قال الله تعالى الذي علم بالقلم علم الانسان ما لم يعلم

بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه ولیعصر (عج) رفسنجان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

تقریب معکوس عملگر قاب وکاربرد آن در قابهای گابور

نگارش:

عباس عسکری

استاد راهنما:

دکتر محمد علی دهقان

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی محض

مرداد ۱۳۸۳

بسمه تعالی

این پایان نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز درجه کارشناسی ارشد

به

گروه ریاضی

دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود .

داور ۱ : دکتر عباس سالمی

داور ۲ : دکتر حمیدرضا افشین

استاد راهنمای پایان نامه : دکتر محمد علی دهقان

نماینده تحصیلات تکمیلی : دکتر حسن رنجبر عسکری

دانشجو : عباس عسکری زاده خنامان

تقدیم به

پدر فداکار

و

مادر مهربانم

که الفبای زندگی را در مکتب آنان آموختم

تشکر و قدردانی

خداوند متعال را بسیار شاکرم که باردیگر مرا یاری داد تا بتوانم گامی دیگر در جهت کسب علم بردارم و توفیق کوشش در راه تحصیل معرفت را برایم فراهم کرد.

برخود واجب می دانم که از تلاشهای دلسوزانه و برادرانه استاد فرزانه و ارجمند آقای دکتر محمد علی دهقان که راهنمایی این رساله را بر عهده داشتند تشکر و قدردانی نمایم، که رهنمودهای ایشان همواره راهگشای من بود. همچنین از استادان محترم آقایان دکتر عباس سالمی و دکتر حمیدرضا افشین که داوری این رساله را عهده دار بودند تشکر می کنم.

عسکری

مرداد ماه ۱۳۸۳

چکیده

هر عضو فضای هیلبرت H را می توان بصورت ترکیب خطی از اعضای یک قاب روی H نوشت که به ضرایب این نوع ترکیب ضرایب قاب گفته می شود و محاسبهٔ این ضرایب به معکوس عملگر قاب نیاز دارد. برای این کار تا کنون روشهای متعددی ارائه شده که البته کاستیهایی نیز دارند. در این رساله روش جدیدی برای تقریب معکوس عملگر قاب ارائه می دهیم. و نشان می دهیم چگونه می توان معکوس عملگر قاب را با بکارگیری فضاهای جبر خطی با بعد متناهی تقریب زد. در مقایسه با روش های قبل، تقریب جدید می تواند برای هر قاب مورد استفاده قرار گیرد و از نتایج این روش برای تقریب ضرایب قاب و حل مسئله گشتاور استفاده می کنیم. همچنین این نتایج را برای قابهای گابور و قابهای حاصل از انتقال توابع یک متغیره بکار می گیریم.

فهرست مندرجات

مقدمه:

یک قاب در فضای هیلبرت H دارای این خاصیت است که هر عضو متعلق به H نمایشی به صورت $\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i$ دارد که $\{a_i\} \in l^2(\aleph)$. نظریهٔ قاب یک انتخاب قانونمند برای دنبالهٔ $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ بدست می دهد که ضرایب قاب نامیده می شوند. از دید ریاضی بدست آوردن این ضرایب چندان مشکل نیست، اما از نقطه نظر عملی کار واقعاً دشواری است و نیاز به معکوس عملگر قاب روی H دارد که معمولاً از بعد نامتناهی می باشد.

در این رساله یک روش جدید برای تقریب معکوس عملگر قاب با استفاده از زیر مجموعه های با بعد متناهی ارائه می شود و نشان داده می شود که S^{-1} می تواند با استفاده از روشهای در جبر خطی بعد متناهی تقریب زده شود.

این رساله در ۶ فصل تدوین شده است. فصل مقدماتی شامل پیش نیازها می باشد. فصل اول شامل بخشی از خواص قابها می باشد که در طول کار از آنها استفاده می شود.

در فصل دوم ابتدا روش تصویری معرفی می شود و سپس با ارائه دو مثال نشان داده می شود که این روش در همهٔ قابها کارساز نیست. در فصل سوم روش تصویری جدید ارائه می شود و سرعت همگرایی آن مورد بررسی قرار می گیرد. فصل چهارم به مسئله گشتاور اختصاص دارد و در فصل پنجم از نتایج روش تصویری در قابهای گابور استفاده می شود.

فصل صفر

نمادها و پیش نیازها

در این فصل تعاریف و مفاهیم اولیه که در طول این پایان نامه موردنیاز می باشد آورده شده است. این مطالب بر گرفته از کتابها و مقالات مختلفی است که جزء مراجع می باشند.

