T_i\}_{i\in I}$ به طور قوی به $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ همگرا است اگر و فقط اگر $\{p_\xi(T_i)\}_{i\in I}$ به $p_\xi(T)$ همگرا است و برای همه‌ی $\xi \in \mathcal{H}$.

۳.۱ جبرهای ضربگر

تعریف ۱.۳.۱ فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باشد.

(i) یک ضربگر چپ از $\mathcal{A}$، یعنی یک نگاشت خطی $L : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ به طوری که برای هر $a, b \in \mathcal{A}$ داریم:

$$L(ab) := L(a)b$$

(ii) یک ضربگر راست از $\mathcal{A}$، یعنی یک نگاشت خطی $R : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ به طوری که برای هر $a, b \in \mathcal{A}$ داریم:

$$R(ab) := aR(b)$$

(iii) یک ضربگر از $\mathcal{A}$، یعنی یک جفت (L, R) از یک ضربگر چپ و یک ضربگر راست به طوری که برای همه‌ی $a, b \in \mathcal{A}$ داریم:

$$R(a)b = aL(b)$$

$L(\mathcal{A})$ و $R(\mathcal{A})$ را به‌ترتیب به‌عنوان مجموعه‌ی ضربگرهای چپ و مجموعه‌ی ضربگرهای راست $\mathcal{A}$ و $M(\mathcal{A})$ را نیز به‌عنوان مجموعه‌ی ضربگرهای $\mathcal{A}$ می‌شناسیم. $M(\mathcal{A})$ با تعریف فوق، یک جبر یکدار است و یکه آن هم (id, id) می‌باشد.

نمادگذاری ۱.۳.۱ اگر $x \in L(\mathcal{A})$ باشد، آن‌گاه برای هر $a \in \mathcal{A}$ می نویسیم: $xa := x(a)$ و اگر $x \in R(\mathcal{A})$ باشد، آن‌گاه برای هر $a \in \mathcal{A}$ می نویسیم: $ax := x(a)$ و در حالت کلی اگر $x = (L, R) \in M(\mathcal{A})$ باشد، آن‌گاه برای هر $a \in \mathcal{A}$ می نویسیم: $ax := R(a)$ و $xa := L(a)$.

فرض کنیم $a \in \mathcal{A}$ و $x, y \in M(\mathcal{A})$ باشد. داریم:

(i) $(x+y)a := xa + ya$ و $a(x+y) := ax + ay$؛

(ii) $(xy)a := x(ya)$ و $a(xy) := (ax)y$.

تعریف ۲.۳.۱ فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر و $a, b \in \mathcal{A}$ باشد. می‌گوییم جبر $\mathcal{A}$ ناتباهیده است اگر برای هر $a \in \mathcal{A}$، $ab = 0$ نتیجه دهد $b = 0$ و برای هر $b \in \mathcal{A}$، $ab = 0$ نتیجه دهد $a = 0$.

لم ۱.۳.۱ فرض کنیم A یک جبر ناتباهیده باشد، آن‌گاه $\mathcal{A}$ در $M(\mathcal{A})$ نشانده می‌شود.

برهان. برای هر $a \in \mathcal{A}$ نگاشت های L_a و R_a را به ترتیب با ضابطه‌های $L_a(b) := ab$ و $R_a(b) := ba$ تعریف می‌کنیم. نگاشت $\varphi : \mathcal{A} \to M(\mathcal{A})$ با ضابطه‌ی $\varphi(a) = (L_a, R_a)$، ۱—۱ است. چون اگر $L_a = L_b$ پس برای هر $c \in \mathcal{A}$ داریم $(a-b)c = 0$ و چون $\mathcal{A}$ ناتباهیده است پس $a = b$. ■

تذکر ۱.۳.۱ اگر جبر $\mathcal{A}$ یکدار باشد، آن‌گاه $\mathcal{A}$ به طور اتوماتیک ناتباهیده است. چون اگر فرض کنیم $a \in \mathcal{A}$ و برای هر $b \in \mathcal{A}$، $ab = 0$ باشد، آن‌گاه $a = a1 = 0$.

لم ۲.۳.۱ اگر جبر $\mathcal{A}$ یکدار باشد آن‌گاه $\mathcal{A} = L(\mathcal{A}) = R(\mathcal{A}) = M(\mathcal{A})$.

