دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده مهندسی عمران

بررسی کمانش ورق‌های با خواص ناهمسان در ضخامت نسبتاً ضخیم تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی

پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی عمران- سازه

وجیهه السادات فدکی

استاد راهنما

دکتر مجتبی ازهری

زمستان ۱۳۸۹

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فهرست مطالب

چکیده

فصل اول: مقدمه و کلیات

۱-۱-مقدمه.....۲

۱-۲-تاریخچه.....۵

۱-۳-کمانش ورق.....۹

۱-۴-روش‌های تحلیل کمانش ورق.....۱۲

۱-۴-۱- روش تعادل.....۱۲

۱-۴-۲- روش‌های انرژی.....۱۲

۱-۴-۲- روش دینامیکی ۱۲

۱-۵-انواع کمانش.....۱۳

۱-۶-کمانش حرارتی.....۱۴

۱-۷-اهداف رساله و شرح مسئله.....۱۵

۱-۸- محتوای فصول بعدی.....۱۵

فصل دوم: آشنایی با مواد ناهمسان در ضخامت

۲-۱- مقدمه.....۱۶

۲-۲- مواد مرکب ۱۷

۲-۳- تعریف مواد با ساختار ناهمسان در ضخامت.....۱۸

۲-۴- مروری بر کاربرد FGM ها.....۲۰

۲-۵- روش‌های ساخت و تولید ۲۰

۲-۶- مدل‌سازی FGM ۲۱

۲-۷-مطالعات علمی انجام شده در زمینه ورق‌هایFGM.....۲۳

فصل سوم: تئوری‌های حاکم بر ورق

۳-۱- مقدمه ۲۶

۳-۲- تئوری حاکم بر رفتار ورق نازک ۲۶

۳-۳-تئوری برشی مرتبه اول ۳۰

۳-۳-۱- مقدمه‌ای بر تئوری برشی مرتبه اول ۳۰

۳-۳-۲- روابط سینماتیک ۳۰

۳-۴- تئوری برشی مرتبه سوم ورق.....۳۳

۳-۴-۱- مقدمه‌ای بر تئوری برشی مرتبه سوم ۳۳
۳-۴-۲- میدان جابجایی..... ۳۳
۳-۴-۳- روابط کرنش جابجایی..... ۳۴
فصل چهارم: روش‌های حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر ورق
۴-۱-مقدمه..... ۳۹
۴-۲-روش انرژی و روش‌های تغییراتی..... ۳۹
۴-۳-روش ریتز..... ۴۱
۴-۴-روش گالرکین..... ۴۱
۴-۵-روش‌های حل عددی..... ۴۲
۴-۶-روش اجزاء محدود..... ۴۲
۴-۷-روش نوارمحدود کلاسیک..... ۴۲
۴-۷-۱- مقدمه و مفاهیم پایه ۴۲
۴-۷-۲- توابع جابجایی ۴۳
۴-۷-۳- توابع پایه جهت طولی..... ۴۴
۴-۷-۴- توابع شکل جهت عرضی..... ۴۴
۴-۷-۵- فرمول‌بندی روش ۴۵
۴-۸-روش نوارمحدود ورق ضخیم..... ۴۷
۴-۸-۱-مقدمه..... ۴۷
۴-۸-۲-فرمول‌بندی روش..... ۴۸
۴-۹-روابط حاکم بر کمانش ورق FGM..... ۴۹
فصل پنجم: کمانش ورق FGM تحت بارهای مکانیکی
۵-۱- مقدمه..... ۵۴
۵-۲- خصوصیات ورق..... ۵۴
۵-۳- ارزیابی صحت نتایج..... ۵۵
۵-۴- اثر تعداد نوار..... ۵۸
۵-۵- بارگذاری دوطرفه..... ۶۱
۵-۵-۱- اثر ابعاد ورق..... ۶۱
۵-۵-۲- اثر ضخامت ورق..... ۶۳
۵-۵-۳- اثر مدول حجمی و شرایط تکیه‌گاهی..... ۶۵
۵-۶- بارگذاری یکطرفه..... ۶۶
۵-۷- اثر مود کمانشی..... ۷۰

فصل ششم: کمانش حرارتی ورق FGM مستطیلی

۶-۱- مقدمه ۷۲

۶-۲- روش حل ۷۲

۶-۳- آنالیز پیش از کمانش ۷۳

۶-۴- آنالیز کمانش ۷۵

۶-۵- ارزیابی صحت نتایج ۷۵

۶-۶- حرارت یکنواخت در ضخامت ورق ۷۶

۶-۶-۱- اثر تعداد نوار ۷۸

۶-۶-۲- اثر ابعاد ورق ۷۹

۶-۶-۳- اثر ضخامت ورق ۸۱

۶-۶-۴- اثر توان مدول حجمی سرامیک و شرایط تکیه‌گاهی ۸۳

۶-۷- ورق تحت حرارت با تغییرات خطی در ضخامت ۸۴

۶-۷-۱- اثر تعداد نوار ۸۵

۶-۷-۲- اثر ابعاد ورق ۸۶

۶-۷-۳- اثر ضخامت ورق ۸۸

۶-۸- مقایسه حرارت یکنواخت و خطی ۹۰

۶-۹- توزیع واقعی حرارت در ضخامت ورق ۹۰

فصل هفتم: نتایج و پیشنهادات

۷-۱- مقدمه ۹۲

۷-۲- نتایج ۹۳

۷-۳- پیشنهادات ۹۳

پیوست ۱ ..... ۹۵

پیوست ۲ ..... ۹۶

مراجع ۹۷

چکیده

در سال‌های اخیر با پیشرفت علم و تکنولوژی، استفاده از ورق به عنوان عضوی سازه‌ای اجتناب‌ناپذیر می‌باشد. با توسعه موتورهای پرقدرت صنایع هوافضا، توربین‌ها، راکتورها، محفظه‌های احتراق و سایر ماشین‌هایی که در معرض حرارت بالا قرار می‌گیرند، نیاز به موادی با مقاومت حرارتی بالا احساس شد. بدین منظور کامپوزیت‌ها ساخته شدند. این مواد با وجود ویژگی‌های مثبت فراوان، دارای نقاط ضعفی از قبیل لایه-لایه شدن، ایجاد حفره و ترک بودند. مواد با ساختار ناهمسان در ضخامت (FGMs) که اکثراً از ترکیب سرامیک و فولاد ساخته می‌شوند، جهت کاهش معایب کامپوزیت‌ها طراحی شدند.

در مطالعه حاضرکمانش ورق های FGM نسبتاً ضخیم تحت بارهای مکانیکی و حرارتی ارائه شده است. در ورق های با خواص ناهمسان در ضخامت، ویژگی‌های ماده به صورت تدریجی و پیوسته در ضخامت تغییر می‌کند، در صورتیکه ضریب پواسون در ضخامت ورق یکسان فرض می شود. در این مطالعه از تئوری برشی مرتبه سوم استفاده شده است. با استفاده از روش نوار محدود و با به کارگیری روش انرژی، مسئله کمانش ورق به یک مسئله مقادیر ویژه تبدیل خواهد شد. ورق مورد بررسی در راستای طولی دارای تکیه‌گاه‌های مفصلی است، در حالیکه شرایط مرزی کناری ورق می‌تواند دلخواه باشد. نتایج بدست آمده با نتایج حاصل از حل کمانش ورق بر مبنای تئوری کلاسیک و برشی مرتبه سوم مقایسه شده است. پس از آن اثر عوامل گوناگون بر بار و دمای بحرانی کمانش ورق FGM در قالب جداول و نمودارهایی ارائه شده است. نتایج حاصل نشان می‌دهد که تئوری برشی مرتبه سوم رفتار ورق FGM را به خوبی پیش‌بینی می‌کند. در حالیکه با استفاده از تئوری کلاسیک برای بار کمانشی و دمای بحرانی کمانش ورق مقادیری بیش از مقادیر واقعی بدست می‌آید.