۰-۱ تعریف: فرض کنید V یک فضای برداری باشد. تابع $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V \to \mathbb{C}$ را یک ضرب داخلی بر V گوییم هر گاه:

۱) برای هر $x\in V$ $\langle x,x\rangle \geq 0$ و $\langle x,x\rangle = 0$ اگر و تنها اگر $x=0$ باشد.

۲) برای هر $x,x_1,x_2\in V$ آنگاه $\langle x_1+x_2,x\rangle = \langle x_1,x\rangle + \langle x_2,x\rangle$.

۳) برای هر $\alpha\in\Re$ و هر $x,y\in V$ $\langle \alpha x,y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$.

۴) برای هر $x,y\in V$ $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$.

زوج $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ را فضای ضرب داخلی گوئیم.

۰-۲ تعریف: فرض کنید V یک فضای برداری حقیقی یا مختلط باشد و $\|\ \| : V \to \Re[0,\infty)$ یک تابع با مقادیر حقیقی باشد به طوری که به ازای هر $x,y\in V$ و هر اسکالر α داشته باشیم:

الف) $\|x\|\geq 0$, $\|x\|=0$ اگر و فقط اگر $x=0$.

ب) $\|\alpha x\| = |\alpha|.\|x\|$.

ج) (نامساوی مثلثی) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$.

در این حالت $\|\cdot\|$ یک نرم روی V نامیده می شود و زوج $(V,\|\ \|)$ را یک فضای نرم دار می گوییم.

۰-۳ تبصره: اگر V یک فضای نرم دار باشد و برای هر $x,y\in V$ قرار دهیم $d(x,y)=\|x-y\|$ آنگاه به وضوح دیده می شود که d یک متریک روی V است. بنابراین هر فضای نرم دار یک فضای متریک است. d متر تولید شده توسط نرم نامیده می شود.

۰-۴ تبصره: در فضای ضرب داخلی X تابع $x \mapsto \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$ تشکیل یک نرم می دهد و در این رساله منظور از نرم روی فضاهای با ضرب داخلی $\|x\| = |\langle x,x\rangle|^{\frac{1}{2}}$ می باشد.

۰-۵ تعریف: اگر فضای ضرب داخلی $\langle \cdot,\cdot\rangle$ نسبت به نرم تعریف شده کامل باشد آنگاه فضای ضرب داخلی یک فضای هیلبرت نامیده می شود. در این پایان نامه فضای هیلبرت با H نمایش داده خواهد شد .

۰-۶ تعریف: فضای نرم دار X یک فضای باناخ است، هرگاه X نسبت به متر تولید شده توسط نرم، یک فضای کامل باشد. بدین معنی که هر دنباله کوشی مانند $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ نست به متر تولید شده توسط نرم، همگرا به یک $x \in X$ باشد.

۰-۷ تبصره: فضاهای هیلبرت رده خاصی از فضاهای باناخ راتشکیل می دهند. بنابراین تمام قضایا در مورد فضای باناخ درباره فضاهای هیلبرت نیز برقرار است.

۰-۸ تعریف: فضای هیلبرت H که شامل یک زیر مجموعهٔ چگال شمارش پذیر باشد، فضای هیلبرت تفکیک پذیر نامیده می شود.

در این پایان نامه منظور از فضای هیلبرت، فضای هیلبرت تفکیک پذیراست.

۰-۹ تعریف: فرض کنید H یک فضای هیلبرت و $x, y \in H$ آنگاه بردارهای x و y را متعامد نامند (x بر y عمود است) اگر $\langle x, y\rangle = 0$ و در این صورت نوشته می شود $x \perp y$.

۰-۱۰ قضیه [1]: فرض کنید X یک فضای ضرب داخلی باشد. در این صورت، برای هر x و y در X داریم:

الف) (نامساوی کوشی-شوارتز) $\quad |\langle x, y\rangle| \le \|x\| \|y\|$

ب) (نامساوی مثلثی) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

ج) (قانون متوازی الاضلاع) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$

۰-۱۱ تعریف: مجموعهٔ $\{u_1, u_2, \ldots\}$ در فضای ضرب داخلی X متعامد گفته می شود، هر گاه برای هر $i \neq j$، $u_i \perp u_j$. به علاوه، اگر برای هر $i \ge 1$، $\|u_i\| = 1$ باشد، آنگاه آن مجموعه را متعامد یکه می نامند.

