دانشگاه فردوسی مشهد

دانشکده علوم ریاضی

ارائه شده جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی کاربردی

عنوان :

سیستم‌های دینامیکی با تأخیر زمانی

استاد راهنما :

دکتر محمد هادی فراهی

استاد مشاور :

دکتر علی وحیدیان کامیاد

نگارنده :

سارا براتی

فهرست مندرجات

پیشگفتار

تأخیر، در حقیقت مدت زمانی است که با وجود اعمال ورودی، خروجی سیستم ظاهر نمی‌گردد، یا به عبارت دیگر تأخیر زمانی عبارتست از مدت زمانی که از اعمال ورودی می‌گذرد تا سیستم شروع به دادن پاسخ به یک فرمان مشخص بنماید. دینامیک بسیاری از سیستم‌های کنترلی ممکن است به‌وسیله معادلات با تأخیر زمانی بیان شوند.
تأخیر در بسیاری از سیستم‌های دینامیکی مانند سیستم‌های زیست‌شناختی، سیستم‌های شیمیایی، سیستم‌های متالوژی، راکتورهای هسته‌ای، سیستم‌های هیدرولیکی و شبکه‌های الکتریکی اتفاق می‌افتد.
پیام الکتریکی کنترل یک روبات مدتی زمان می‌برد که از کنترل‌کننده به دست ربات برده شود.
مشابهاً اگر کنترل‌کننده‌های سکان‌های عمودی بال یک هواپیما در کابین خلبان قرار داده شده باشند، کنترل‌کننده‌ها می‌توانند فقط سکان‌های عمودی را با یک تأخیر معین کنترل کنند.
واکنش‌های شیمیایی به‌طور عادی، در یک لحظه و فوراً اتفاق نمی‌افتند. فرض کنید یک تولیدکننده بخواهد ماده‌ای با ویژگی ماده مخصوص مشتری تولید کند. ساختار این ماده با ویژگی‌های داده شده گهگاه فقط با یک کنترل دقیق از فرایند شیمیایی امکان‌پذیر است.
همچنین تأخیرها در حیاتی‌ترین کاربردها مطرح هستند.
مدلسازی دقیق و کنترل راکتورهای هسته‌ای موضوعی حیاتی است. درجه حرارت بخش داخلی راکتور هسته‌ای ممکن است برای اندازه‌گیری در دسترس نباشد. اگر درجه حرارت در بخش داخلی افزایش یابد، بعد از مدتی زمان (تأخیر)، درجه سطح راکتور هم افزایش خواهد یافت. بنابراین فقط اطلاعات قبلی درباره وضعیت برای اندازه‌گیری قابل استفاده است و می‌تواند در کنترل فرایند مورد استفاده قرار گیرد.
برخلاف معادلات دیفرانسیل معمولی(ODEs)، در معادلات دیفرانسیل با تأخیر(DDEs)، مشتق در هر زمان به جواب در زمان‌های قبلی بستگی دارد. به این علت یک تابع اولیه برای مشخص کردن مقدار جواب در زمان اولیه لازم است. در بسیاری از مدل‌های معمول این تابع اولیه ثابت است.
در این پایان‌نامه، پیش‌نیازهای لازم در فصل اول و دوم ارائه گردیده است.

در فصل سوم این پایان‌نامه، مسائل کنترل بهینه برای دسته‌ای از سیستم‌های غیرخطی با تأخیر زمانی [۱]، همراه با قیود کنترل—وضعیت آمیخته مورد مطالعه قرار می‌گیرند. تأخیر در سیستم‌ها در وضعیت و ورودی (کنترل) وجود دارد. نظریه کنترل بهینه براساس نظریه اندازه، آنالیز تابعی و برنامه‌ریزی خطی به منظور بهینه‌سازی یک تابع هدف معین و طراحی یک کنترل بهینه مناسب برای سیستم‌های غیرخطی با تأخیر زمانی توسیع داده می‌شود. با استفاده از فرایند نشاندن [۲]، مسأله در ابتدا به یک مسأله اندازه بهینه جدید تبدیل شده و سپس این مسأله جدید به می‌نیمم‌سازی یک فرم خطی بر روی زیرمجموعه‌ای از تساوی‌های خطی می‌انجامد. با حل این مسأله می‌نیمم‌سازی خطی، تقریبی از جواب مسأله اصلی به‌دست می آید.
از زمانی که مفهوم مجموعه فازی و متناظر با آن عملیات فازی به‌وسیله زاده [۳] [۳۸] معرفی شد، تلاش گسترده‌ای برای توسعه‌ی جنبه‌های متفاوتی از نظریه و کاربردهای سیستم‌های فازی، به‌ویژه نظریه معادلات دیفرانسیل با عدم قطعیت انجام شده است. در مورد سیستم‌های دینامیکی با تأخیر زمانی با احتمال عدم قطعیت، تاکنون پژوهش‌های زیادی انجام نشده است. بیشتر پژوهش‌های اخیر در مورد سیستم‌های دینامیکی با تأخیر زمانی، شکل قطعی [۴] این‌گونه سیستم‌ها بوده است.
در فصل چهارم این پایان‌نامه، دیدگاه جدیدی برای حل سیستم‌های دینامیکی با تأخیر زمانی فازی [۵] خطی و از مرتبه اول ارائه می‌کنیم. ما از یک نمایش عدد مختلط از مجموعه‌های α—تراز استفاده کرده و سپس جواب را با به‌کار بردن روش رانگ کوتا به‌دست می آوریم و در فصل پنجم پیشنهاداتی برای انجام پژوهش‌های بیشتر در زمینه سیستم‌های دینامیکی با تأخیر زمانی ارائه می‌شود.

