بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه اصفهان
دانشکده علوم
گروه فیزیک

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته فیزیک گرایش آزاد

رویکرد حالت‌های همدوس در نظریه‌ی کوانتش هندسی

استاد راهنما:
دکتر رسول رکنی‌زاده

پژوهشگر:
ناز شکرانی

مهرماه ۱۳۸۸

فهرست مطالب

چکیده:

از آغاز پیدایش مکانیک کوانتومی، همواره چگونگی ارتباط بین دنیای کلاسیک با دنیای کوانتومی مورد توجه بسیاری از ریاضی فیزیکدانان واقع شده‌است. نظریه‌های متعدد کوانتش، ثمره‌ی تلاش‌های مستمری است که در جهت درک رابطه‌ی این دو حوزه انجام شده‌است. ضرورت وجود نظریه‌های کوانتش از این بابت است که اولاً مکانیک کوانتومی بدون مکانیک کلاسیک نه قابل درک است نه قابل صورتبندی، ثانیاً، عدم سازگاری نظریه‌ی کوانتومی با رکن دیگر فیزیک مدرن، نسبیت عام، لزوم بازنگری عمیق تری در صورت‌بندی کوانتومی سامانه‌های دینامیکیِ دارای فضای فاز پیچیده (غیر تخت) را ایجاب می کند. از طرف دیگر هیچ یک از نظریه‌های کوانتش موفق روز نتوانسته‌اند چون نظریه‌ی کوانتش هندسی، کارایی خود را در کوانتش سامانه‌هایی با هندسه‌ی پیچیده به اثبات برسانند. با استفاده از کوانتش هندسی و با انتخاب بستری مناسب (صورتبندیِ هامیلتونیِ مکانیک کلاسیک)، دستورالعملی برای کوانتش سامانه‌های یاد شده ارائه می‌کنیم که هندسه‌ی مکانیک کلاسیک را در توصیف کوانتومی آن بازتاب کند.اما در کوانتش هندسی تنها رده‌ی خاصی از مشاهده‌پذیرهای کلاسیک، کوانتش‌پذیرند. این رده از مشاهده‌پذیرها به مفهومی به نام قطبش بستگی پیدا می‌کنند. قطبش در کوانتش هندسی انتخابی است و انتخاب آن در اغلب موارد با پیچیدگی‌هایی همراه است. برای اجتناب از چنین پیچیدگی‌هایی از حالت‌های همدوس در کوانتش هندسی بهره می‌گیریم. حالت‌های همدوس که برای اولین بار توسط شرودینگر در سال ۱۹۲۶ در سیستم نوسانگر هماهنگ ساده کشف شدند و در سال ۱۹۶۰ توسط گلاوبر و کلاودر برای مطالعهٔ رفتارهمدوس پرتوهای نوری گسیل شده ازلیزرها به‌کار برده‌شدند، حالت‌هایی هستند که میانگین یا مقدار چشم داشتی عملگر مکان دراین حالت ها از معادلهٔ کلاسیک تبعیت می کند؛ از این‌رو این حالت ها به عنوان واسطه ای بین مکانیک کلاسیک و کوانتومی مطرح گردیدند. استفاده از حالت‌های همدوس در کوانتش هندسی در عین حفظ ظرائف حاصل از این روشِ کوانتش، فرآیند کوانتش را کوتاه و محاسبات لازم را ساده می‌کند؛ زیرا در این صورت نیازی به انتخاب قطبش نیست و فرآیند کوانتش در گام اول کوانتش هندسی، یعنی پیش‌کوانتش، کامل خواهد شد. بنابراین می‌توان گفت رویکرد حالت‌های همدوس بهترین رویکرد در کوانتش هندسی می‌باشد.