۰-۱۲ قضیه: فرض کنید $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک مجموعه متعامد یکه در فضای هیلبرت H باشد. در این صورت، شرایط زیر معادلند:

الف) $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک پایه متعامدیکه برای H است،

ب) برای هر $x \in H$، $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, u_i \rangle u_i$،

ج) برای هر $x \in H$، $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, u_i \rangle|^2$ (اتحاد پار سوال)،

د) $\overline{span}\ \{u_i\}_{i=1}^{\infty} = H$.

۰-۱۳ تعریف: فرض کنید $0 < p < \infty$ آنگاه $l^p(N)$ را بصورت زیر تعریف می کنیم.

$$l^p(N) := \left\{ \{x_n\}_{n \in N} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}.$$

۰-۱۴ قضیه [1]: فضای هیلبرت H دارای پایه متعامدیکه است اگر و تنها اگر تفکیک پذیر باشد.

۰-۱۵ قضیه (قضیهٔ فیثاغورث) [1]: اگر $f_1 \perp f_2$ باشد. آنگاه:

$$\|f_1 + f_2\|^2 = \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2.$$

۰-۱۶ **تعریـــف**: خـــانوادهٔ $\{f_i\}_{i\in I}$ یـــک پایـــه ریـــس بـــرای فضـــای هیلبـــرت H اســـت اگـــر: $H=\overline{span}\{f_i\}_{i\in I}\in l^2(I)$ و اعداد $A,B>0$ وجود داشته باشند به طـوری کـه بـرای هـر دنبالـهٔ $\{c_i\}_{i\in I}\in l^2(I)$ داشته باشیم:

$$A\sum_{i\in I}|c_i|^2 \le \sum_{i\in I}\|c_i f_i\|^2 \le B\sum_{i\in I}|c_i|^2$$

۰-۱۷ **قضیه**: اگر H و K فضاهای هیلبرت باشند و $T:H\to K$ یک تبدیل خطی باشد، تابع $\|\cdot\|$ روی فضای تبدیلهای خطی از H به K را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\|T\|=\sup\{\|Tx\|: x\in H, \|x\|\le 1\}$$

اگر $\|T\|<\infty$ باشد آنگاه گوییم که T کراندار مـی باشـد. تـابع تعریـف شـده فـوق روی فضـاهای تبدیل های خطی کراندار از H به K تشکیل یک نرم می دهد.

۰-۱۸ **تعریف**: مجموعهٔ همه تبدیلات خطی و کراندار از H به K با نمـاد $B(H,K)$ نمـایش داده می شود و اگر H و K با هم برابر باشند در این صورت از نماد $B(H)$ بجـای $B(H,K)$ اسـتفاده شده و به عناصر $B(H)$ عملگر گفته می شود. همچنین مجموعهٔ همه تبدیلات خطی و کـران دار از H به $\mathbb{C}$ را با $H^*=B(H,\mathbb{C})$ نمایش داده که دوگان H نامیده می شود.

۰-۱۹ **قضیه**[1]: برای هر تبدیل خطی $T:X\to Y$ شرایط زیر معادل اند:

الف) T در صفر پیوسته است،

ب) T پیوسته است،

ج) T کران دار است.

۰-۲۰ قضیه [1]: اگر $T \in B(X,Y)$، آنگاه عملگر یکتای $T^* \in B(Y,X)$ وجود دارد به طوری که برای هر $x \in X$ و $y \in Y$ داریم:

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$$

به علاوه $\|T^*\| = \|T\|$ و به T^* الحاقی T گفته می شود.

۰-۲۱ قضیه [1]: اگر $S,T \in B(H)$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ آنگاه:

الف) $(\alpha T + S)^* = \overline{\alpha} T^* + S^*$

ب) $(TS)^* = S^* T^*$

ج) $T^{**} = (T^*)^* = T$

د) اگر T معکوس پذیر و با معکوس T^{-1} باشد، آنگاه T^* معکوس پذیر و $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ است.

۰-۲۲ تعریف: فرض کنید $S,T \in B(H)$ در این صورت داریم:

الف) عملگر S خودالحاق است، هر گاه $S = S^*$. یعنی برای هر $x, y \in H$، $\langle Sx, y \rangle = \langle x, Sy \rangle$.

ب) عملگر S مثبت است، هر گاه برای هر $x \in H$،

$$\langle Sx, x \rangle \geq 0$$

در این حالت می نویسیم $S \geq 0$.

ج) گوییم که $S \geq T$، هر گاه $S - T \geq 0$.

۰-۲۳ **قضیه** [1]: اگر $T\in B(H)$ خود الحاق باشد، آنگاه

الف) برای هر $x\in H$، $\langle Tx,x\rangle$ یک عدد حقیقی است.

