دانشگاه الزهراء(س)

دانشکده علوم پایه

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض

عنوان

خاصیت فیلیپس و دانفورد—پتیس در فضاهای باناخ

استاد راهنما

دکتر فرید بهروزی

استاد مشاور

دکتر داریوش بهمردی

دانشجو

سمیه علی‌زاده زیولایی

شهریور ۱۳۹۰

قدردانی و تشکر

خدای را در وسعتی بی‌واژه سپاسگزارم و شادمان از این‌که در پرتو مهرش این پایان‌نامه به سرانجام آمد. بر خود لازم می‌دانم که از جناب آقای دکتر فرید بهروزی که زحمت راهنمایی این پایان‌نامه را تقبل نمودند تشکر و قدردانی نمایم.

تقدیم به:

کسانی‌که با عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان در سردترین روزگاران بهترین پشتیبان من بوده‌اند.
و قلب‌های بزرگ‌شان همواره فریادرس است و محبت‌های بی‌دریغ‌شان هرگز فروکش نمی‌کند.

چکیده

فرض کنید X یک فضای باناخ باشد. گوییم فضای باناخ X خاصیت فیلیپس دارد، هرگاه تصویر متعارف $p : X^{***} \longrightarrow X^*$، به طور دنباله‌ای نرم$-w^*$ پیوسته باشد. هم‌چنین خاصیت فیلیپس ضعیف دارد، هرگاه تصویر متعارف $p : X^{***} \longrightarrow X^*$، به طور دنباله‌ای w^*-wپیوسته باشد.
هدف از این پایان‌نامه، مطالعه هر دوی این خاصیت‌ها در ارتباط با خواص هندسی دیگر مانند خاصیت دانفورد$-$پتیس، خاصیت (V)، (V^*) و (u) پلچینسکی و خاصیت شور می‌باشد.

کلمات کلیدی:خاصیت فیلیپس، خاصیت فیلیپس ضعیف، خاصیت دانفورد$-$پتیس، خاصیت (V)، (V^*) و (u) پلچینسکی، خاصیت شور.

فهرست مندرجات

مقدمه

علاوه بر توپولوژی‌های نرمی در فضای باناخ دو توپولوژی به نام‌های توپولوژی ضعیف و w^*—توپولوژی به ترتیب در کل فضای باناخ و فضای دوگان آن تعریف می‌شوند. از این‌رو با تعریف این توپولوژی‌ها می‌توان ویژگی‌های دیگری مانند $w^* - w$ پیوستگی، $w^* - w$ فشردگی عملگرهای به طور ضعیف فشرده و ... را بررسی کرد. برای نمونه ابرلین—اشمولیان[1] در سال ۱۹۴۰ نشان داد که هر زیر مجموعه‌ی فشرده ضعیف در یک فضای باناخ، به‌طور دنباله‌ای فشرده‌ی ضعیف است. با گذشت زمان و با مطالعه‌ی بیشتر روی فضاهای باناخ بعضی خصوصیات دیگر این فضا معرفی شدند، از جمله در حدود سال ۱۹۴۰ در مقاله‌ای توسط نیلسون—دانفورد [2] و بیل—پتیس [3] نشان داده شد که برای هر اندازه μ و هر فضای باناخ X اگر $T : L_1(\mu) \longrightarrow X$، عملگری فشرده‌ی ضعیف باشد در این صورت عملگر T کاملاً پیوسته است این مطلب روی فضای $C(K)$ نیز برقرار است . در همین راستا در سال ۱۹۵۰، گروتندیک [4] طی مطالعات خود این موضوع را عمومیت بخشید و فضاهایی با خاصیت دانفورد—پتیس [5] معرفی کرد که برگرفته از این دو ریاضی‌دان می‌باشد. وی هم‌چنین نشان داد که فضای $C(K)$ نیز دارای خاصیت دانفورد—پتیس است. از طرفی جوزف—دیستل[6] در سال ۱۹۸۰ در مقاله‌ی [۸] خصوصیت دانفورد—پتیس را بررسی کرد و به نتایج بسیار مهمی در مورد این خصوصیت دست یافت.