در این پایان نامه ابتدا بازنگرشی هندسی به مکانیک کلاسیک داریم و صورتبندیِ هامیلتونیِ مکانیک کلاسیک را (به عنوان نقطه‌ی آغاز کوانتش هندسی) در فصل اول معرفی می‌کنیم. سپس در فصل دوم مروری اجمالی به نظریه‌های کوانتش داریم و دلیل برگزیده شدن کوانتش هندسی را خواهیم دید. کوانتش هندسی را به تفصیل در فصل سوم معرفی می‌کنیم: دو گام کوانتش هندسی، پیش‌کوانتش و قطبش را تعریف کرده و به حل چند مثال با استفاده از دستورالعمل ذکر شده می‌پردازیم. در فصل چهارم با مفهوم حالت‌های همدوس و تعمیم آن‌ها آشنا می‌شویم. در آخر در فصل پنجم رویکرد حالت‌های همدوس به کوانتش هندسی را خواهیم دید و از طریق یک مثال، محاسن حاصل از استفاده از حالت‌های همدوس را نشان خواهیم داد.

Abstract:

Since the advent of quantum mechanics, the relation between classical and quantum theory has always been the matter of concern of many mathematical physicist. Several quantization methods are introduced to connect these two domains. We can understand the necessity of quantization according to the fact that quantum mechanics can niether be understood nor be formulated without coresponding classical mechanics description. Moreover the contrast between quantum mechanincs and the other part of modern physics, i.e. general relativity, has made us think about a new formulation of quantum description of dynamical systems on curved spaces. In quantization methods is geometric quantization the most efficient prescription for quantizing system of complicated geometry. Using the geometric quantization method, we are capable of quntizing a restrictet class of classical obsrvables, namely the quantizable ones. However the class of quantizable observables depends strongly on polarization which is selective and its selection is usually complicated. Avoiding these complications, we use the family of coherent states in our method. These states were first found in harmonic oscillator by Schroedinger in 1926 and were used by Glauber and Klauder in 1960 to study the coherent behavior of lasers. In these states, the expectation value of position operator obeys the classical equation and therefore these are the most appropriate mapping between classical and quantum mechanical states. By using these states in geometric quantization we can avoid the confusing selection of polarization.

This thesis is orgonaized as follows: In chapter one we will discuss the geometric aspects of classical mechanics and Hamiltonian formalism. In chapter two we give a brief review of some quantization methods. In chapter three we will introduce geometric quantization in details, followed with some examples solved by this method. Chapter four is devoted to presenting coherent states and their generalizations. In our last chapter one can see how coherent states make our quantization method more efficient and we will present an example to visualize our idea.

فصل ۱

مقدمه‌ای بر رویکرد هندسی به مکانیک کلاسیک

۱ مقدمه

مکانیک کلاسیک نه تنها قدیمی‌ترین شاخه‌ی فیریک است، زیربنای اصلی فیزیک نظری نیز هست. از سویی دیگر، مکانیک کلاسیک سرشار از جنبه های هندسی است. در این فصل مکانیک کلاسیک را به زبان هندسی صورت‌بندی می کنیم[۱] و با آوردن مثال هایی قابلیت هندسی سازیِ مکانیک کلاسیک را به وضوح نشان می دهیم. ابتدا به تعریف برخی واژگانی از هندسه دیفرانسیل می‌پزدازیم که در این پایان‌نامه به چشم می‌خورد[۲] [۳].

تعریف ۱.۱ یک سیستم U از زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی X یک توپولوژی روی X تعریف می‌کند اگر U موارد زیر را شامل شود:

۱) مجموعه‌ی صفر و خود مجموعه‌ی X

۲) هر اجتماعی از زیرسیستم‌های دلخواه از X

۳) هر اشتراکی از زیرسیستم‌های متناهی دلخواه از X

مجموعه‌ها در U را مجموعه‌های باز[۱] از فضای توپولوژی (X,U) می‌نامیم که می‌توان آنها را به طور خلاصه X نامید.

---

۱ Open Sets

تعریف ۲.۱ همئومورفیزم[۲] (همریختی‌دیفرانسیلپذیر) یک نگاشت پوششی دوسویه[۳] ی f است که خودش و وارونش پیوسته است [۴].

تعریف ۳.۱ یک کارت مختصات[۵] m−بعدی روی فضای توپولوژی X ، یک مجموعه‌ی باز U از X (که دامنه‌ی کارت مختصات نامیده می‌شود)، همراه با همئومورفیزم $\phi : U \to V$ از U به درون یک مجموعه‌ی باز V در $\mathbb{R}^m$ است.