[۱] Time-delay nonlinear systems
[۲] Embedding process
[۳] Zadeh
[۴] Crisp
[۵] Fuzzy time-delay dynamical systems

فصل ۱

مقدمه‌ای بر توپولوژی و آنالیز

در این فصل به بیان تعاریف و قضایای اساسی در توپولوژی و آنالیز که در بحث نظریه کنترل بهینه مورد استفاده ما خواهند بود، می‌پردازیم.

۱.۱ تعاریف و قضایای مورد نیاز

تعریف ۱ . فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد. گردایه τ از زیر مجموعه‌های X را یک توپولوژی روی X گویند هر گاه در سه شرط زیر صدق کند

۱) $X \in \tau$ و $\emptyset \in \tau$.

۲) اگر $O_۱ \in \tau$ و $O_۲ \in \tau$، آن‌گاه $O_۱ \cap O_۲ \in \tau$.

۳) اگر $\{O_i : i \in I\}$، یک گردایه از اعضای τ باشد آن‌گاه $\bigcup_{i\in I} O_i \in \tau$.

زوج (X, τ) را یک فضای توپولوژیک[1] و هر عضو τ را یک مجموعه باز می‌نامند. و اگر $x \in X$، آن‌گاه هر مجموعه‌ی باز شامل x را یک همسایگی از x گویند.

تعریف ۲. هر گاه $f_j \in C(\Omega)$، $j = ۱, ۲, \ldots, r$ باشد، همسایگی U_ε از صفر را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$U_\varepsilon = \{\mu \in M(\Omega) : |\mu(f_j)| < \varepsilon, \forall j = ۱, ۲, \ldots, r\}$$

[1] Topological space

که $M(\Omega)$ مجموعهٔ تمام اندازه‌های رادون روی Ω می‌باشد. در صورتی که به ازای εهای مختلف، U_εهای متناظر را به عنوان پایه‌های یک توپولوژی در نظر بگیریم، آن توپولوژی را توپولوژی ضعیف گویند.

تعریف ۳. زیرمجموعه A از فضای توپولوژیک X را بسته می گویند، هر گاه $A^{\complement} \subset X$ باز باشد که در آن $A^{\complement}$ متمم مجموعه A در X است.

قضیه ۱. ([۲۳]) فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. پس مجموعه‌های $\emptyset$ و X بسته هستند، اجتماع هر گردایه متناهی از مجموعه‌های بسته، نیز بسته است و اشتراک هر گردایه از مجموعه‌های بسته نیز بسته است.

تعریف ۴. فرض کنید A زیر مجموعه‌ای از فضای توپولوژیک X باشد. نقطه $x \in X$ یک نقطه مرزی[۲] A نامیده می‌شود هرگاه برای هر همسایگی O از x، داشته باشیم:

$$O \cap A \neq \emptyset \quad \wedge \quad O \cap A^{\complement} \neq \emptyset.$$

تعریف ۵. فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از فضای توپولوژیک X باشد. $x \in X$ را یک نقطه حدی[۳] A گویند هرگاه هر همسایگی از x شامل حداقل یک نقطه از A به‌جز x باشد.

تعریف ۶. فرض کنید $A \subset X$ و A' مجموعه نقاط حدی A باشد. در این‌صورت بستار A را با $\bar{A} = A \cup A'$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۲. ([۲۸]) مجموعه‌های A' و $\bar{A}$ بسته هستند.

تعریف ۷. مجموعه $A \subseteq X$ را در X چگال گویند هر گاه $\bar{A} = X$.

تعریف ۸. فرض کنید $\{G_i : i \in I\}$ رده‌ای از زیرمجموعه‌های باز فضای توپولوژیک X باشد و برای $A \subseteq X$ داشته باشیم $A \subset \bigcup_{i\in I} G_i$، در این‌صورت $\{G_i : i \in I\}$ را یک پوشش باز A گویند.