ب) $\|T\|=\sup\{|\langle Tx,x\rangle|:\|x\|=1\}$.

۰-۲۴ **لم:** همه عملگرهای مثبت خود الحاق هستند.

اثبات: فرض کنیم $S\in B(X)$ و $S\geq 0$. بنابراین برای هر $x\in X$،

$$\langle Sx,x\rangle=\overline{\langle Sx,x\rangle}=\langle x,Sx\rangle=\langle S^{*}x,x\rangle$$

آنگاه با توجه به قضیهٔ (۰-۲۱) که نشان دهنده یکتایی S^{*}، در صورت وجود می باشد، خواهیم داشت که $S=S^{*}$ و این یعنی S خود الحاق است.□

۰-۲۵ **قضیه** [1]: فرض کنید X یک فضای ضرب داخلی مختلط و $T:X\to X$ یک عملگر خطی باشد. اگر برای هر $x\in H$، $\langle Tx,x\rangle=0$، آنگاه $T=0$.

مثال زیر نشان می دهد که شرط مختلط بودن برای گزاره بالا الزامی است.

۰-۲۶ **مثال:** اگر $X=\Re^{2}$ و $T:\Re^{2}\to\Re^{2}$ چنان باشد که:

$$T(1,0)=(0,1)\quad,\quad T(0,1)=(-1,0)$$

آنگاه برای هر $x\in\Re^{2}$ داریم $\langle Tx,x\rangle=0$. در صورتی که واضح است که $T\neq 0$ می باشد.

۰-۲۷ **قضیه:** اگر H یک فضای هیلبرت و $f\in H$ باشد آنگاه:

$$\|f\|=\sup\{|\langle f,g\rangle|:g\in H\ ,\ \|g\|=1\}$$

اثبات: فرض کنید $g\in H$ باشد. طبق نامساوی کشی-شوارتز داریم:

$$\left|\langle f,g\rangle\right|\leq\|f\|\;\|g\|$$

از اینرو:

$$\sup_{\|g\|=1}\left|\langle f,g\rangle\right|\leq\|f\|$$

و از طرفی اگر $g_0:=\frac{f}{\|f\|}$ و $F\neq 0$ آنگاه:

$$\left|\langle f,g\rangle\right|=\frac{1}{\|f\|}\langle f,f\rangle=\frac{\|f\|^2}{\|f\|}=\|f\|$$

با توجه به مطالب بالا نتیجه می گیریم که:

$$\|f\|=\sup_{\|g\|=1}\left|\langle f,g\rangle\right|\ .\ \blacksquare$$

۰-۲۸ قضیه: فرض کنید $\overline{B(0,1)}=\{f\in H:\|f\|=1\}$ و H از بعد متناهی باشد آنگاه $B(0,1)$ یک مجموعه فشرده است.

اثبات: فرض کنید که $\dim H=n$، $x\in H$ و $c_1,\dots c_n\in\mathbb{C}$ می باشند که

$$x=c_1x_1+\ldots+c_nx_n$$

که در آن بردارهای $x_n\ ,\ \dots\ ,\ x_1$، پایه ای برای H می باشد. حال تبدیل T را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$T:H\to\mathbb{C}^n$$

$$x\mapsto(c_1,\dots,c_n)$$

واضح است که T خطی، یک به یک و پوشا می باشد حال با استفاده از این تناظر یک به یک توپولوژی روی H القا می گردد. بدین صورت که مجموعه U در H باز گفته می شود اگر و تنها اگر $T(U)$ در $\mathbb{C}^n$ باز باشد. بنابراین با این تعریف T همیومرفیسم است و H و $\mathbb{C}^n$ همیومرف،

پس H نیز همانند $\mathbb{C}^n$ دارای خاصیت هاینه بورل است. یعنی هر مجموعهٔ بسته و کـران دار در H فشرده است. از طرفی واضح است که $B(0,1)$ در H بسته و کران دار است، پس فشرده می باشد.□

۰-۲۹ قضـــیه (معکـــوس کـــران دار) [1]: فـرض کنیـد X و Y دو فضـــای بانـــاخ باشـــند. اگـــر $T \in B(X,Y)$ یک به یک و پوشا باشد، آنگاه $T^{-1} \in B(Y,X)$.

۰-۳۰ قضیه (قضیه نمایش ریس) [1][1]: اگر f یک تابعک خطی و کران دار روی فضای هیلبـرت H باشد، آنگاه عنصر یکتای y متعلق به H وجود دارد به طوری که برای هر $x \in H$،

$$f(x) = \langle x, y \rangle$$

بعلاوه $\|f\| = \|y\|$.