کلمات کلیدی: کمانش حرارتی، ورق ضخیم، روش نوار محدود، تئوری برشی مرتبه سوم.

فصل اول
مقدمه و کلیات

۱-۱- مقدمه

ورق ها اجزای سازه ای مسطح دوبعدی هستند که در آن، بعد ضخامت نسبت به سایر ابعاد بسیار کوچک‌تر است و از لحاظ هندسی توسط خطوط و یا منحنی هایی به نام مرز ورق محصور می شوند. ورق ها نه تنها می توانند به عنوان عضوی از سازه به کار روند بلکه کل سازه می تواند توسط ورق ساخته شود، مانند عرشه پل. ورق ها از لحاظ شرایط مرزی می‌توانند دارای لبه‌های آزاد، مفصلی، گیردار، تکیه‌گاه الاستیک و یا تکیه‌گاه نقطه‌ای باشند. بارهای استاتیکی و دینامیکی که عمدتاً به صورت عمود بر سطح صفحه اعمال می شوند، در ورق لنگر خمشی، لنگر پیچشی و نیروهای برشی عرضی بوجود می‌آورند. از آنجایی که عمل حمل بار توسط ورق تا حد زیادی مشابه این عمل در تیرها می‌باشد، رفتار ورق‌ها را می توان با توجه به رفتار تیرها پیش‌بینی کرد. با وجود چنین تشابهی، تحلیل ورق به صورت سازه ای یک بعدی منجر به پاسخی نادرست می‌شود، لذا لازم است در حل مسائل ورق از مدل‌های دوبعدی استفاده کنیم. عملکرد دوبعدی صفحات، سازه‌ای سبک‌تر پدید می‌آورد، لذا کاربرد این اعضا از لحاظ اقتصادی مقرون به صرفه می-باشد. به علاوه نیاز فراوان به اجزایی با شکل هندسی خاص و قابلیت شکل‌پذیری ورق، قلمروی استفاده از این اجزای سازه‌ای را بسیار وسیع نموده‌است. بسیاری از اعضای سازه‌ای مانند دال‌ها، فونداسیون‌ها، عرشهٔ پل و دیوارهای حائل نازک در رده‌بندی ورق‌ها قرار می‌گیرند. همچنین استفاده از ورق در سازه‌هایی چون کشتی، صنایع فضایی و خودروسازی غیرقابل اجتناب می‌باشد. به عنوان مثال بال‌ها و بدنهٔ سفینهٔ فضایی از ورق‌هایی با انحنای کم ساخته می-شوند. این ورق‌ها توسط سخت‌کننده‌ها[1] تقویت می‌شود. بدنه و عرشهٔ کشتی نمونه‌هایی دیگر از موارد کاربرد ورق‌های تقویت شده توسط سخت‌کننده می‌باشد.

[1] Stiffeners

اکثر مسائل ورق توسط تئوری‌های الاستیسیته حاکم بر رفتار ورق تحلیل می‌شود. حل دقیق معادلات دیفرانسیل حاکم بر ورق تنها برای شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری خاصی امکان‌پذیر است. در اغلب موارد روش‌های انرژی راه حل‌های تحلیلی کارآمدی برای مسائل ورق ارائه می‌دهد. امروزه با گسترش کاربرد رایانه، به کارگیری روش‌های حل عددی اهمیت قابل توجهی یافته‌است، ودر مواردی تنها راه حل مناسب محسوب می‌شود. روش تفاضل محدود و روش المان‌های مرزی از روش گسسته‌سازی[1] ریاضی برای حل مسائل پیچیده بهره می‌گیرند، درحالی‌که روش‌های اجزا-محدود و نوارمحدود متکی بر گسسته‌سازی طبق ملاحظات مهندسی هستند. نتایج بدست آمده توسط روش‌های رایانه-گرا همواره نیاز به کنترل دارد. روش‌های مهندسی می‌توانند برای مراحل اول طراحی به‌کار روند، به این معنی که با این روش‌ها می توان یک تقریب اولیه برای ابعاد ورق به‌دست آورد. به‌علاوه از تمامی روش‌های ذکر شده می‌توان در حل استاتیکی، دینامیکی و پایداری الاستیک ورق‌ها استفاده نمود. هرچند این روش‌ها برمبنای تئوری الاستیسیته هستند محدودیت‌هایی دارند. مهم‌ترین آن عدم ارائه ضریب اطمینان دقیق شکست می‌باشد. به همین دلیل گاه به‌جای استفاده از این شیوه، روش بارنهایی[2] به‌کار می‌رود. به بیان دیگر روش‌های انرژی را می‌توان با استفاده از روش‌های بارنهایی تکمیل کرد.

در تمامی مسائل مهندسی با توجه به پیچیدگی مسئله، هر سازه باید با مدلی ساده‌تر که دربرگیرنده پارامترهای مهم و تاثیرگذار بر پاسخ استاتیکی و دینامیکی سازه است ساده‌سازی شود. در مسائل ورق این روند باید باتوجه به عوامل زیر صورت گیرد:

۱. هندسه ورق و تکیه‌گاه‌های آن،

۲. رفتار و ویژگی‌های مواد تشکیل‌دهنده ورق،

۳. نوع بارهای اعمال شده بر ورق.

تجزیه و تحلیل کاملاً دقیق ورق نیاز به درنظر گرفتن یک مدل سه‌بعدی دارد. اما چنین رویکردی عملی نیست، چراکه حل ریاضی آن پیچیدگی‌های خاص خود را دارد. حتی اگر مسئله قابل حل باشد در بیشتر موارد این کار از لحاظ صرف هزینه و وقت مقرون به صرفه نیست، بنابراین یافتن راهی برای ساده‌سازی رفتار ورق منطقی به نظر می-رسد. از این رو ورق‌ها در چهار گروه رده‌بندی می‌شوند. هر گروه دارای رفتار خاصی است که توسط معادلات حاکم بر ورق قابل پیش‌بینی است. پارامتر مؤثر بر رفتار ورق نسبت ضخامت به عرض آن (h/L) می‌باشد. هرچند نمی‌توان مرز کاملاً مشخصی بین انواع ورق قائل شد، ورق‌ها به گروه‌های زیر تقسیم شده‌اند:

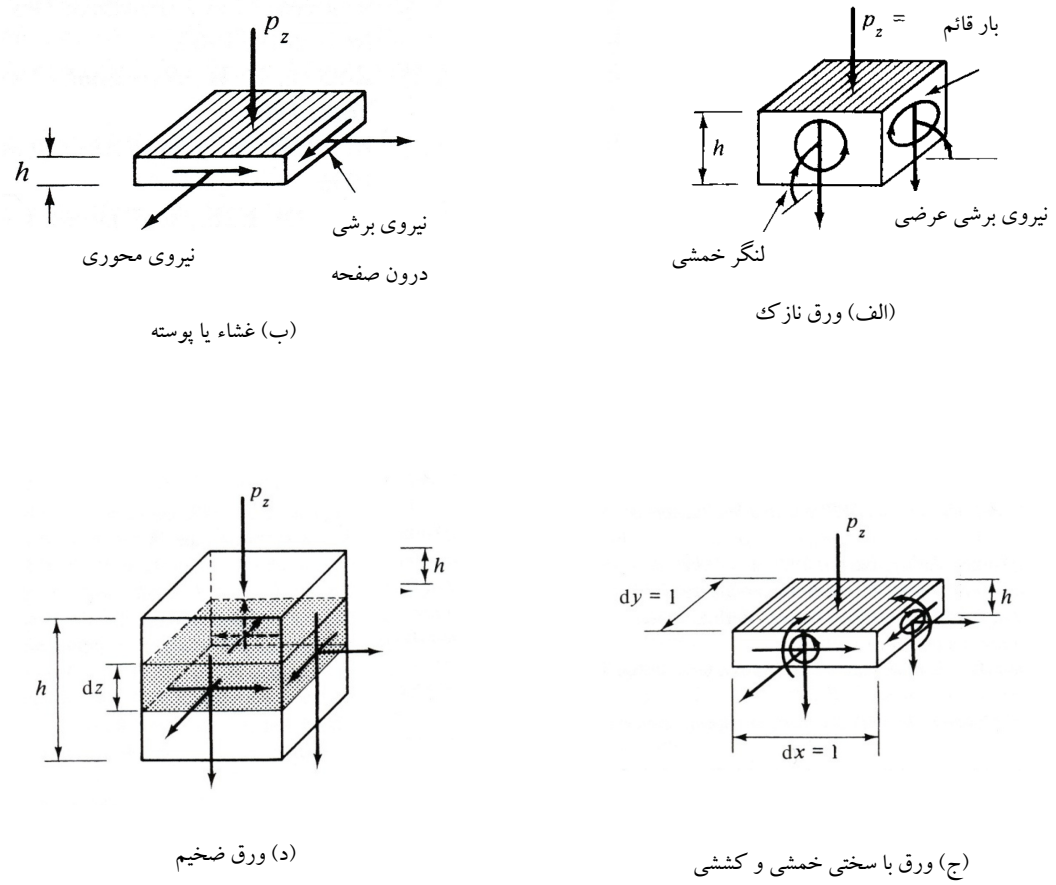
۱. ورق‌های سخت[3] ($h/L=\frac{1}{50}-\frac{1}{10}$) ورق‌های نازک با سختی خمشی هستند که بارهای اعمال شده بر ورق را به صورت دوبعدی توسط لنگرهای خمشی و پیچشی داخلی و برش عرضی منتقل می‌کنند. لذا این گروه از لحاظ عملکرد رفتاری مشابه تیرها دارند. در مسائل مهندسی هرگاه از ورق یاد می‌شود منظور ورق سخت می‌باشد مگر در مواقعی که نوع ورق به‌طور مشخص ذکر شده باشد. شکل ۱-۱ (الف) یک ورق سخت را به همراه نیروهای اعمال شده بر آن نشان می‌دهد.

---

[1] Discretization

[2] Ultimate load technique

[3] Stiffe plates



شکل ۱-۱ انواع ورق همراه با نیروهای داخل صفحه [۱]

۲. غشاءها یا پوسته‌ها[1] ($h/L \le \frac{1}{50}$) ورق‌های بسیار نازکی هستند که هیچ‌گونه عملکرد خمشی ندارند و بار را توسط نیروهای محوری وبرش‌های درون-صفحه‌ای انتقال می‌دهند (شکل ۱-۱ ب). این ورق‌ها را می‌توان مشابه کابل درنظر گرفت. به دلیل نازکی فوق‌العاده زیاد پوسته‌ها از اثرات خمش در این گروه از ورق‌ها می‌توان صرفنظر کرد.

۳. صفحات نسبتاً ضخیم[2] ($h/L = \frac{1}{10} - \frac{1}{5}$) از بسیاری جهات مشابه ورق‌های سخت هستند با این تفاوت که در آن‌ها اثر نیروهای برش عرضی بر تنش قائم محاسبه می‌شود (شکل ۱-۱ ج).

۴. ورق‌های ضخیم[1] ($h/L \ge \frac{1}{5}$). در این‌گروه از ورق‌ها تنش‌های داخلی همانند یک محیط پیوسته سه‌بعدی عمل می‌کند (شکل ۱-۱ د).

[1] Memberanes
[2] Moderately thick plates

لازم به ذکر است که با وجود تمایزی که بین ورق‌های سخت و پوسته‌ها قائل شدیم، درصورتی‌که تغییرشکل-های ورق‌های سخت به مقادیر خاصی محدود نشود، این ورق‌ها نیروهای خارجی را به صورت ترکیبی از لنگر داخلی، برش عرضی، برش درون-صفحه‌ای و نیروهای محوری تحمل می‌کنند، بنابراین تئوری الاستیک بین صفحات با تغییر-شکل‌های کوچک و بزرگ تمایز قائل شده‌است. بنابراین در بسیاری از عرصه‌های مهندسی از به‌کار بردن ورق‌های با تغییرشکل‌های بزرگ[2] اجتناب می‌شود.

تئوری‌های حاکم بر رفتار ورق را می‌توان بر مبنای روابط تنش_کرنش دسته‌بندی کرد.

تئوری‌های الاستیک‌خطی ورق متکی بر رابطه خطی بین تنش و کرنش طبق قانون هوک هستند. درحالی‌که تئوری‌های الاستیک غیر خطی، پلاستیک و ویسکوالاستیک برمبنای روابط تنش_کرنش پیچیده‌تری پدید آمده‌اند. کلیه تئوری‌های یاد شده به استثنای تئوری ویسکوالاستیک با توجه به نوع بار اعمال شده، با دو رویکرد استاتیک و دینامیک عمل می‌کنند.

در ادامه به بیان تاریخچه‌ای بر ورق خواهیم پرداخت.

۱-۲- تاریخچه

با وجودی‌که مصریان دوران باستان، یونانی‌ها و رومی‌ها اولین کسانی بودند که از صفحات ظریف سنگی در ساخت سنگ قبر استفاده می‌کردند، ولی باید بین استفاده از ورق‌ها در زمان باستان و عملکرد آن به عنوان یک عضو سازه‌ای در مهندسی مدرن تفاوت قائل شد.

روند توسعه نظریه‌های حاکم بر ورق و همچنین روش‌های حل آن دارای تاریخچه‌ای جذاب و خواندنی است. درحالی‌که مکانیک سازه‌ها با تحقیقاتی حول مسائل استاتیک پا به عرصهٔ هستی نهاد، اولین مطالعات تحلیلی و تجربی به مسئلهٔ ارتعاشات آزاد ورق پرداخت.

نخستین فرمول‌بندی ریاضی نظریهٔ غشایی ورق‌های نازک برای اولین بار توسط اویلر (۱۷۰۷-۱۷۸۳) در سال ۱۷۶۶ ارائه‌شد [۲]. وی مسئله ارتعاش آزاد پوسته‌های الاستیک مستطیلی، مثلثی و دایره‌ای را با استفاده از دو شبکه از رشته‌های کشیده عمود بر هم مدل‌سازی کرد. پس از اویلر یکی از شاگردانش به‌نام برنولی (۱۷۵۹-۱۷۸۹) با جایگزین کردن رشته‌ها با تیرهایی که تنها دارای صلبیت خمشی بودند راه وی را تداوم بخشید [۳]. برنولی سختی پیچشی تیر را در محاسبات خود منظور نکرد و بین نتایج خود با نتایج آزمایش‌های تجربی تنها توانست به تشابهات کلی دست یابد ولی دقت موردنظر حاصل نشد.