---

[۲] Boundary point

[۳] Limit point

تعریف ۹. زیرمجموعه A از فضای توپولوژیک X را فشرده گویند هرگاه هر پوشش باز از A دارای یک زیر پوشش متناهی باشد.

تعریف ۱۰. رده[۴] $\{A_i : i \in I\}$ از مجموعه‌ها دارای خاصیت اشتراک متناهی است اگر هر زیر رده‌ی متناهی از آن اشتراک ناتهی داشته باشد.

قضیه ۳. ([۲۳]) فضای توپولوژیک X فشرده است اگر و فقط اگر هر رده‌ی $\{F_i : i \in I\}$ از زیر مجموعه‌های بسته X که در خاصیت اشتراک متناهی صدق کند، خود دارای اشتراک ناتهی باشد.

قضیه ۴. ([۲۳]) فرض کنید (X,τ) و (Y,τ^*) دو فضای توپولوژیک باشند. تابع $f : (X,\tau) \longrightarrow (Y,\tau^*)$ پیوسته است اگر و فقط اگر به ازای هر مجموعه باز B در Y، $f^{-1}(B)$ در X باز باشد یعنی اگر $B \in \tau^*$ باشد آن‌گاه $f^{-1}(B) \in \tau$.

تعریف ۱۱. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را دارای محمل فشرده گویند هر گاه بستار مجموعه $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ فشرده باشد، ($\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی است).

تعریف ۱۲. گردایه $\mathbb{A}$ از زیر مجموعه‌های مجموعه ناتهی X، یک جبر مجموعه‌ها نامیده می‌شود اگر در شرایط زیر صدق کند:

۱) اگر $A \in \mathbb{A}$ و $B \in \mathbb{A}$، آن‌گاه $A \cup B \in \mathbb{A}$.

۲) اگر $A \in \mathbb{A}$ آن‌گاه $A^{\complement} \in \mathbb{A}$.

تعریف ۱۳. جبر $\mathbb{A}$ یک $\sigma-$جبر نامیده می‌شود هر گاه اجتماع هر گردایه شمارش‌پذیر از عناصر $\mathbb{A}$ در $\mathbb{A}$ باشد.

تعریف ۱۴. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. $\sigma-$جبر تولید شده به‌وسیله مجموعه‌های باز(بسته) در X را $\sigma-$جبر بورل[۵] گویند و عضوهای آن را مجموعه‌های بورل می‌نامند.

---

[۴] Collection

[۵] Borel σ-algebra

تعریف ۱۵. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی و M یک σ—جبر از زیر مجموعه‌های X باشد. در این‌صورت تابع $\mu : M \longrightarrow [0,\infty]$ یک اندازه روی M است هر گاه:

۱) $\mu(\emptyset) = 0$.

۲) برای هر دنباله $\{E_i\}$ از عناصر مجزای M، $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$.

تعریف ۱۶. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی، M یک σ—جبر از زیرمجموعه‌های X و μ یک اندازه روی M باشد. در این‌صورت، (X, M) را یک فضای اندازه‌پذیر، (X, M, μ) را یک فضای اندازه و عناصر M را مجموعه‌های اندازه‌پذیر گویند.

تعریف ۱۷. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی و $\mathbb{B}_X$، σ—جبر بورل باشد، تابع اندازه $\mu : \mathbb{B}_X \longrightarrow [0,\infty]$ را اندازه بورل گویند.

تعریف ۱۸. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی و $P(X)$ مجموعه تمام زیر مجموعه‌های X باشد. تابع $\mu^* : P(X) \longrightarrow [0,\infty]$ را یک اندازه بیرونی[6] گویند هر گاه:

۱) $\mu^*(\emptyset) = 0$

۲) اگر $A \subset B$ آن‌گاه $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

۳) اگر A_j، $j = 1, 2, \ldots$، عضوهایی در $P(X)$ باشند آن‌گاه $\mu^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j)$.

تعریف ۱۹. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد. مجموعه $E \subset X$، μ^*—اندازه‌پذیر است هر گاه برای هر مجموعه $A \subset X$ داشته باشیم:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^{\complement}).$$

تعریف ۲۰. فرض کنید M مجموعه‌ای از زیر مجموعه‌های μ^*—اندازه‌پذیر (به‌راحتی می‌توان نشان داد که M یک σ—جبر است) مجموعه $\mathbb{R}$ باشد. تابع اندازه μ را اندازه لبگ[7] گویند هرگاه برای هر $E \in M$ داشته باشیم:

$$\mu(E) = \mu^*(E).$$

---

[6] Outer measure

[7] Lebesgue measure

تعریف ۲۱. فرض کنید (X, M) یک فضای اندازه‌پذیر باشد. اندازه علامت‌دار[۸] ν روی M، تابعی مانند $\nu : M \longrightarrow [-\infty, \infty]$ است به‌طوری که :

۱) ν حداکثر یکی از دو مقدار $-\infty$ یا ∞ را بگیرد.