اینک فرض کنید که X و Y دو فضای باناخ باشند. عملگر خطی $T : X \longrightarrow Y$ را عملگر

---

1. Eberlein - Smulian
2. Nelson - Dunford
3. Bill - Pettis
4. Grothendieck
5. Dunford - Pettis property
6. Joseph - Diestel

همگرای نامشروط نامیم، هرگاه هر سری همگرای نامشروط با توپولوژی ضعیف را به یک سری همگرای نامشروط بفرستد. هم‌چنین با توجه به قضیه‌ی ارلیز—پتیس [7] در مقاله‌ی [۹] دیده می‌شود که هر عملگر فشرده‌ی ضعیف یک عملگر همگرای نامشروط است. از این‌رو الکساندر—پلچینسکی[8] در سال ۱۹۶۲ در مقاله‌ی [۲۱] به بررسی فضاهایی پرداخت که عکس قضیه‌ی ارلیز—پتیس را برقرار می‌سازند. در واقع فضای باناخ X را که به ازای هر فضای باناخ Y و هر عملگر همگرای نامشروط $T : X \longrightarrow Y$، به‌طور ضعیف فشرده باشد. یک فضا با خاصیت (V) نامید. از طرفی پلچینسکی در مقاله‌ی [۲۲] تعریف معادلی برای خاصیت (V) نشان داد و در آن این تعریف را بیان کرد که هر زیر مجموعه‌ی K از X^* که به ازای هر سری کوشی نامشروط با توپولوژی ضعیف مانند $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ در X، در شرط

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x^*\in K} |x^* x_n| = 0. \qquad (۱)$$

صدق کند، K فشرده‌ی نسبی ضعیف در X^* است. مشابه تعریف اخیر برای خاصیت (V)، پلچینسکی در مقاله‌ی [۲۲] به مطرح کردن فضاهای باناخ با خاصیت (V^*) پرداخت.
از طرف دیگر جووانی—امانوئل [9] در سالهای ۱۹۸۸ و ۱۹۹۱ در مقاله‌های [۱۳] و [۱۴] یک تعریف معادل توسط عملگرهای نامشروط برای فضاهایی با خاصیت (V^*) بیان کرد. هم‌چنین پلچینسکی در سال ۱۹۵۸ در مقاله‌ی [۲۱] در حین مطالعه در مورد فضاهای باناخ به طور دنباله‌ای کامل با توپولوژی ضعیف دریافت که در یک چنین فضاهایی می‌توان هر دنباله کوشی ضعیف را با یک سری کوشی نامشروط با توپولوژی ضعیف تقریب زد که این مطلب تنها در فضاهای به طور دنباله‌ای کامل با توپولوژی ضعیف رخ می‌دهد. از این‌رو پلچینسکی به فضای باناخی با این ویژگی، فضایی با خاصیت (u) نامیده است.
همین‌طور بنابه تعریف معروفی از آر—فیلیپس [10] در مقاله‌ی [۱۰] نگاشت متعارف $p : c_0^{***} \longrightarrow c_0^*$، به طور دنباله‌ای نرم—$w^*$ پیوسته است. از این‌رو در سال ۲۰۰۰ علی—الگر [11] و والدن—فریدمن [12] در مقاله‌ی [۱۵] دو ویژگی فیلیپس و فیلیپس ضعیف در فضای باناخ X را معرفی کردند.