مطالعاتی پیرامون ارتعاش آزاد ورق‌ها توسط یک فیزیکدان آلمانی به نام کلادنی (۱۷۵۶-۱۸۲۷) صورت گرفت. وی در کتاب خود به تشریح آزمایش‌های فراوانی در رابطه با ارتعاش صفحات پرداخت. او مودهای مختلفی برای ارتعاش ورق کشف کرد. وی در آزمایش‌های خود برای معرفی مودهای ارتعاشی از توزیع پودر استفاده می‌کرد. در محل خطوط گرهی در پودر هیچ تغییر مکانی رخ نمی‌داد. به علاوه او توانست فرکانس ارتعاشات را تعیین کند. به دعوت موسسه علوم فرانسه، وی در سال ۱۸۰۹ موفق به ارائه آزمایشات خود و جلب نظر ناپلئون شد. پس از آن موسسه

---

[1] Thick plates

[2] Large deformations

فرانسوی مسابقه‌ای ترتیب داد. همچنین جایزه‌ای برای فردی که یک تئوری برای ارتعاش ورق ارائه دهد به طوری‌که منطبق با آزمایشات تجربی باشد درنظر گرفت. در ابتدا هیچ مقاله‌ای ارسال نشد که منجر به تمدید مهلت ارسال مقالات برای دوبار گشت.

درنهایت در اکتبر ۱۸۱۱ مقاله‌ای از سوفی ژرمن (۱۷۷۶-۱۸۳۱) به موسسه رسید. بنابراین می‌توان از سوفی ژرمن به عنوان فردی که اولین معادله دیفرانسیل ورق را ارائه داد نام برد. وی در سنین جوانی با جدیت به تحصیل ریاضی پرداخت و با ریاضیدانان سرشناس زمان خود همچون لاگرانژ، گوس و لژاندر مکاتباتی داشت. در زمان او با زنان ریاضیدان جدی برخورد نمی‌شد. به همین دلیل وی از نام مستعار لابلنس استفاده می‌کرد. سوفی ژرمین در فرمولی که ارائه داد از مفهوم انرژی کرنشی و کار مجازی بهره برد و معادله‌ای به شکل زیر پیشنهاد نمود:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+\lambda^2\left(\frac{\partial^6 z}{\partial x^4\partial y^2}+\frac{\partial^6 z}{\partial x^2\partial y^4}\right)=0 \qquad (۱-۱)$$

z میان‌صفحه ورق در حال ارتعاش را در دستگاه مختصات دکارتی نشان می‌دهد. t پارامتر زمان است و λ^2 ثابتی است که بیانگر خواص فیزیکی ورق می‌باشد. این مقدار ثابت در مقاله به طور دقیق مشخص نشده‌بود. لاگرانژ به عنوان یکی از داوران به این اشتباهات پی‌برد و فرمول بالا را به صورت زیر اصلاح نمود:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+k^2\left(\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 z}{\partial y^4}\right)=0 \qquad (۱-۲)$$

با وجود این اصلاحات داوران به طور کامل توجیه نشدند و دوباره موضوع فراخوان پذیرش مقالات اعلام شد. در سال ۱۸۱۳ ژرمین تعریفی دقیق از k^2 ارائه داد. پس از آن در سال ۱۸۱۶ معادله دیفرانسیل خود را اصلاح نمود و موفق به کسب جایزه شد، اما نتوانست انتقاد داوران در مورد k^2 را برطرف کند. با این وجود بی‌تردید وی اولین کسی است که توانست معادله دیفرانسیل معتبری در ارتباط با ارتعاش ورق بسط دهد.

سپس ریاضیدانی به نام پواسون (۱۷۸۱-۱۸۴۰) تلاش فراوانی برای یافتن مقدار k^2 با فرض تمرکز ورق در میان-صفحه انجام داد. مطالات وی به نتیجه‌گیری غلط تناسب k^2 با مربع ضخامت ورق انجامید. در سال ۱۸۲۸ پواسون با استفاده از معادلات ناویر، روابط مربوط به ارتعاش جانبی صفحات دایره‌ای را توسعه داد.

در نهایت دانشمند و مهندس معروف، ناویر (۱۷۸۵-۱۸۳۶) با ارائه معادله‌ای کاملاً دقیق برای ورقی که در معرض بار عمودی گسترده $p_z(x,y)$ بود توانست بر شهرت و اعتبار خود بیفزاید. و این مقدمه‌ای شد بر روش‌های ریاضی حل مسائل سازه‌ای. او برای اولین بار توانست برمبنای مطالعات خود فرمولی بیان کند که مؤید تحقیقات پیشینیان باشد. انتشار کتاب او سرآغاز فصل جدیدی بر تحلیل نوین سازه‌ها شد. ناویر از فرض برنولی مبنی بر عمود باقی ماندن صفحات پس از تغییر شکل، بر میان-صفحه ورق استفاده کرد. وی با اعمال روابط تنش_کرنش در محیط دوبعدی، معادله (۱-۳) را تحت بار عمودی $p_z(x,y)$ پیشنهاد نمود:

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)=p_z(x,y) \qquad (۳-۱)$$

D صلبیت خمشی ورق می‌باشد و با مکعب ضخامت ورق متناسب است. $w(x,y)$ بیان‌گر تغییر شکل عمودی میان‌صفحه ورق می‌باشد.

ناویر راه حلی برای ورق مستطیلی با شرایط مرزی ساده‌ارائه داد. وی با استفاده از سری فوریه توانست معادله دیفرانسیل را به یک مسئله جبری تبدیل کند. با کاربرد این روش نتایج درستی برای ورق‌های دارای تکیه‌گاه‌های مفصلی حاصل شد. همچنین او سعی در حل معادله ورق با بارگذاری یکنواخت فشاری در طول لبه‌ها نمود ولی تلاش او در این زمینه حاصلی دربر نداشت.

علوم مهندسی در آلمان هم‌پای علوم در فرانسه پیشرفت می‌نمود. انتشار کتابی از دانشمند آلمانی گوستاوکیرشهف (۱۸۲۴-۱۸۸۷)، همچون کتاب ناویر تأثیر بسزایی بر پیشرفت علوم مهندسی گذاشت. وی نخستین تئوری کامل خمش ورق را توسعه داد و آن را در مقاله‌ای در سال ۱۸۵۰ منتشر نمود. همان‌طور که ذکر شد ناویر با بهره‌گیری از قانون انرژی به بسط معادله دیفرانسیل ورق دست یافت ولی کیرشهف با استفاده از نظریهٔ برنولی توانست همان معادله را استخراج نماید. وی نقش بسزایی در پیشبرد تئوری، در رابطه بامعرفی نیروهای مرزی اضافی ورق ایفا کرد. این نیروها در حقیقت نیروهای برشی معادل لنگرهای پیچشی هستند که در مرزهای ورق اعمال می‌شوند. او توانست شرایط مرزی را به عنوان تابعی از جابجایی و مشتقات آن نسبت به x و y بیان کند. از کیرشهف می‌توان به عنوان بنیان‌گذار تئوری توسعه‌یافته ورق یاد کرد. در این تئوری اثر هم‌زمان خمش و کشش مدنظر قرار می‌گیرد. وی در نظریه تغییر شکل‌های بزرگ ورق نتیجه گرفت که اجزای غیرخطی تغییرشکل قابل چشم‌پوشی نیستند. بسط معادله فرکانس ورق‌ها و معرفی روش تغییرمکان‌های مجازی از دیگر دستاوردهای مهم این دانشمند بزرگ می‌باشد.

سنت ونانت[1] کتاب کیرشهف را به فرانسوی ترجمه کرد و نکات ارزشمندی به آن افزود. پس از آن کتاب دیگری توسط لاو[2] به رشته تحریر درآمد. علاوه بر مقدمه بسیار عالی که لاو ضمن آن به بیان دستاوردهای پیشینیان پرداخت، وی به توسعه تئوری خمش ورق با استفاده از حل دو بعدی مسائل الاستیسیته نائل گردید.