۲) $\nu(\emptyset) = ۰$.

۳) برای هر دنباله $\{E_i\}$ از مجموعه‌های مجزا و اندازه‌پذیر داشته باشیم: $\nu(\bigcup E_i) = \sum \nu(E_i)$.

تعریف ۲۲. فرض کنید (X, M) یک فضای اندازه‌پذیر باشد. تابع $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را اندازه‌پذیر گویند هرگاه برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$، مجموعه $\{x \in X : f(x) < \alpha\}$ اندازه‌پذیر (یا متعلق به M) باشد.

تعریف ۲۳. فضای توپولوژیک (X, τ) را هاسدورف[۹] گویند هرگاه برای هر $x \in X$ و $y \in X$، $(x \neq y)$ همسایگی‌های $O_۱$ شامل x و $O_۲$ شامل y موجود باشند به‌طوری که $O_۱ \cap O_۲ = \emptyset$.

تعریف ۲۴. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک موضعاً فشرده و هاسدورف باشد و $\mathbb{B}_X$ یک σ—جبر بورل باشد. اندازه رادون[۱۰] μ، یک اندازه بورلی است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱) μ روی همه‌ی مجموعه‌های فشرده متناهی باشد.

۲) μ روی همه‌ی مجموعه‌های باز منظم داخلی باشد. یعنی برای هر $B \in \mathbb{B}_X$، $\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \subset B\}$ به‌طوری که K فشرده است.

۳) μ روی $\mathbb{B}_X$ منظم خارجی باشد. یعنی برای هر $B \in \mathbb{B}_X$، $\mu(B) = \inf\{\mu(U) : B \subset U\}$ به‌طوری که U باز است.

تعریف ۲۵. فرض کنید (X, τ) یک فضای توپولوژیک و $\mathbb{B}_X$، σ—جبر بورل باشد. برای هر مجموعه $A \in \mathbb{B}_X$، اندازه اتمی[۱۱] به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta_z(A) = \begin{cases} ۱, & z \in A \text{ اگر } \\ ۰, & z \notin A \text{ اگر }. \end{cases}$$

[۸] Signed measure

[۹] Hausdorff topological space

[۱۰] Radon measure

[۱۱] Atomic measure

تعریف ۲۶. فرض کنید f یک تابع اندازه‌پذیر نامنفی روی مجموعه A باشد و مجموعه متناهی $\{A_i : i = ۱, ۲, \ldots, n\}$ یک افراز از A باشد به‌طوری که A_i، $i = ۱, ۲, \ldots, n$، اندازه‌پذیر باشند و

$$S = \sum_{i=۱}^{n} (\inf_{z \in A_i} f(z)) \mu(A_i),$$

لذا انتگرال تابع f نسبت به اندازه μ به‌صورت زیر است:

$$\int_A f d\mu = \sup S,$$

به‌طوری که سوپریمم روی تمام افرازهای ممکن مجموعه A که اندازه‌پذیر باشند، گرفته می‌شود. در صورتی که مقدار فوق موجود و متناهی باشد تابع f، μ—اندازه‌پذیر نامیده می‌شود.
در مورد توابعی که شرط نامنفی بودن را ندارند می‌توان نوشت $f = f^+ - f^-$ که f^+ و f^- توابعی نامنفی هستند و داریم:

$$\int_A f d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu$$

تعریف ۲۷. تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ مجموعه اعداد مختلط) را به‌طور مطلق پیوسته گویند اگر برای هر $\varepsilon > ۰$ دلخواه، $\delta > ۰$ ای موجود باشد به‌طوری که برای هر مجموعه متناهی از بازه‌های مجزا $(a_۱, b_۱)$، $\cdots$، (a_n, b_n) که $\sum_{j=۱}^{n} (b_j - a_j) < \delta$، داشته باشیم $\sum_{j=۱}^{n} |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon$.

قضیه ۵. ([۱۳]) فرض کنید $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$، در این‌صورت گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

۱) F به‌طور مطلق پیوسته است.

۲) f ای انتگرال‌پذیر وجود دارد به‌طوری که $F(x) - F(a) = \int_a^x f(t) dt$.

۳) F تقریباً همه‌جا روی $[a, b]$ مشتق‌پذیر است و $F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t) dt$.

تعریف ۲۸. تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ را پیوسته لیپ‌شیتز[۱۲] گویند اگر $M > ۰$ ای وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $x \in \mathbb{R}$ و $y \in \mathbb{R}$، $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$.