---

[7] Orlicz- pettis

[8] Alexander - Pelczynski

[9] Giovanni - Emanuele

[10] R.Phillips

[11] Ali - Ulger

[12] Walden - Freedman

از این‌رو هدف از این پایان‌نامه بررسی خاصیت‌های فیلیپس و فیلیپس ضعیف و ارتباط آن با خواص هندسی دیگر مانند خاصیت دانفورد—پتیس، خاصیت (V)، (V^*) و (u) پلچینسکی، خاصیت شور و خاصیت گروتندیک می‌باشد.
فصل اول به تعاریف و قضایای عمومی مورد نیاز در فصل‌های بعدی اختصاص یافته است.
فصل دوم به بیان معانی و مفاهیم لازم در مورد خاصیت دانفورد—پتیس و ارتباط آن با خاصیت شور می‌پردازد.
فصل سوم ابتدا به بیان تعریف دقیق هر یک از خواص (V)، (V^*) و (u) پلچینسکی پرداخته و نشان خواهد داد که خاصیت (V) موروثی نیست اما خاصیت (V^*) و (u) موروثی‌اند و در انتهای این فصل نیز به ارتباط بین این سه خاصیت می‌پردازد.
در فصل چهارم نیز بعد تعریف دقیق از خاصیت فیلیپس و فیلیپس ضعیف به بررسی ارتباطاین خواص با هر یک از خواص فصل‌های دوم و سوم می‌پردازد.

فصل ۱

پیش نیاز

به علت گستردگی مطالب در آنالیز تابعی و آنالیز حقیقی و با در نظر گرفتن این‌که خواننده با مفاهیم مقدماتی مانند فضاهای نرم‌دار، فضاهای باناخ، عملگر خطی و دوگان فضاهای باناخ و ... آشناست. مفاهیم و قضایایی را در این فصل بیان می‌کنیم که در طول فصول این پایان‌نامه مورد استفاده قرار گرفته است.
هم‌چنین در طول پایان‌نامه به جز در مواردی که ذکر شود قرارداد می‌کنیم K میدان اعداد حقیقی یا مختلط است. هر جا صحبت از عملگر باشد منظور عملگر خطی کراندار (پیوسته) است. گوی واحد بسته در X یعنی مجموعه‌ی $\{x \in X \ , \ \|x\| \leq 1\}$ را با B_X و کره‌ی واحد بسته‌ی X یعنی مجموعه‌ی $\{x \in X \ ; \ \|x\| = 1\}$ را با S_X نشان می‌دهیم و اگر $x \in X$ و $x^* \in X^*$، معمولاً به جای $x^*(x)$ از نماد $< x^*, x >$ استفاده می‌نماییم.

۱.۱ برخی مفاهیم توپولوژیکی و آنالیز حقیقی

فرض کنید X یک فضای توپولوژیکی هاسدورف و A زیر مجموعه‌ای در X باشد در این‌صورت مجموعه‌ی A را فشرده‌ی شمارشی نامیم، هرگاه هر دنباله در A دارای نقطه‌ی انباشتگی در A باشد. هم‌چنین مجموعه‌ی A را فشرده‌ی دنباله‌ای نامیم، هرگاه هر دنباله در A دارای یک زیر دنباله‌ی همگرا در A باشد.

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنید (X, d) یک فضای متریک باشد در این‌صورت:
a) برای هر $\varepsilon > 0$ و $x \in X$ مجموعه‌های $B(x, \varepsilon) = \{y \in Y \ ; \ d(x, y) < \varepsilon\}$ را یک

$\varepsilon-$گوی به مرکز x نامند.

$b)$ X را کلاً کراندار گوییم، هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ یک پوشش متناهی از $\varepsilon-$گوی‌ها برای X موجود باشد. (یعنی نقاط $x_1, \cdots, x_n$ در X وجود داشته باشد به‌طوری‌که $X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$)

حال فرض کنید S یک مجموعه‌ی دلخواه باشد و $\Phi = \Sigma \subset P(S)$. اگر Σ شامل اجتماع هر خانواده‌ی متناهی از اعضایش و هم‌چنین شامل متمم هر عضوش باشد در این‌صورت Σ را یک جبر (یا میدان) گویند. جبر Σ را یک $\sigma-$جبر ($\sigma-$میدان) نامند، هرگاه شامل اجتماع هر خانواده‌ی شمارا از اعضایش باشد.