با آغاز قرن نوزدهم سازندگان کشتی تصمیم گرفتند در ساخت بدنه کشتی به جای چوب از صفحات فولادی استفاده کنند. این تغییر ساختار صفحات سازه‌ای فصل نوینی در توسعه نظریه‌های گوناگون ورق بوجود آورد. دانشمندان روس نخستین کسانی بودند که از تئوری الاستیسیته در جایگزینی چوب با ورق فولادی بهره بردند. از میان آن‌ها از کریلاو[3] و بوبانو[4] به عنوان افرادی که کمک شایانی به گسترش روابط ورق‌های دارای صلبیت خمشی کردند می‌توان یاد نمود. به دلیل تفاوت زبان، جهان غرب نتوانست از این پیشرفت‌ها به نحو احسن استفاده کند. در سال ۱۹۱۵، تیموشنکو [۴] نظر دانشمندان غربی را به سوی فعالیت‌های کشور روسیه در زمینه تئوری الاستیسیته معطوف کرد. ثمره

[1] Saint-Venant
[2] Love
[3] Krylov
[4] Boobnov

تلاش‌های بی‌وقفه تیموشنکو حل ورق‌های دایره‌ای با تغییر شکل‌های بزرگ و همچنین فرمول‌بندی پایداری صفحات الاستیک بود.

ون کارمن[1] دانشمند مجارستانی درباره عرض مؤثر وپدیده فراکمانش ورق تحقیقات ارزنده‌ای انجام داد. نودا علاوه بر ارائه راه حل تحلیلی مسائل مختلف مهندسی ورق، از روش تفاضل محدود برای دست‌یابی به نتایج عددی در مواقعی که راه حل‌های تحلیلی کارایی ندارد استفاده کرد [۵].

پیشرفت صنایع نوین هوافضا دریچه‌ای جدید به سمت تحلیل مسائل ورق باز کرد. حل ورق‌هایی که در معرض نیروهای درون-صفحه قرار داشتند، فراکمانش ورق‌ها، ارتعاش صفحات واثرات سخت کننده‌ها از این جمله بود.

مهم‌ترین فرضیه تئوری کلاسیک ورق کیرشهف مبنی بر عمود باقی ماندن صفحات قائم بر میان‌صفحه ورق، پس از تغییر شکل آن است. در این نظریه از تغییر شکل‌های ناشی از برش عرضی چشم‌پوشی شده‌است، بنابراین تئوری تنها در حل ورق‌های نازک کاربرد دارد و در تحلیل ورق‌های ضخیم با شکست مواجه می‌شود. در چنین ورق‌هایی تئوری کیرشهف منجر به ارائه مقادیری کمتر از واقعیت برای تغییرمکان می‌شود. درحالیکه با استفاده از این تئوری، نیروی کمانش و فرکانس ارتعاش بدست آمده بیشتر از مقادیر واقعی می‌باشد.

ریزنر و میندلین [۶] در سال ۱۹۵۴ با توسعه نظریه ورق‌های نسبتاً ضخیم بر مشکلات ناشی از تئوری کلاسیک فائق گشتند. این نظریه تغییرشکل‌های برشی ورق را با توزیعی یکنواخت در ضخامت ورق درنظر می‌گیرد. آن‌ها حل ورق نازک را، با استفاده از فرمول اجزا محدود ارائه دادند. در هر دو تئوری تغییرشکل و چرخش به عنوان دو کمیت مستقل در نظر گرفته شد.

روش تفاضل‌محدود یکی از روش‌های کارآمد در حل مسائل ورق است، به ویژه در مواقعی که استفاده از روش‌های تحلیلی میسر نباشد. در این روش ورق گسسته‌سازی می‌شود. نیاز به حل هم‌زمان معادلات از معایب روش فوق به حساب می‌آید. نودا در سال ۱۹۲۵ این روش را در تحلیل ورق به کار برد. در اوایل دهه ۱۹۴۰ سوتول در انگلیس به احیای روش تفاضل محدود پرداخت. در اواخر دهه ۱۹۴۰ با اختراع کامپیوتر، گرایش مهندسین مکانیک سازه به روش‌های عددی افزایش یافت.

با گذشت زمان، ورق‌ها به عنوان اعضای سازه‌ای کاربرد فراوانی در ساختمان، فضاپیما، کشتی و صنایع خودروسازی پیدا کردند. ولی متاسفانه راه حل‌های دقیق، مربوط به شرایط مرزی و نوع بارگذاری ساده ورق بود.

در سال ۱۹۵۶ تورنر، کلاف، مارتین و تاپ [۷]، روش اجزا محدود را به عنوان روشی کارآمد و اقتصادی در حل مسائل الاستیک و غیر الاستیک پیچیده معرفی کردند. درحالی‌که پیش از آن مبانی این روش در یک مقاله ریاضی با موضوع روش‌های تغییراتی توسط ریاضی‌دانی به نام کورانت[2] بیان شده بود ولی به دلیل عدم ارتباط بین مهندسین و ریاضی‌دانان روش وی به مدت یک دهه مسکوت ماند.

روش نوار محدود نخستین بار در سال ۱۹۷۶ توسط چونگ معرفی شد. این روش، یک روش نیمه تحلیلی برای حل مسائل ورق با هندسه ساده (مستطیل و دایره‌ای) است. توابع ویژه تیر برای بیان تغییرشکل‌های طولی و توابع اجزا

---

[1] Von Karman

[2] Courant

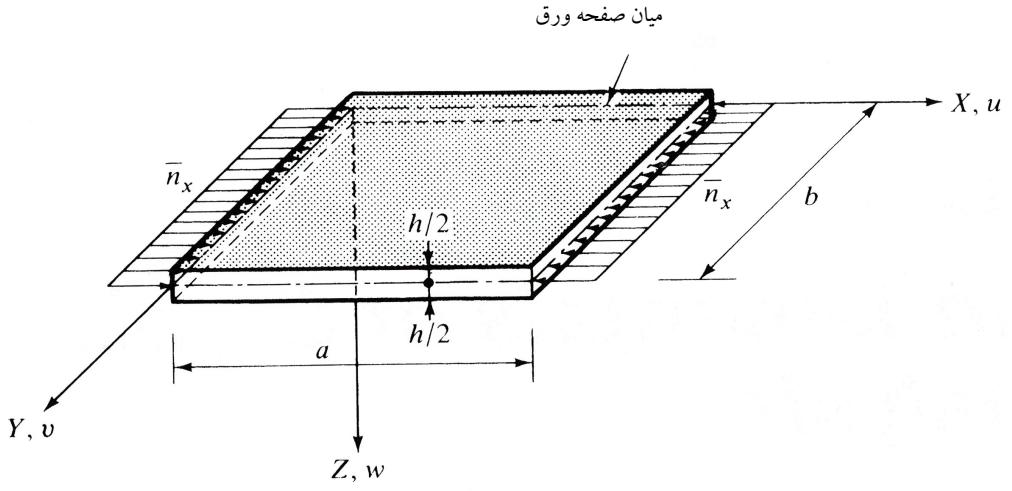
محدود برای بیان تغییرشکل‌های عرضی ورق به کار گرفته می‌شوند. از مزایای این روش کاهش درجات آزادی ورق و به دنبال آن صرفه‌جویی در وقت و هزینه می‌باشد.

درصورتی‌که نیروهای خارجی تنها بر مرزهای ورق اعمال شوند، می‌توان با بهره‌گیری از روش المان‌های مرزی تعداد مجهولات را کاهش داد. در این روش گسسته‌سازی تنها در مرزهای ورق انجام می‌شود و در مقایسه با روش اجزامحدود دارای دقت بیشتری است. ولی متاسفانه روش یاد شده منجر به تولید ماتریس‌های نامتقارن می‌شود، همچنین این روش نیاز به ابزار ریاضی بیشتری دارد. باتوجه به نکات فوق روش المان مرزی به اندازه روش اجزامحدود کارایی ندارد. هرچند در تحلیل عددی بعضی از مسائل ورق، کاربرد ترکیبی از هر دو روش مفید است.

در ادامه به تشریح مسئله کمانش ورق پرداخته می‌شود.