برهان. نگاشت φ در لم بالا پوشا است، فرض کنیم $(L,R) \in M(\mathcal{A})$. قرار می‌دهیم $a = L(۱) = R(۱)$. ادعا می کنیم که $R_a = R$ و $L_a = L$ چون اگر $b \in \mathcal{A}$ باشد پس:

$$L_a(b) = ab = L(۱)b = L(۱b) = L(b)$$

$$R_a(b) = ba = bR(۱) = R(b۱) = R(b)$$

■

۴.۱ عملگرهای خطی و ماتریس ها

فرض کنید $\mathcal{L}(\mathcal{V},\mathcal{W})$ فضای همه‌ی عملگرهای خطی از فضای برداری $\mathcal{V}$ به فضای برداری $\mathcal{W}$ باشد.

تعریف ۱.۴.۱ فرض کنید $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ ، و فرض کنید $E = (e_۱, ..., e_n)$ یک پایه‌ی متعامد از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ و $F = (f_۱, ..., f_m)$ یک پایه‌ی متعامد از فضای هیلبرت $\mathcal{K}$ باشد. آن‌گاه، درایه‌ی (i,j) ـ ام ماتریس A وابسته به این پایه‌ها، $a_{ij} = f_i^* A e_j = \langle f_i, Ae_j \rangle$ است. پیشنهاد می شود بگوییم که ماتریس A وابسته به این پایه‌ها، F^*AE است.

فرض کنید $\mathcal{M}$ یک فضای هیلبرت دیگر با پایه‌ی متعامد $G = (g_۱, ..., g_p)$ باشد. فرض کنید $B \in \mathcal{L}(\mathcal{K},\mathcal{M})$. آن‌گاه ماتریس $B.A$ وابسته به پایه‌های E و G، یعنی $G^*(B.A)E$، برابر ماتریس B وابسته به پایه‌های F و G، یعنی G^*BF، ضرب در ماتریس A وابسته به پایه‌های E و F، یعنی F^*AE، است. به عبارتی

$$G^*(B.A)E = (G^*BF)(\ F^*AE)\ .$$

تعریف ۲.۴.۱ فرض کنید $\mathcal{H}$ و $\mathcal{K}$ دو فضای هیلبرت باشند. آن‌گاه الحاق یک عملگر $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{K})$، عملگر یکتای $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{K},\mathcal{H})$ است که برای همه‌ی $x \in \mathcal{H}$ و $z \in \mathcal{K}$ در رابطه‌ی زیر صدق می کند.

$$\langle z, Tx\rangle_{\mathcal{K}} = \langle T^*z, x\rangle_{\mathcal{H}}$$

عملگر $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ خود الحاقی یا هرمیتی است اگر $T = T^*$ ، خود الحاقی متنافر[۱] یا هرمیتی کج[۲] است اگر $T = -T^*$، یکانی است اگر $TT^* = I = T^*T$ ونرمال است اگر $TT^* = T^*T$ باشد.

قضیه ۱.۴.۱ فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت باشد، داریم:

(i) اگر $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ آن‌گاه $(T^*)^* = T$،

(ii) اگر $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ آن‌گاه $\|T^*\| = \|T\|$،

(iii) اگر $\alpha \in K$ و $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ آنگاه $(\alpha T)^* = \overline{\alpha}T^*$،

(iv) اگر $S,T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ آن‌گاه $(S+T)^* = S^* + T^*$،

(v) اگر $S,T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ آن‌گاه $(ST)^* = T^*S^*$.

تذکر ۱.۴.۱ اگر $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ معکوس‌پذیر باشد آن‌گاه T^* معکوس‌پذیر است و $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. هر عملگر می‌تواند به صورت مجموع یک عملگر خودالحاقی و یک عملگر خودالحاقی متنافر نوشته شود. عملگر خطی و کراندار $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ یک پروژکشن نامیده می‌شود هرگاه $P = P^*$ و $P^2 = P$. می‌توان نشان داد که نرم هر پروژکشن تقریباً برابر ۱ است.

تذکر ۲.۴.۱ نرم یک عملگر P به صورت $\|P\| := sup_{||x||\leq 1}\{P(x)\}$ تعریف می‌شود.

---

[۱] skew selfadjoint

[۲] skew hermitian