تعریف ۲.۱.۱ فرض کنید X یک مجموعه و Σ یک $\sigma-$جبر روی X باشد. تابع $\mu : \Sigma \longrightarrow [0, \infty]$ را یک اندازه می‌نامیم، هرگاه

۱) $\mu(\emptyset) = 0$.

۲) به‌طور جمعی شمارش‌پذیر باشد، یعنی برای هر دنباله‌ی مجزا از عناصر Σ مانند $\{E_n\}_{i=1}^{n}$، داشته باشیم:

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

تعریف ۳.۱.۱ ($\sigma-$متناهی): اندازه‌ی μ را $\sigma-$متناهی می‌نامیم، هرگاه دنباله‌ی $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ در Σ وجود داشته باشد به‌طوری‌که به ازای هر i، داشته باشیم:

$$S = \cup_{i=1}^{\infty} A_i \quad , \quad \mu(A_i) < \infty \ .$$

قضیه ۴.۱.۱ [۲۴] (ایگوروف [1]): فرض کنید (S, Σ, μ) یک فضای اندازه و $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع $\mu-$اندازه‌پذیر باشد. اگر دنباله‌ی $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ به‌طور نقطه‌ای همگرا به f باشد (

[1] Egoroff

تقریباً همه جا)، آن‌گاه به ازای هر $\varepsilon > 0$، $E \in \Sigma$ وجود دارد به‌طوری‌که $\mu(S \setminus E) < \varepsilon$ و دنباله‌ی $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ روی E به تابع f همگرای یکنواخت است.

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنید (S, Σ) یک فضای اندازه پذیر باشد. هم‌چنین فرض کنید λ یک اندازه مثبت و μ یک اندازه مختلط باشد. اندازه μ را پیوسته مطلق نسبت به λ گویند ($\lambda << \mu$)، هرگاه اگر $\mu(E) = 0$ آن‌گاه $\lambda(E) = 0$.

قضیه ۶.۱.۱ [۲۴] فرض کنید (S, Σ, μ) یک فضای اندازه و λ یک اندازه‌ی مختلط باشد در این‌صورت گزاره‌های زیر معادل‌اند:
۱) $(\lambda << \mu)$.

۲) به ازای هر $\varepsilon > 0$، $\delta(\varepsilon) > 0$ یافت می‌شود به‌طوری‌که به ازای هر $E \in \Sigma$ که $\mu(E) < \delta(\varepsilon)$، آن‌گاه $|\lambda(E)| < \varepsilon$ است.

تعریف ۷.۱.۱ فرض کنید X یک فضای توپولوژیکی باشد، آن‌گاه محمل تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ را با $supp(f)$ نشان داده و برابر مجموعه‌ی $\overline{\{x \in X; f(x) \neq 0\}}$ تعریف می‌کنیم.

نتیجه ۸.۱.۱ [۲۵] (هان–باناخ [2]): اگر X یک فضای نرم‌دار باشد و $x_0 \in X$، در این‌صورت x^* در X^* وجود دارد به‌طوری که $\|x^*\| = 1$ و $\|x_0\| = x^* x_0$.

قضیه ۹.۱.۱ [۲۵] هرگاه f یک تابع خطی پیوسته بر زیر فضای M از فضای موضعاً محدب X باشد، آن‌گاه $x^* \in X^*$ای هست به‌طوری‌که بر M، $x^* = f$.

[2] Hahn-Banach

۲.۱ تورها

تعریف ۱.۲.۱ رابطه‌ی $\leq$ روی یک مجموعه‌ی ناتهی A یک رابطه ترتیب جزیی نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر $a, b, c \in A$،

۱) $a \leq a$.

۲) اگر $a \leq b$ و $b \leq a$، آن‌گاه $a = b$.

۳) اگر $a \leq b$ و $b \leq c$، آن‌گاه $a \leq c$.