۱-۳- کمانش ورق

صفحات نازک که در سازه‌هایی چون صنایع هوانوردی و کشتی‌رانی به‌کار می‌روند، اغلب در معرض بارهای درون-صفحه فشاری و نیروهای برشی که در صفحه ورق عمل می‌کنند قرار می‌گیرند (شکل ۱-۲). اگر این نیروها کوچک باشند، هیچ‌گونه تغییر مکان خارج از صفحه در ورق ایجاد نمی‌شود $(w=0, u=0, v=0)$. در این حالت می‌گوییم ورق در حالت تعادل پایدار است.



شکل ۱-۲ ورق مستطیلی با بارگذاری فشاری [۱]

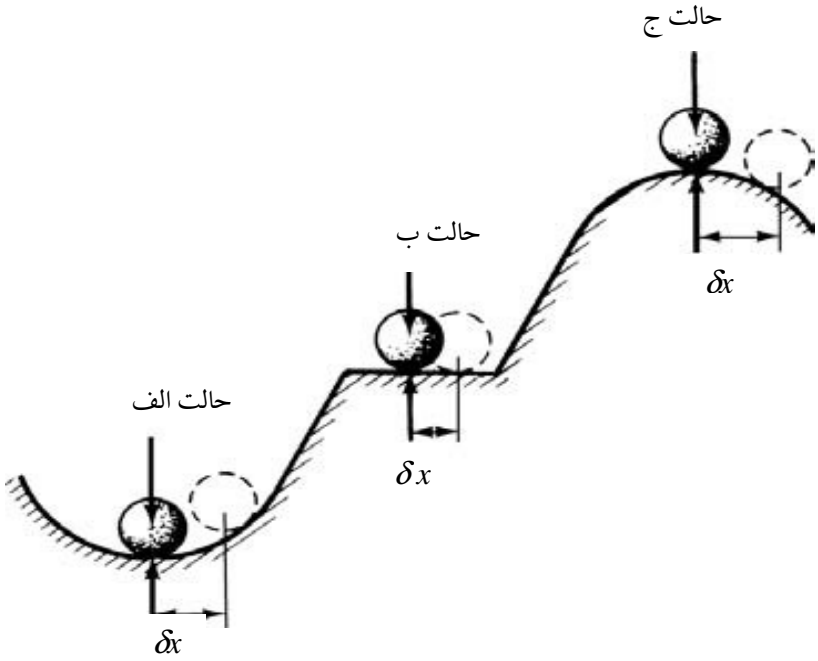
درصورتی‌که بارگذاری ادامه یابد، در مقدار مشخصی از بار در روند تغییر شکل ورق به طور ناگهانی تغییر رخ می‌دهد. تغییرشکل خارج از صفحه ورق همزمان با تغییرشکل درون‌صفحه ورق اتفاق می‌افتد. به این پدیده، کمانش ورق[1] می-

[1] Plate buckling

گویند. باری که در آن کمانش رخ می‌دهد، به عنوان بار بحرانی[1] معرفی می‌شود. اهمیت بار بحرانی از آن جهت است که با افزایش میزان آن، تغییرشکل‌های خارجی بسیار بزرگ در ورق رخ می‌دهد، که درنهایت منجر به گسیختگی کامل ورق خواهد شد. شرایط فوق بسیار خطرناک است و در طراحی سازه‌ها باید از به وقوع پیوستن چنین شرایطی جلوگیری کرد.

مفهوم کمانش ورق با بیان مثال بسیار ساده حالت‌های مختلف تعادل یک گوی صلب قابل لمس خواهدبود.

اگر گوی در یک مکان مقعر قرار گیرد (شکل ۱-۳، حالت الف)، اصطلاحاً در حالت تعادل پایدار است. اگر با ایجاد یک تغییرمکان کوچک به اندازه δx در گوی، تعادل آن به هم بخورد، پس از چند نوسان، گوی به مکان اول خود باز می‌گردد. اگر گوی بر روی مکان مسطحی باشد (شکل ۱-۳، حالت ب)، در حالت تعادل خنثی قرار دارد، به این معنا که با اعمال تغییرمکان کوچک δx، تعادل نیرویی آن برهم نمی‌خورد و در انرژ ی پتانسیل آن

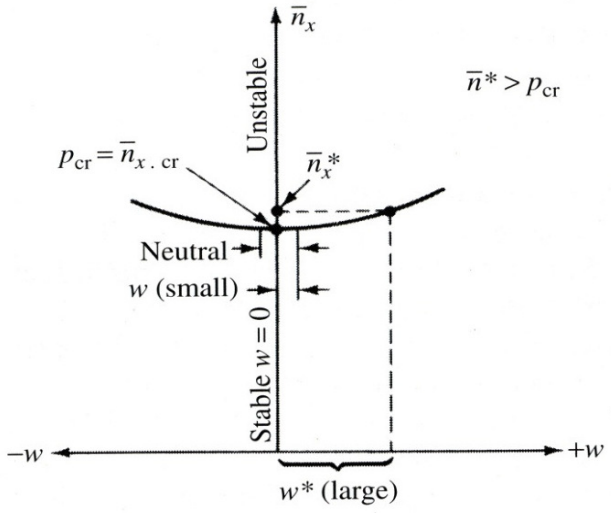


شکل ۱-۳ حالت‌های مختلف تعادل گوی [۱]

تغییری بوجود نمی‌آید. اگر گوی بر روی یک سطح محدب قرار گیرد (شکل ۱-۳، حالت ج)، به اصطلاح در حالت تعادل ناپایدار است. در این صورت، اعمال تغییر مکان کوچک δx باعث برهم خورن تعادل گوی و ناپایداری آن می‌شود. ذکر این نکته بسیار مهم است که در تئوری کلاسیک ورق همواره در مسیر تغییر وضعیت یک سیستم از حالت تعادل پایدار و رسیدن به حالت ناپایدار، تعادل خنثی رخ می‌دهد. تمامی فرمول‌بندی‌های تحلیل مسائل الاستیک خطی مربوط به پایداری ورق برمبنای این فرضیه شکل گرفته‌اند. باوجودی‌که یک ورق دارای درجات آزادی نامحدودی است، باتوجه به مسئله کمانش ورق از تعداد درجات آزادی کمتری می‌توان استفاده کرد.

[1] Critical load

در فرمول‌بندی مسائل الاستیک پایداری، حالت تعادل پایدار به عنوان نقطه دوشاخه‌ای شدن[1] معرفی می‌شود. با رسیدن بار به میزان بحرانی، از بین دو مسیر ممکن تغییر شکل (یکی مربوط به حالت تعادل پایدار، و دیگری در ارتباط با تعادل ناپایدار) ورق همواره دچار کمانش می‌شود (شکل۱-۴). علاوه بر فرض وجود نقطه دوشاخه‌ای، در تحلیل پایداری الاستیک ورق فرض می‌کنیم قانون هوک معتبر است.



شکل ۱-۴ نقطه دوشاخه‌ای شدن [۱]

علاوه بر نظریه کلاسیک کمانش ورق، رفتار ورق‌ها بعد از کمانش نیز حائز اهمیت می‌باشد. تحلیل فراکمانش[2] ورق‌ها به دلیل غیرخطی بودن، یکی از مسائل بسیار پیچیده است. نوع دیگری از رفتار کمانشی مربوط به ورق‌های دارای انحنای کم می‌باشد. چنین ورق‌هایی هرگاه به صورت هم‌زمان در معرض بارهای فشاری درون‌صفحه و بارهای جانبی قرار گیرند، رفتاری به نام کمانش سراسری ناگهانی[3] از خود بروز می‌دهند. ویژگی این رفتار تغییر شکل معکوس ورق به دلیل رابطه غیرخطی بین بار کمانش و تغییر شکل است. در طول یک فرآیند بارگذاری پیوسته، ورق در یک جهت خاص تغییرشکل می‌یابد. با ادامه بارگذاری و رسیدن به یک بار بحرانی ناگهان ورق در جهتی مخالف جهت قبل کمانش می‌یابد.