لم ۱. ([۱۳]) تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ پیوسته لیپ‌شیتز است اگر و تنها اگر f به‌طور مطلق پیوسته و مشتق آن تقریباً همه‌جا کراندار باشد (یعنی $|f'| \leq M\ a.e.$).

---

[۱۲] Lipschitz continuous

تعریف ۲۹. فرض کنید X یک فضای متری باشد. زیر مجموعه E از X را کلاً کراندار[۱۳] گویند اگر برای هر $\varepsilon > 0$، E توسط تعداد متناهی گوی به شعاع ε پوشیده شود.

تعریف ۳۰. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک و $C(X)$ مجموعه تمام توابع مختلط پیوسته باشد. $F \subset C(X)$ را هم‌پیوسته گویند هرگاه برای هر $x \in X$ و هر $\varepsilon > 0$ همسایگی از x مانند U وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $y \in U$ و هر $f \in F$، $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

تعریف ۳۱. مجموعه F در تعریف ۲۹ را نقطه به نقطه کراندار گویند اگر برای هر $x \in X$، $\{f(x) : f \in F\}$ یک مجموعه کراندار در $\mathbb{C}$ باشد.

قضیه ۶. ([۱۳]) فرض کنید X یک فضای فشرده و هاسدورف باشد. اگر $F \subset C(X)$ هم‌پیوسته و نقطه به نقطه کراندار باشد آن‌گاه F کلاً کراندار است و بستار F در $C(X)$ فشرده است.

تعریف ۳۲. فرض کنید $\{(X_i, \tau_i) : i = 1, 2, \ldots, n\}$ رده‌ای از فضاهای توپولوژیک باشد و $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$. در این‌صورت توپولوژی τ را بر X با پایه‌ی $B = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$، تعریف می‌کنیم، به‌طوری که $G_i \in \tau_i$، $i = 1, 2, \ldots, n$. به این توپولوژی، توپولوژی حاصل‌ضربی گفته می‌شود.

قضیه ۷. ([۲۳]) حاصل‌ضرب فضاهای فشرده، فشرده است.

قضیه ۸. ([۲۳]) حاصل‌ضرب فضاهای بسته، بسته است.

قضیه ۹. ([۲۳]) حاصل‌ضرب فضاهای هاسدورف، هاسدورف است.

تعریف ۳۳. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. تابع $f : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$ را نیم‌پیوسته پایینی گویند اگر برای هر $a \in \mathbb{R}$، مجموعه‌ی $\{x \in X : f(x) > a\}$ باز باشد و $f : X \longrightarrow [-\infty, \infty)$ را نیم‌پیوسته بالایی گویند اگر برای هر $a \in \mathbb{R}$، مجموعه $\{x \in X : f(x) < a\}$ باز باشد.

---

[۱۳] Totally bounded

تعریف ۳۴. فرض کنید تابع حقیقی f بر $[a,b]$ تعریف شده باشد و در نقطه $x \in (a,b)$ ناپیوسته باشد. f در x ناپیوستگی نوع اول دارد اگر حدود چپ و راست در این نقطه موجود باشند اما با هم مساوی نباشند، و در غیر این صورت ناپیوستگی نوع دوم دارد.

تعریف ۳۵. فرض کنید $(X,\mathbb{B},\mu)$ یک فضای اندازه باشد. μ یک اندازه متناهی گفته می‌شود اگر $\mu(X) < \infty$ و σ—متناهی گفته می‌شود اگر دنباله $\{X_n\}$ از مجموعه‌ها طوری باشد که $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ و $\mu(X_n) < \infty$، $n = 1, 2, \ldots$.

تعریف ۳٦. اگر $\{(X_i, \mathbb{B}_i, \mu_i) \, : \, i = 1, 2, \ldots, n\}$ رده‌ای از فضاهای اندازه باشد برای هر $A \subset X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$، اندازه μ^* را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mu^*(A) = \inf \sum \mu_1(B_1)\mu_2(B_2) \ldots \mu_n(B_n),$$

به‌طوری که مجموع روی گردایه‌ی $\{B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n \, : \, B_i \in \mathbb{B}_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$ است و اینفیمم روی مجموعه‌هایی به شکل زیر گرفته می‌شود:

$$A \subset \bigcup_{B_i \in \mathbb{B}_i} B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n.$$

در تعریف بالا فرض کنید برای هر i، $X_i = \mathbb{R}$، μ_i اندازه لبگ و $\mathbb{B}_i$، σ—جبر حاوی مجموعه‌های باز(بسته) باشد که در آن پایه توپولوژی بازه‌هایی به شکل (a,b) هستند. در این‌صورت، μ^* که از تعریف قبل به‌دست می آید را اندازه بیرونی لبگ در $\mathbb{R}^n$ می‌گوییم. به عنوان مثال اگر A یک مجموعه در $\mathbb{R}^2$ باشد در این‌صورت $\mu^*(A)$ مساحت A است و اگر A یک مجموعه در $\mathbb{R}^3$ باشد، حجم A را نشان می‌دهد.