در این‌صورت $(A, \leq)$ یا A را مجموعه مرتب جزئی گوییم. مجموعه‌ی مرتب جزئی $(A, \leq)$ را که برای هر $a, b \in A$ عضوی از A مانند c یافت شود به‌طوری‌که $a \leq c$ و $b \leq c$، آن‌گاه $(A, \leq)$ مجموعه‌ی جهت‌دار نامیده می‌شود. به‌عنوان مثال اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ یک مجموعه جهت‌دار می‌باشد.

تعریف ۲.۲.۱ فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد هر تابع از مجموعه جهت‌داری مانند Γ به‌توی X یک تور در X نامیده می‌شود. دنباله حالت خاصی از تورهاست که در آن $\Gamma = \mathbb{N}$.

معمولاً برای هر $\alpha \in \Gamma$، $f(\alpha)$ را با x_α و تور را با $(x_\alpha)_{\alpha \in \Gamma}$ یا مختصراً به‌صورت (x_α) نشان می‌دهند.

تعریف ۳.۲.۱ تور (x_α) را همگرا به نقطه‌ی x گوییم، هرگاه به ازای هر همسایگی U از x، $\alpha \in \Gamma$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\alpha \leq \beta$ ایجاب کند $x_\beta \in U$.

اگر فضا هاسدورف باشد هر تور در X حداکثر به یک نقطه همگرا می‌باشد.

تعریف ۴.۲.۱ زیر مجموعه‌ی Λ از Γ را در Γ هم‌پایان گوییم، هرگاه به ازای هر $\alpha \in \Gamma$، $\beta \in \Lambda$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\alpha \leq \beta$.

اگر Γ مجموعه‌ای جهت‌دار باشد و Λ در Γ هم‌پایان باشد، آن‌گاه Λ نیز جهت‌دار است.

تعریف ۵.۲.۱ فرض کنید $f : \Gamma \longrightarrow X$ توری در X و $f(\alpha) = x_\alpha$ باشد. اگر Λ مجموعه‌ای جهت‌دار و $g : \Lambda \longrightarrow \Gamma$ تابعی که $g(\Lambda)$ در Γ هم‌پایان باشد و اگر $\lambda_1 \leq \lambda_2$، آن‌گاه $g(\lambda_1) \leq g(\lambda_2)$. در این‌صورت تابع $f \circ g : \Lambda \longrightarrow X$ را یک زیرتور (x_α) می‌گوییم.

تعریف ۶.۲.۱ x را یک نقطه انباشتگی تور (x_α) گوییم، هرگاه به ازای هر همسایگی U از x، مجموعه $\{\alpha \in \Gamma \ ; \ x_\alpha \in U\}$ در Γ هم‌پایان باشد، x یکی از نقاط انباشتگی تور (x_α) است اگر و تنها اگر زیرتوری از (x_α) به x همگرا باشد.

۳.۱ توپولوژی‌های ضعیف و w^*—توپولوژی

تعریف ۱.۳.۱ فرض کنید X یک فضای برداری توپولوژیک و دوگانش X^* جدا کننده‌ی نقاط X باشد. قرار می‌دهیم:

$$\mathcal{P} = \{p_{x^*}; x^* \in X^*\}$$

که در آن به ازای هر x در X، $p_{x^*}(x) = |<x^*, x>|$.
در این‌صورت $\mathcal{P}$ خانواده‌ای از نیم نرم‌هاست که جدا کننده‌ی نقاط X می‌باشد، بنابراین $\mathcal{P}$ فضای X را به یک فضای موضعاً محدب با توپولوژی τ_w تبدیل می‌کند به توپولوژی τ_w، توپولوژی ضعیف و یا $\sigma(X, X^*)$—توپولوژی می‌گوییم.
فرض کنید X یک فضای خطی نرم‌دار باشد و $x_0 \in X$، در این‌صورت همسایگی ضعیف از x_0 را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$U(x_0, \varepsilon) = \{x \in X; |x_i^* x - x_i^* x_0| < \varepsilon \ , \ 1 \leq i \leq n\}.$$