تعریف ۴.۱ اگر $(U_۱, \phi_۱)$ و $(U_۲, \phi_۲)$ را دو کارت مختصاتm−بعدی روی فضای توپولوژی X در نظربگیریم که $U_۱ \bigcap U_۲ \neq ۰$، آنگاه تابع همپوشانی [۶] بین دو کارت مختصات، نگاشت $\phi_۲ \circ \phi_۱^{-۱}$ از زیرمجموعه‌ی باز $\phi_۱(U_۱ \bigcap U_۲) \subset \mathbb{R}^m$ به زیرمجموعه‌ی باز $\phi_۲(U_۱ \bigcap U_۲) \subset \mathbb{R}^m$ است.

تعریف ۵.۱ یک اطلس [۷] m−بعدی روی فضای توپولوژی X ، خانواده‌ای از کارت‌های مختصات m−بعدی $(U_i, \phi_i)_{i\in I}$ (که I مجموعه اندیس است) است به گونه‌ای که،

۱) X توسط این خانواده پوشانده می‌شود به‌گونه‌ای‌که $X = \bigcup_{i\in I} U_i$؛

۲)هر تابع همپوشانی $i,j \in I$, $\phi_j \circ \phi_i^{-۱}$ ، یک نگاشت هموار(C^∞) از $\phi_i(U_i \bigcap U_j)$ به $\phi_j(U_i \bigcap U_j)$ در$\mathbb{R}^m$ است.

اطلس را کامل [۸] می‌گوییم اگر هیچ اطلس دیگری آنرا در برنگیرد(شامل نشود).
برای یک اطلس کامل، خانواده‌ی $(U_i, \phi_i)_{i\in I}$ را یک ساختار دیفرانسیلپذیر [۹] روی X می‌نامیم که m−بعدی است. فضای توپولوژی X دراین‌صورت یک خمینه‌ی دیفرانسیلپذیر[۱۰] یا یک m−خمینه (اگر به بعد خمینه صریحاً اشاره داشته باشیم) گفته‌می‌شود.

تعریف ۶.۱ نقطه‌ی $p \in U \subset X$ دارای مختصات $(\phi^۱(p), \phi^۲(p), ...\phi^m(p)) \in \mathbb{R}^m$ مربوط به کارت (U, ϕ) است، که در آن توابع مختصات $\mu = ۱, ۲, ..., m$, $\phi^m : U \to \mathbb{R}^\mu$ ، برحسب توابع برافکنش

[۲] Homeomorphism
[۳] Bijection
[۴] Bicontinuous
[۵] Coordinate Chart
[۶] Overlap Function
[۷] Atlas
[۸] Compelete
[۹] Differential Structure
[۱۰] Differential Manifold

$u^\mu(x) := x^\mu$, $u^\mu : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\phi^\mu(p) := u^\mu(\phi(p)) \qquad (۱-۱)$$

توابع مختصات معمولاً به صورت $\mu = ۱, ۲, ..., m$, x^μ و مختصات نقطه‌ی خاص p به صورت یک m—تایی از اعداد حقیقی $x^۱(p), x^۲(p), ..., x^m(p)$ نوشته‌می‌شوند.