[1] Bifurcation of the deformation

[2] Post buckling

[3] Snap-through buckling

۱-۴- روش‌های تحلیل کمانش ورق

حل کلاسیک ورق‌ها با استفاده از سه روش قابل حل است:

۱- حل با استفاده از معادلات دیفرانسیل حالت استاتیک،

۲- انواع روش‌های انرژی،

۳- روش‌های دینامیکی.

۱-۴-۱ روش تعادل

در این روش فرض می‌شود ورق کمانش کرده‌است. مهم آن است که معادلات تعادل برای این حالت نوشته شود. بنابراین معادلات تعادل ورق با درنظرگرفتن نیروهای محوری و لنگرهای خمشی به طور هم‌زمان حاصل می‌شود. هنگامی که نیروهای لبه‌ای درون‌صفحه ورق، حتی کمی بیش از حد بحرانی باشند، تغییرشکل خارج از صفحه ورق، w ، مقادیر زیادی اختیار می‌کند. تغییر شکل‌های بزرگ عمودی با افزایش کوچکی در میزان بار درون-صفحه شکل می-گیرد. کمترین باری که به‌ازای آن روند فوق رخ می‌دهد، بار بحرانی نام دارد.

درحالت کلی استفاده از روابط تعادل، منجر به تبدیل مسئله پایداری ورق به یک مسئله مقادیر ویژه می‌شود. برای نیل به چنین هدفی یک مقدار مرجع برای بار بحرانی خارجی ($\overline{n_0}$) را در پارامتر بار، λ ، ضرب می‌کنیم، به نحوی که بار کمانش ورق حاصل ضرب این دو است. قطعاً جملاتی از معادله دیفرانسیل ورق شامل λ خواهند بود. حل معادله دیفرانسیل همگن ورق وبدست آوردن ضرایب ثابت معادله ($C_1, C_2, ..., C_n$) با اعمال شرایط مرزی انجام می‌پذیرد. با مساوی صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب این معادله، چند جمله‌ای معادله مشخصه ورق برحسب λ بدست می‌آید. کوچکترین مقدار ویژه بدست‌آمده برابر با λ_{cr} است. بار بحرانی از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\overline{n_{cr}} = \lambda_{cr} \overline{n_0}$$

حل بدیهی[1] معادله مشخصه ($\lambda = 0$)، بیانگر حالت ورق کمانش نیافته (مسطح) است.

۱-۴-۲ روش‌های انرژی

یکی دیگر از روش‌های حل مسائل ورق، توسعه روابط انرژی می‌باشد. از آن جمله می‌توان از روش ریتز یاد کرد.

همان‌گونه که قبلاً ذکر شد، هرگاه ورق از حالت تعادل پایدار به تعادل ناپایدار برسد، الزاماً تجربه‌ای از حالت تعادل خنثی نیز خواهد داشت. طبق اصل پایستگی انرژی، در حالت تعادل خنثی، ورق مسطح به یک ورق خمیده تبدیل می‌شود، بدون اینکه انرژی از دست بدهد یا انرژی جذب کند.

۱-۴-۳ روش دینامیکی

مسئله کمانش ورق را با استفاده از روش‌های دینامیکی می‌توان فرمول‌بندی کرد. با استفاده از شکل(۱-۴) مفاهیم این روش را می‌توان توضیح داد. واضح است که در حالت تعادل پایدار، با اعمال یک نوسان کوچک، سیستم به حالت

[1] Trivial solution

اولیه خود باز می‌گردد. اگر سیستم در حال تعادل ناپایدار باشد، پس از ایجاد تغییر مکانی هرچند جزئی، سیستم هیچ گاه به حالت اولیه خود باز نمی‌گردد. بلکه تغییرمکانی کوچک منجر به تغییرشکل‌های بزرگ می‌شود.

در تنظیم معادله دیفرانسیل ورق، اثرات نیروهای فشاری درون-صفحه باید مدنظر قرار گیرد. لذا معادله حرکت شامل ضریب بار، λ، خواهد بود. کوچکترین مقدار λ که منجر به تغییرشکل‌های عمودی شود، به عنوان ضریب بار بحرانی شناخته می‌شود [۱].

روشی جایگزین برای حل دینامیکی مسائل پایداری ورق با مقایسه معادلات دیفرانسیل کمانش و ارتعاش ورق بدست می‌آید. اگر شکل کمانش یافته ورق و مود ارتعاش آزاد یکی باشد، بار بحرانی و کوچکترین فرکانس طبیعی ارتعاش تحت شرایط یکسانی به وقوع می‌پیوندد. این دو، فقط در یک مقدار ثابت اختلاف دارند. مقداری که از مقایسه دو معادله قابل استخراج است.

تحقیقات پیرامون پایداری دینامیکی ورق‌ها می‌تواند به تحلیل ارتعاش آزاد و پایداری استاتیکی ورق محدود شود.

برای بررسی پایداری مسائل غیر خطی ورق استفاده از روش لیاپونو مناسب می‌باشد.

۱-۵- انواع کمانش

از لحاظ ساختار مواد سازنده ورق، برای ورق می‌توان دو نوع کمانش الاستیک و غیر الاستیک متصور شد. در کمانش الاستیک فرض می‌شود منحنی تنش-کرنش ماده خطی است، یا به عبارتی روابط فوق از قانون هوک پیروی می‌کند. در این حالت تنش‌ها مقادیری کمتر از تنش تسلیم ورق را اختیار می‌نماید و برای مدول الاستیسیته می‌توان مقدار ثابتی درنظر گرفت. در کمانش غیر الاستیک با افزایش میزان تنش‌ها از میزان تنش تسلیم مصالح سازنده ورق، منحنی تنش-کرنش غیرخطی خواهد بود، لذا مقدار مدول الاستیسیته متناسب با تنش اعمال شده تغییر خواهد کرد. در این حالت در گسترش معادلات دیفرانسیل حاکم بر ورق باید دقت بیشتری نمود.

علاوه بر کمانش الاستیک و غیر الاستیک ورق، به طور کلی در سازه‌های تحت بار فشاری امکان رخ دادن سه نوع کمانش وجود دارد:

۱- کمانش جانبی[1]،

۲- کمانش موضعی[2]،

۳- کمانش تغییر شکلی[3].

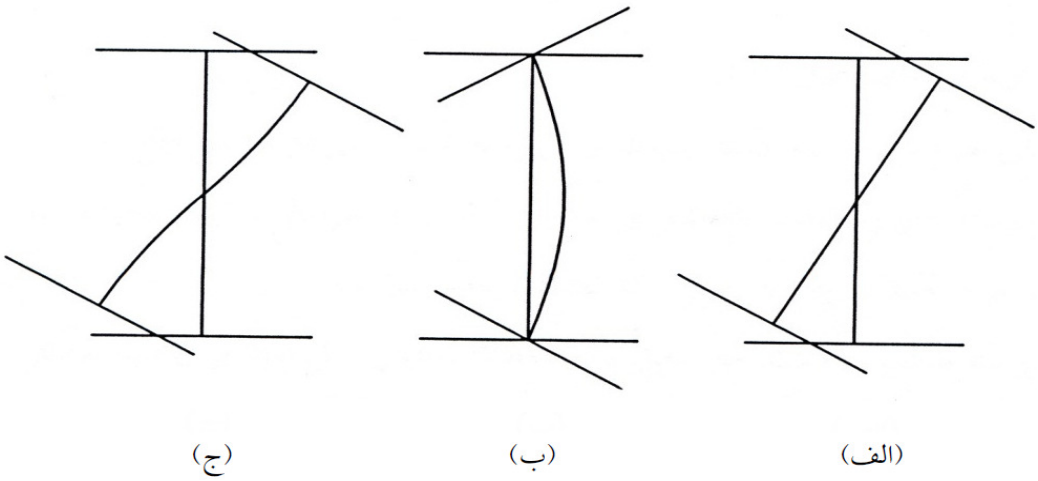
در کمانش جانبی که اغلب مربوط به تیر و ستون‌ها می‌باشد، بدون اینکه تغییر شکلی در مقطع عضو رخ دهد، سازه دچار تغییر مکان جانبی می‌شود. در این حالت مقطع در طول خود انحنا می‌یابد (شکل ۱-۵ الف). در کمانش موضعی، مقطع عضو سازه‌ای انحنا می‌یابد (شل ۱-۵ ب). کمانش تغییر شکلی به ترکیبی از دو کمانش فوق اطلاق می‌گردد (شکل ۱-۵ ج).