که در آن $x_1^*, \cdots, x_n^*$ عناصر دلخواهی از X^* می‌باشند و ε عدد حقیقی مثبت دلخواهی است. مفاهیم به‌طور ضعیف بسته، به‌طور ضعیف پیوسته و ... به‌ترتیب همانند بسته و پیوسته و

... تعریف می‌شوند ولی با توپولوژی ضعیف τ_w که به‌جای توپولوژی معمولی τ به‌کار رفته است. به‌عنوان مثال:
زیر مجموعه‌ی M از X را به‌طور ضعیف کراندار گوییم، هرگاه برای هر همسایگی ضعیف مانند $V(\varepsilon) = \{x \in X \ : \ | < x_i^*, x > | < \varepsilon \ , \ 1 \leq i \leq n\}$، عدد حقیقی $s > 0$ یافت شود به‌قسمی که برای $t > s$ داشته باشیم:

$$M \subset tV(\varepsilon).$$

هم‌چنین دنباله‌ی $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ در X را به‌طور ضعیف همگرا به صفر گوییم، هرگاه برای هر همسایگی ضعیف مانند $V(\varepsilon)$، یک عدد $N > 0$ وجود داشته باشد به‌قسمی که اگر $n > N$، آن‌گاه $x_n \in V(\varepsilon)$.
در این حالت می‌توانیم یکی از نمادهای $x_n \xrightarrow{w} 0$ یا $w - \lim_{n \to \infty} x_n = 0$ را به‌کار ببریم.

قضیه ۲.۳.۱ [۲۵] برای فضای موضعاً محدب X احکام زیر برقرارند:
الف) زیر مجموعه‌ی A از X به‌طور ضعیف کراندار است اگر و تنها اگر به ازای هر x^* در X^* مجموعه‌ی x^* بر A کراندار باشد. (یا $A \subset X$ به‌طور ضعیف کراندار است، هرگاه به ازای هر $x^* \in X^*$، Mای یافت شود به‌طوری‌که $| < x^*, (x) > | < M$ باشد.)

ب) (مازور): اگر A زیر مجموعه‌ی محدبی از فضای موضعاً محدب X باشد، آن‌گاه $\overline{A} = \overline{A}^w$.

پ) زیر مجموعه‌ی A از X بسته است اگر و تنها اگر به‌طور ضعیف بسته باشد.

ت) زیر مجموعه‌ی A از X چگال است اگر و تنها اگر به‌طور ضعیف چگال باشد.

تعریف ۳.۳.۱ فرض کنید X^* فضای دوگانی از یک فضای نرم دار X باشد. دنباله‌ی $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ در X را به‌طور ضعیف همگرا به x در X گوییم، هرگاه به ازای هر $x^* \in X^*$ و

$n \to \infty$،

$$x^*(x_n) \longrightarrow x^*(x) \ .$$

قضیه ۴.۳.۱ [۲۵] فرض کنید X یک فضای موضعاً محدب متری‌پذیر باشد. هرگاه $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ را دنباله‌ای در X در نظر بگیریم به‌قسمی که به‌طور ضعیف به x در X همگرا باشد، آن‌گاه دنباله‌ای مانند $(y_i)_{i=1}^{\infty}$ در X وجود دارد به‌طوری‌که برای اعداد صحیح $\cdots < p_n < \cdots < p_2 < p_1 < 0$ و $p_{i-1} + 1 \leq n \leq p_i$، $\lambda_n \geq 0$ وجود دارد به‌قسمی‌که هر y_i به‌صورت ترکیب محدب متناهی از x_nها مانند $\sum_{n=p_{i-1}+1}^{p_i} \lambda_n x_n$ می‌باشد به‌طوری‌که $y_i \longrightarrow x$.