قضیه ۱۰. ([۲۲]) نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ از فضای متری (X,d) به‌توی یک فضای متری $(Y,\tilde{d})$، در نقطه‌ی $x_0 \in X$ پیوسته است اگر و تنها اگر دنباله $\{x_n\}$ به x_0 میل کند آن‌گاه $\{f(x_n)\}$ به $f(x_0)$ میل کند.

تعریف ۳۷. فرض کنید X یک فضای خطی روی $\mathbb{R}$ باشد تابع نامنفی $\|.\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک نرم[۱۴] گویند اگر

۱) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

۲) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

---

[۱۴] Norm

۳) برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$، $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

تعریف ۳۸. اگر $(X, \mathbb{B}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد فضای توابع اندازه‌پذیر روی X با شرط $\int |f|^p d\mu < \infty$ که p یک عدد حقیقی مثبت است را با نماد $L^p(\mu)$ نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم:

$$\|f\|_p = (\int_X |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}},$$

و مشاهده می‌شود که $\|.\|_p$ خاصیت اول نرم را ندارد.
اما اگر تابع f پیوسته باشد تعریف فوق تمام خواص یک نرم را خواهد داشت.

تعریف ۳۹. فرض کنید X یک فضای خطی نرم‌دار باشد. نگاشت $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک تابعی خطی گویند اگر رابطه‌ی $F(\alpha x + \beta y) = \alpha F(x) + \beta F(y)$، برای هر $x \in X$، $y \in X$، $\alpha \in \mathbb{R}$ و $\beta \in \mathbb{R}$ برقرار باشد و F کراندار گفته می‌شود اگر یک عدد حقیقی نامنفی M وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $x \in X$، $|F(x)| \leq M\|x\|$. پس تعریف می‌کنیم:

$$\|F\| = \sup\{|F(x)| : \|x\| \leq ۱\}.$$

از تعریف فوق نتیجه می‌شود که برای هر $x \in X$ داریم:

$$|F(x)| \leq \|F\|\|x\|.$$

قضیه ۱۱. ([۲۲]) تابعی خطی $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$، پیوسته است، اگر و فقط اگر کراندار باشد.

قضیه ۱۲. ([۲۹]) **قضیه نمایش ریس:** فرض کنید X یک فضای فشرده و هاسدورف باشد و $C(X, \mathbb{R})$ فضای توابع حقیقی و پیوسته روی X باشد. در این‌صورت، برای هر تابعی خطی، مثبت و کراندار Λ که روی $C(X, \mathbb{R})$ تعریف می‌شود یک اندازه برل مثبت μ، به‌طور یکتا وجود دارد به‌طوری که برای هر $F \in C(X, \mathbb{R})$، داریم:

$$\Lambda(F) = \int_X F d\mu.$$

فصل ۲

فازی، دانشی برای برخورد با عدم قطعیت

۱.۲ مقدمه

نظریه فازی در سال ۱۹٦۵ توسط پروفسور زاده[۱] معرفی گردید. اگرچه سیستم‌های فازی پدیده‌های غیر قطعی و نامشخص را توصیف می‌کنند، با این حال خود نظریه فازی یک نظریه دقیق است[۴۰]. منطق فازی معتقد است که ابهام، در ماهیت علم است. بر خلاف دیگران که معتقدند باید تقریب ها را دقیق تر کرد تا بهره‌وری افزایش یابد، پروفسور زاده بر این باور است که باید به دنبال ساختن مدل‌هایی بود که ابهام را به عنوان بخشی از سیستم مدل کند. در منطق ارسطویی (کلاسیک)، برای تمامی گزاره‌ها فقط دو حالت درست یا نادرست وجود دارد. بنابراین جمله‌ی «هوا سرد است» در مدل ارسطویی اساساً یک گزاره نمی باشد، چرا که مقدار سرد بودن برای افراد مختلف متفاوت است و این جمله اساساً همیشه درست یا نادرست نیست.

در منطق فازی، جملاتی هستند که تا حدودی درست یا نادرست هستند. برای مثال جمله‌ی «هوا سرد است» یک گزاره‌ی منطقی فازی است که گاهی کاملاً درست و گاهی تا حدودی درست است. منطق فازی می تواند بنیان‌گذار فناوری‌های جدیدی باشد که تاکنون هم دستاوردهای فراوانی داشته است.