---

[1] Lateral buckling

[2] Local buckling

[3] Distortional buckling



شکل ۱-۵ انواع کمانش [۱]

۱-۶- کمانش حرارتی

تحلیل کمانش انواع ورق یکی از قابل توجه‌ترین زمینه‌های طراحی در تعدادی از گرایش‌های مهندسی به شمار می‌آید. کمانش ورق ممکن است تحت بارهای مکانیکی اتفاق بیفتد. در طول سال‌های گذشته بر روی مسئله کمانش مکانیکی ورق و ارائه راه حل‌های مناسب و کاربردی تمرکز فراوانی شده‌است. فراوانی مقالات موجود با درون‌مایه مذکور مؤید گفته فوق می‌باشد. با وجودگسترش علم و تکنولوژی و همچنین پیشرفت صنایع، کمانش حرارتی به عنوان یکی از انواع کمانش‌ها حائز اهمیت است. ولی تاکنون توجه کمتری به این پدیده معطوف گشته‌است. لذا پژوهش در این زمینه از اهمیت فراوانی برخوردار است.

به نظر می‌رسد اولین تحقیقات در زمینه کمانش حرارتی صفحات در سال ۱۹۵۲ توسط گوسارد و همکارانش [۸] صورت گرفته‌باشد. مطالعه آن‌ها به بررسی پدیده کمانش یک ورق مستطیلی ایزوتروپ با تکیه‌گاه‌های مفصلی خلاصه شد. ورق مورد نظر تحت حرارتی با توزیع چادری شکل[1] قرار داشت. آن‌ها در حل از روش ریلی-ریتز بهره بردند. هاف [۹] به انجام مطالعاتی در زمینه کمانش بال هواپیما تحت بار حرارتی پرداخت. گودا و پاندالایی [۱۰] در سال ۱۹۷۰ با استفاده از روش انرژی نتایجی در ارتباط با کمانش حرارتی ورق‌های مستطیلی با تکیه‌گاه‌های مفصلی و گیردار ارائه دادند. برکمن [۱۱] از طریق روش بسته موفق به حل تقریبی مسئله پایداری ورق در معرض حرارت غیریکنواخت شد. اثرات توزیع حرارت بر روی مود کمانشی ورق توسط بدنارزیچ و ریشتر [۱۲] بررسی شد. در سال ۱۹۸۷ تاچرت [۱۳] حل دقیقی از کمانش حرارتی ورق‌های ضخیم غیرمتقارن با شرایط تکیه‌گاهی مفصلی ارائه داد. ورق مورد نظر تحت حرارت یکنواخت قرار داشت و حل برمبنای تئوری برشی مرتبه اول شکل گرفت. پس از آن

[1] Tent like

تاچرت و هوانگ [۱۴] با استفاده از تئوری کلاسیک ورق به تحلیل کمانش حرارتی ورق کامپوزیت با لایه‌های متقارن پرداختند. همچنین آن‌ها موفق به حل کمانش حرارتی ورق‌های کامپوزیت متقارن ضخیم با تکیه‌گاه‌های گیردار شدند. حل از طریق سری فوریه و روش اجزا محدود انجام شد.

۱-۷- اهداف رساله و شرح مسئله

در سال های اخیر با گسترش صنایع هواپیماسازی، نظامی، اتومبیل سازی و موارد فراوان دیگر استفاده از مواد کامپوزیت اجتناب ناپذیر می باشد. علیرغم ویژگی‌های بسیار مناسب این مواد، کامپوزیت‌ها دارای نقاط ضعفی هستند، بنابراین ایده طراحی و ساخت موادی جدید، ضمن رفع نواقص کامپوزیت‌ها شکل گرفت. مواد باخواص ناهمسان درضخامت (FGMs) مواد مرکب پیشرفته‌ای هستند که قادر به تحمل حرارت بسیار بالا می‌باشند، به علاوه این ورق‌ها در تحمل گرادیان حرارتی شدید، عملکرد مطلوبی دارند.

در این پژوهش به بررسی کمانش حرارتی صفحات FGM مستطیلی نسبتاً ضخیم با بهره‌گیری از تئوری برشی مرتبه سوم ردی و با کاربرد روش انرژی خواهیم‌پرداخت. تحلیل با استفاده از روش نوار محدود صورت می‌گیرد، لذا ورق‌هایی با شرایط تکیه‌گاهی طولی و عرضی دلخواه قابل حل خواهدبود. ورق، تحت حرارت یکنواخت در ضخامت و یا حرارتی با توزیع خطی در ضخامت می‌باشد. به منظور اطمینان از صحت روابط توسعه‌یافته، نتایج برنامه نوشته شده توسط نرم‌افزار MATLAB با نتایج حاصل از مقالات معتبر مقایسه شده‌است.

۱-۸- محتوای فصول بعدی

در فصل دوم، به معرفی مواد مرکب و روند پیدایش مواد با ساختار ناهمسان در ضخامت (FGMs) وهمچنین خواص و ویژگی‌های آن پرداخته خواهد شد.

فصل سوم به معرفی تئوری‌های حاکم بر رفتار ورق‌ها اختصاص یافته‌است. روابط حاکم بر تئوری کلاسیک، برشی مرتبه اول و برشی مرتبه سوم به صورت مختصر بیان شده‌است. همچنین گستره کاربرد هر یک از تئوری‌های یاد شده عنوان گردیده‌است.

انواع روش‌های حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر رفتار ورق در فصل چهارم ارائه شده‌است. همچنین در این فصل به توسعه معادلات حاکم بر کمانش مکانیکی ورق‌های با خواص ناهمسان در ضخامت نسبتاً ضخیم پرداخته شده-است.

بر مبنای روابط بدست آمده در فصل چهارم، و با اتکا بر برنامه نوشته شده در محیط MATLAB، صحت روش از طریق مقایسه با مقالات معتبر تایید شده است. پس از آن نتایج حاصل از کمانش ورق‌های FGM تحت بارگذاری مکانیکی یکطرفه و دوطرفه در فصل پنجم ارائه گردیده است.

نتایج تحلیل کمانش ورق‌های FGM تحت حرارت یکنواخت و خطی در ضخامت در فصل ششم در قالب جداول و نمودارهایی آورده شده است. در این فصل ابتدا به مقایسه نتایج حاصل از مطالعه حاضر با مقادیر متناظر در

مقالات، پرداخته شده است. پس از آن همگرایی روش، بررسی شده است، و در پایان اثر عوامل گوناگون بر دمای کمانش حرارتی ورق مورد مطالعه قرار گرفته است.

در فصل هفتم به جمع‌بندی، نتیجه‌گیری و بیان پیشنهاداتی پرداخته شده است.