تعریف ۵.۳.۱ دنباله‌ی $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ در فضای باناخ X را کوشی ضعیف نامیم، هرگاه برای هر x^* در X^*، دنباله‌ی عددی $(< x^*, x_n >)_{n=1}^{\infty}$ کوشی باشد.

تعریف ۶.۳.۱ فضای باناخ X تحت توپولوژی ضعیف به‌طور دنباله‌ای کامل [3] است، هرگاه هر دنباله‌ی کوشی ضعیف در X به‌طور ضعیف همگرا به عضوی در X باشد.

گزاره ۷.۳.۱ فرض کنید X یک فضای باناخ باشد در این‌صورت دنباله‌ی $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ کوشی ضعیف در X است اگر و تنها اگر به ازای هر جفت از دنباله‌های صعودی $(j_n)_{n=1}^{\infty}$ و $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ از اعداد صحیح مثبت که $\ldots \leq k_1 \leq j_1 \leq k_2 \leq j_2 \leq$، داشته باشیم:

$$x_{k_n} - x_{j_n} \xrightarrow{w} 0.$$

---

[3] weakly sequentially complete

اثبات: فرض کنید دنباله‌ی $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ کوشی ضعیف در X باشد در این‌صورت به ازای هر x^* در X^*، دنباله‌ی $(< x^*, x_n >)_{n=1}^{\infty}$ کوشی است، بنابراین به ازای هر $\varepsilon > 0$، عدد طبیعی N وجود دارد به‌طوری‌که به ازای هر $n > m \geq N$ داریم:

$$| < x^*, x_n - x_m > | < \varepsilon.$$

حال فرض کنید $(k_n)_{n=1}^{\infty}$ و $(j_n)_{n=1}^{\infty}$ دو دنباله‌ی صعودی از اعداد صحیح مثبت با شرط $k_1 \leq j_1 \leq k_2 \leq j_2 \leq \dots$ باشد. اگر $n \geq N$ باشد، آن‌گاه $j_n \geq n \geq N$ و $k_n \geq n \geq N$ است، بنابراین داریم:

$$| < x^*, x_{k_n} - x_{j_n} > | < \varepsilon.$$

در نتیجه

$$x_{k_n} - x_{j_n} \xrightarrow{w} 0.$$

برعکس، فرض کنید دنباله‌ی $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ کوشی ضعیف در X نباشد در این‌صورت $x^* \in X^*$ هست به‌طوری‌که $< x_n, x^* >$ کوشی نیست، لذا $\delta > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که به ازای هر عدد طبیعی N، $n > m \geq N$ یافت می‌شود به‌طوری‌که

$$| < x^*, x_n - x_m > | > \delta.$$

اکنون فرض کنید $n = 1 \in \mathbb{N}$ در این‌صورت k_1 و j_1 از اعداد صحیح مثبت وجود دارند به‌طوری‌که $j_1 > k_1 > 1$ و

$$| < x^*, x_{k_1} - x_{j_1} > | > \delta.$$

حال با انتخاب $n = j_1$، k_2 و j_2 از اعداد صحیح مثبت وجود دارند به‌طوری‌که $j_2 > k_2 > j_1$ و

$$| < x^*, x_{k_2} - x_{j_2} > | > \delta.$$

با ادامه‌ی این فرآیند، دنباله‌ی $(j_n)_{n=1}^{\infty}$ و$(k_n)_{n=1}^{\infty}$ از اعداد صحیح مثبت با شرط $k_1 \leq j_1 \leq k_2 \leq j_2 \leq \dots$ ساخته می‌شوند به‌طوری‌که