به عبارت دیگر قضیه فوق به هر تابعـک خطـی و کـران دار روی H، یـک ضـرب داخلـی نسـبت می دهد.

۰-۳۱ تعریف: فرض کنید X و Y فضاهای نرم دار باشند. تبدیل خطی $T : X \to Y$ از پایین کـران دار گفته می شود، هر گاه $B > 0$ موجود باشد به طوری که برای هر $x \in X$،

$$B\|x\| \leq \|Tx\|.$$

۰-۳۲ قضیه [1]: اگر M یک زیر فضای دلخواه از فضای هیلبرت باشد، آنگاه شرایط زیر برقرارند:

الف) $M^{\perp}$ یک زیر فضای بسته از H است.

---

[1] Riesz representation theorem

ب) $\overline{M}^{\perp} = M^{\perp}$, $\overline{M} = M^{\perp\perp}$.

ج) $\overline{M} = H$ اگر و تنها اگر $M^{\perp} = \{0\}$

که در آن $M^{\perp}$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$M^{\perp} = \{y \in H : \langle x, y \rangle = 0 \qquad \forall x \in M\}$$

۰-۳۳ قضیه [1]: اگر H_1 و H_2 دو فضای هیلبرت و $T \in B(H_1, H_2)$، آنگاه شرایط زیر برقرارند:

الف) $N(T) = R(T^*)^{\perp}$،

ب) $N(T^*) = R(T)^{\perp}$،

ج) $\overline{R(T)} = N(T^*)^{\perp}$،

د) $\overline{R(T^*)} = N(T)^{\perp}$.

۰-۳۴ تعریف: اگر X یک فضای برداری باشد، آنگـاه عملگـر خطـی $P : X \to X$ یـک تصـویر نامیده می شود هر گاه $P^2 = P$.

۰-۳۵ تعریف: فرض کنیم که M یک زیر فضای بسته از H باشد. عملگر P را که بر H تعریف شده، تصویر متعامد می نامیم اگر برای هر $m \in M$ و $n \in M^{\perp}$ داشته باشیم:

$$P(m+n) = m$$

۰-۳۶ قضیه [1]: $P \in B(H)$ یک تصویر متعامد است اگر و تنها اگر $P, P^2 = P$ خود الحاق باشد.

۰-۳۷ لم: ضرب داخلی بر روی $H \times H$ پیوسته است. یعنی اگـر در H، $x_n \to x$ و $y_n \to y$ در این صورت:

$$\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$$

اثبات: با توجه به نامساوی شوارتز و خواص ضرب داخلی داریم:

$$\left|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle\right| \le \left|\langle x_n, y_n - y\rangle\right| + \left|\langle x_n - x, y\rangle\right|$$

$$\le \|x_n\|\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\|y\| \to 0$$

اینک قضیه ای بیان می شود که به قضیه اصل کران داری یکنواخت معروف است.

۰-۳۸ قضیه [1]: فرض کنید X فضای باناخ و Y یک فضای نرم دار باشد. اگر $F \subseteq B(X,Y)$ باشد به طوری که برای هر $x \in X$، $\sup\{\|Ax\| : A \in F\} < \infty$ آنگاه $\sup\{\|A\| : A \in F\} < \infty$ است.

۰-۳۹ قضیه [1]: فرض کنید X یک فضای متریک کامل باشد آنگاه زیر مجموعهٔ M از X بسته است اگر و تنها اگر M به عنوان یک زیر فضا از X کامل باشد.

۰-۴۰ تعریف: گردایه m از زیر مجموعه های مجموعه X را یک σ- جبر در X نامیم اگر m دارای خواص زیر باشد.

۱) $X \in m$،

۲) هرگاه $A \in m$، آنگاه $A^c \in m$ که در آن A^c، متمم A نسبت به X است.

۳) هرگاه $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ و به ازای $n = 1,2,3,\ldots$، $A_n \in m$ آنگاه $A \in m$.

۰-۴۱ تعریف: یک اندازه مثبت تابعی است مانند μ که بر یک σ - جبر مانند m تعریف شده است، و بردش در $[0,\infty]$ است و جمعی شمارش پذیر می باشد. یعنی هر گاه $\{A_i\}$ گردایه ای شمارش پذیر و از هم جدا از اعضای m باشند، آنگاه:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

۰-۴۲ قضیه [1] : فرض کنید μ یک اندازه مثبت بر σ - جبر m باشد، در این صورت هر گاه $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ و $A_n \in m$ و $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ و $\mu(A_1)$ متناهی باشد آنگاه؛ $\mu(A_n) \to \mu(A)$.