---

[۱] Zadeh

۲.۲ تاریخچه

در سال ۱۹۶۵ پروفسور زاده استاد علوم کامپیوتر دانشگاه برکلی [۲] کالیفرنیا، منطق فازی را مطرح نمود. مقاله کلاسیک پروفسور زاده درباره مجموعه فازی که در این سال به چاپ رسید، سرآغاز جهتی نوین در علوم و مهندسی سیستم و کامپیوتر بود.
در سال ۱۹۷۳ او مقاله دیگری را به نام «طرح یک راه حل جدید برای تجزیه و تحلیل سیستم‌های پیچیده و فرایندهای تصمیم گیری» منتشر کرد. این مقاله اساس کنترل فازی را بنا نمود. در سال ۱۹۷۵ ممدانی [۳] و اسیلیان [۴] چهارچوب اولیه‌ای را برای کنترل کننده‌ی فازی مشخص کردند و کنترل کننده‌ی فازی را به یک موتور بخار اعمال نمودند. نتیجه ی آن کار در مقاله‌ای تحت عنوان «آزمایشی در سنتز زبانی با استفاده از یک کنترل کننده‌ی فازی» منتشر گردید. در سال ۱۹۹۳ بخش سیستم‌های فازی IEEE گشایش یافت. منطق فازی و تئوری سیستم‌های فازی و کنترل در اواخر دهه‌ی ۸۰ و اوایل دهه ۹۰ رشد چشم گیری پیدا کرد و پیشرفت هایی در زمینه برخی مسائل اساسی سیستم‌های فازی صورت گرفت[۴۰].

۳.۲ مجموعه‌های فازی

نظریه فازی بر مبنای نظریه‌ی مجموعه‌های فازی [۵] شکل گرفته است. قبل از بیان نحوه‌ی نمایش مجموعه‌های فازی، روش‌های نمایش مجموعه‌های کلاسیک توضیح داده می شود.
یک مجموعه کلاسیک A را می توان با فهرست کردن اعضا، یا با مشخص کردن ویژگی اعضای مجموعه و یا با روش تعلق تعریف کرد. در روش تعلق، یک تابع مشخصه [۶] یا تابع عضویت دو مقداری $\{0,1\}$ به صورت زیر برای A تعریف می شود که با $\mu_A(x)$ نشان داده می‌شود[۴۰].

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \text{ اگر} \\ 0, & x \notin A \text{ اگر.} \end{cases}$$

بدین ترتیب با معلوم بودن تابع مشخصه‌ی یک مجموعه، برای تمام اعضای عضو مجموعه‌ی مرجع، اعضای آن مجموعه نیز مشخص می شوند.
برخلاف مجموعه‌ی مزبور یک مجموعه‌ی فازی، برای هر عضو متعلق به مجموعه، درجه (اندازه)ای را

---

[۲] Berkeley
[۳] Mamdani
[۴] Assilian
[۵] Fuzzy sets
[۶] Characteristic function

بیان می کند. از این رو تابع مشخصه‌ی یک مجموعه‌ی فازی به ازای هر عضو، مجاز به داشتن هر مقداری بین صفر و یک است که درجه عضویت آن عضو را در آن مجموعه نشان می‌دهد.

۱.۳.۲ مجموعه‌های فازی و توابع عضویت

اگر U مجموعه‌ی مرجع و x عضوی از آن باشد، آنگاه یک مجموعه‌ی فازی A در U به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب مطابق زیر تعریف می گردد:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in U\},$$

که در آن μ_A، تابع عضویت[۷] برای مجموعه‌ی فازی A نامیده می شود. تابع عضویت، هر عنصری از U را به یک درجه عضویت بین صفر و یک نگاشت می کند. بدیهی است که یک مجموعه‌ی فازی، بسط ساده‌ای از یک مجموعه‌ی کلاسیک است که در آن تابع عضویت مجاز به داشتن هر مقداری بین صفر و یک خواهد بود. اگر مقدار تابع عضویت μ_A محصور به صفر و یک شود، آنگاه A به یک مجموعه‌ی کلاسیک کاهش می‌یابد و μ_A تابع مشخصه A می‌شود[۵].

۲.۳.۲ انواع توابع عضویت

یک مجموعه‌ی فازی منحصراً با تابع عضویت خویش مشخص می‌گردد. از این رو در این قسمت به معرفی تعدادی از این توابع می پردازیم.