$$| < x^*, x_{k_n} - x_{j_n} > | > \delta.$$

بنابراین $x_{k_n} - x_{j_n}$ به‌طور ضعیف همگرا به صفر نیست. ■

تعریف ۸.۳.۱ فرض کنید X یک فضای خطی توپولوژیک با دوگان X^* باشد برای هر x در X تابعک p_x را روی X^* به‌صورت $p_x(x^*) = | < x^*, x > |$ تعریف می‌کنیم در این‌صورت خانواده‌ای از نیم‌نرم‌های $\mathcal{P} = \{p_x; x \in X\}$ جدا کننده‌ی نقاط X^* است پس $\mathcal{P}$ فضای X^* را به یک فضای موضعاً محدب تبدیل می‌سازد و توپولوژی تعریف شده توسط این نیم‌نرم‌ها را w^*—توپولوژی و یا $\sigma(X^*, X)$—توپولوژی می‌نامیم.
هم‌چنین یک w^*—همسایگی نقطه‌ی x_0^* در X^* به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$U(x_0^*, \varepsilon) = \{x^* \in X^*; |x^* x_i - x_0^* x_i| < \varepsilon \ , \ 1 \leq i \leq n\}.$$

که در آن $x_1, \cdots, x_n$ عناصر دلخواهی از X می‌باشند و ε عدد حقیقی مثبت دلخواهی است.

تعریف ۹.۳.۱ فرض کنید X^* فضای دوگانی از یک فضای نرم دار X باشد. دنباله‌ی $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ در X^* را w^*—همگرا به یک عضو x^* در X^* گوییم، اگر برای هر x در X داشته باشیم:

$$\lim_{n \to \infty} x_n^*(x) = (x^*) \ .$$

و با علامت $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$ و یا $w^* - \lim_{n \to \infty} x_n^* = x^*$ نمایش می دهیم.

قضیه ۱۰.۳.۱ [۲۵] (باناخ—آلاگلو [4]): اگر V یک همسایگی از صفر در فضای برداری توپولوژیک X بوده و

$$polar(V) = \{x^* \in X^*; \ | < x^*, x > | \leq 1 \ ; \ (x \in V)\}.$$

آن‌گاه مجموعه‌ی $polar(V)$، w^*—فشرده است.

[4] Banach-Alagulo

نتیجه ۱.۳.۱۱ [۲۵] (آلاگلو [5]): فرض کنید X یک فضای باناخ باشد در این‌صورت گوی واحد بسته B_{X^*} در X^*، w^*—فشرده است، در نتیجه هر زیر مجموعه‌ی کراندار و w^*—بسته در X^*، w^*—فشرده است.

قضیه ۱.۳.۱۲ [۲۵] در فضای موضعاً محدب X، مجموعه‌ی A در X به‌طور ضعیف کراندار است اگر و تنها اگر نرم—کراندار باشد.

فرض کنید X یک فضای باناخ باشد. به ازای هر $x \in X$ و $x^* \in X^*$، نگاشت $i : X \longrightarrow X^{**}$ با تعریف $i(x)x^* = x^*x$، نشاندنی متعارف نامیده می شود و چون به ازای هر x در X داریم:

$$\|i(x)\| = \sup_{\|x^*\|\leq 1} |i(x)x^*| = \sup_{\|x^*\|\leq 1} |x^*x| = \|x\|$$

پس نشاندنی متعارف یک طول‌پا خطی است. تقریباً در بیشتر اوقات X را با $i(X)$ یکی می‌گیریم و X را به‌طور ساده به‌عنوان زیر فضای X^{**} در نظر می‌گیریم، در نتیجه با این یکی‌سازی، i از (X, w) به‌روی $(i(x), w)$ یک همانریختی است پس توپولوژی ضعیف با w^*—توپولوژی نسبت به $i(x)$ متحد هستند در صورتی که i پوشا باشد X را یک فضای انعکاسی می‌نامند.

قضیه ۱.۳.۱۳ [۳۰] فرض کنید X یک فضای خطی نرم‌دار باشد در این‌صورت داریم:

۱) فضای تمام تابعک‌های خطی و پیوسته روی $(X, \sigma(X, X^*))$ برابر X^* است.

۲) فضای تمام تابعک‌های خطی و پیوسته روی $(X, \sigma(X^*, X))$ برابر X است.

---

[5] Alagulo