- **تابع عضویت مثلثی**[۸]
یک تابع عضویت مثلثی به وسیله‌ی سه پارامتر $\{a, b, c\}$ مطابق رابطه‌ی زیر تعیین می‌شود:

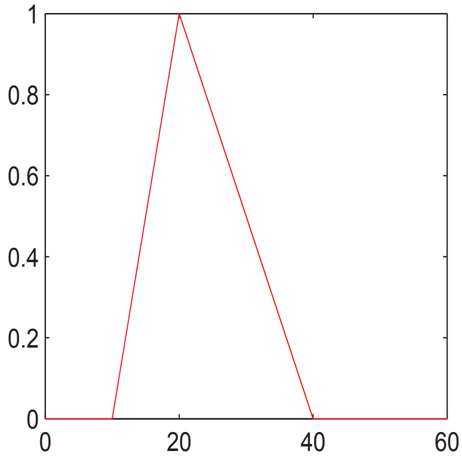
$$\text{triangle}(x; a, b, c) = \begin{cases} 0, & \text{اگر } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{اگر } a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b}, & \text{اگر } b \leq x \leq c \\ 0, & \text{اگر } c \leq x. \end{cases}$$

پارامترهای $\{a, b, c\}$، (با شرط $a < b < c$) سه گوشه‌ی تابع عضویت مثلثی را تعیین می کنند. شکل ۱.۲ یک تابع عضویت مثلثی را (تعریف شده با مثلث $(x; 10, 20, 40)$) نشان می دهد.

---

[۷] Membership function

[۸] Triangular membership function



شکل ۱.۲: تابع عضویت مثلثی.

- **تابع عضویت ذوزنقه‌ای**[۹]

یک تابع عضویت ذوزنقه‌ای با چهار پارامتر $\{a, b, c, d\}$ مطابق رابطه‌ی زیر تعیین می‌شود:

$$\mathrm{trapezoid}(x; a, b, c, d) = \begin{cases} 0, & \text{اگر } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{اگر } a \leq x \leq b \\ 1, & \text{اگر } b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c}, & \text{اگر } c \leq x \leq d \\ 0, & \text{اگر } d \leq x. \end{cases}$$

پارامتر های $\{a, b, c, d\}$، (با شرط $a < b < c < d$) چهار گوشه‌ی تابع عضویت ذوزنقه‌ای را تعیین می کنند.

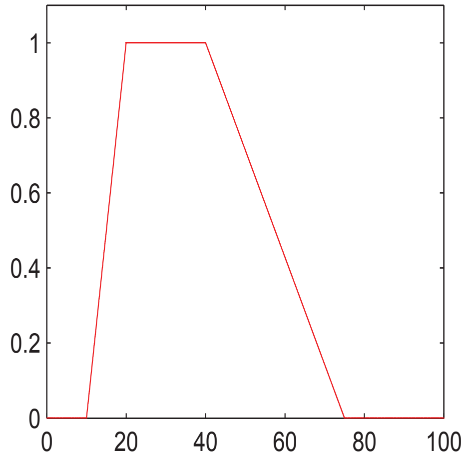
شکل ۲.۲ یک تابع عضویت ذوزنقه‌ای را (تعریف شده با ذوزنقه، ((x; ۱۰, ۲۰, ۴۰, ۷۵)) نشان می‌دهد.

به سبب سادگی این روابط و کارایی محاسباتی آنها، هر یک از دو تابع عضویت مثلثی و ذوزنقه ای در کاربردهای مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرند.

به هر حال از آنجا که این توابع عضویت از خطوط راست تشکیل شده‌اند، در نقاط گوشه‌ای که توسط پارامترها مشخص شده‌اند، هموار نیستند. در ادامه به معرفی دیگر انواع توابع عضویت یکنواخت و غیر خطی می‌پردازیم.

---

[۹] Trapezoidal membership function

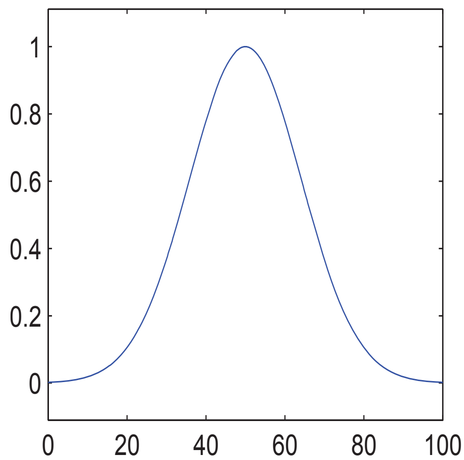


شکل ۲.۲: تابع عضویت ذوزنقه‌ای.

- **تابع عضویت گوسی**[۱۰]
یک تابع عضویت گوسی با دو پارامتر $\{c, \sigma\}$، مطابق رابطه‌ی زیر تعیین می‌شود:

$$\text{guassian}(x; c, \sigma) = e^{\frac{-(x-c)^{۲}}{\sigma^{۲}}},$$

که در آن c مرکز و σ پهنای تابع عضویت است. شکل ۳.۲ ترسیمی از یک تابع عضویت گوسی (تعیین شده با $\text{guassian}(x; ۵۰, ۲۰)$) است.



شکل ۳.۲: تابع عضویت گوسی.

[۱۰] Gaussian membership function