۲ خمینه‌ی هموار

تعریف خمینه های دیفرانسیل پذیر با شناخت مااز $\mathbb{R}^n$ ارتباط نزدیکی دارد[۱] .
فضای $\mathbb{R}^n$ یک فضای توپولوژیک است. یعنی می توان آنرا به وسیله یک گردایه (کلکسیون) از مجموعه‌های باز پوشش داد که شرایط خاصی را برآورده می کنند.
در $\mathbb{R}^n$ به ازای هر دونقطه مختلف همیشه می توان همسایگی هایی از این نقاط را به گونه‌ای تعریف کرد که با یکدیگر همپوشانی نداشته باشند. یعنی $\mathbb{R}^n$ یک فضای هاسدورف ($Hausdorf$) است. همچنین برای $\mathbb{R}^n$ می توان یک گردایهٔ B ازمجموعه‌های باز درنظر گرفت به گونه ای که هر زیرمجموعه از $\mathbb{R}^n$ را بتوان به صورت اجتماعی از عناصر B نمایش داد. مجموعه B را **پایه** می نامند.
حتی برای هر نقطه p از فضای $\mathbb{R}^n$ می توان گردایهٔ شمارش پذیری از همسایگی‌های $\{U_i\}$ از p داشت که برای هر همسایگی U از p، یک i وجود داشته باشد که به ازاء آن، همسایگی U_i کاملاً در U قرارمی‌گیرد. از این $\{U_i\}$ می‌توان یک پایهٔ شمارش پذیر با مفهوم فوق ساخت.
به طور خلاصه، **$\mathbb{R}^n$ یک فضای توپولوژیک هاسدورف با پایه شمارش پذیر است.**
دقیقاً همین ویژگی ها در تعریف یک خمینه وجود دارند. با وجود آنکه تعریف دقیق خمینه پیچیده‌تر است، اما خمینه‌هایی که در مکانیک با آنها روبرو می شویم اغلب به طور بدیهی دارای ویژگی‌های بالا می باشند.
اغلب فضاهای فیزیکی، غیراقلیدسی اما فضاهای توپولوژیک هاسدروف با پایه‌های شمارش پذیرند که ساختار دیفرانسیل نیز با خوددارند. در واقع این خمینه‌ها به طور موضعی اقلیدسی اند.
فرض کنید M یک فضای توپولوژیک با بعد n، $dimM = n$.، باشد.
بنا به تعریف «کارت» یا «دستگاه مختصات موضعی» در M یک همئومورفیزم است:

$$\varphi : U \subset M \longrightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \qquad (۲-۱)$$

که یک مجموعه باز U متعلق به M را، به یک مجموعه باز $\varphi(U)$ متعلق به $\mathbb{R}^n$ می نگارد.
در عمل اگر توابع مختصات f^i را بعد از نگاشت φ اثر دهیم، آنگاه برای هر نقطه $p \in U \subset M$ یک نمایش مختصات در $\mathbb{R}^n$ بدست می آید:

$$x^i = f^i \circ \varphi \quad \varphi(p) = (x^۱(p), ..., x^n(p)) \in \mathbb{R}^n \qquad (۳-۱)$$

به این ترتیب این امکان به وجود می آید که اشیاء هندسی مانند منحنی‌ها، میدانهای برداری و غیره را روی $U \subset M$ (یعنی به طور موضعی روی M) تعریف کرد. اما باید این اشیاء هندسی روی همه M تعریف شوند (زیرا این اشیاء

کمیات فیزیکی را نشان می دهند.) و نیز لازم است ارتباط بین کمیات فیزیکی (اشیاء هندسی) مستقل از مختصات یا کارت ها باشند تا معادلات حرکت هموردا باشند.

پس، خمینهٔ M با مجموعه‌های باز U و V و W و... پوشانده می شود، طوری که هر نقطه $p \in M$ حداقل در یکی از مجموعه‌ها قرارداشته باشد.

به ازای هر همبند V,U,...یک همئومورفیزم φ و Ψ و... انتخاب می شود به گونه‌ای که U به $\varphi(U)$ در $\mathbb{R}^n$ و V به $\Psi(V)$ در $\mathbb{R}^n$ و... نگاشته می شود.

اگر U و V در M همپوشانی داشته باشند، تصاویر آنها در $\mathbb{R}^n$ نیز همپوشانی دارند از این‌رو نگاشت های $\varphi \circ \Psi^{-1}$ و $\Psi \circ \varphi^{-1}$، $\varphi(U)$ و $\Psi(V)$ در $\mathbb{R}^n$ را به هم می نگارد.

اگر نگاشتهای $\varphi \circ \Psi^{-1}$ و $\Psi \circ \varphi^{-1}$ هموار باشند، گفته می شود دو دستگاه مختصات (φ, U) و (Ψ, V) به‌طور هموار همپوشانی دارند و می توان صحبت از«تعویض کارت » کرد. روی M یک اطلس تعریف می شود که گردآیه‌ای از کارت‌ها روی M با ویژگی های زیراست:

(A۱) هر نقطه M از خمینه در حوزه‌ی حداقل یک کارت قرارداشته باشد.

(A۲) هر دو کارت از اطلس به طور هموار همپوشانی داشته باشند.

(A۳) هر کارت که با کارتهای دیگر همپوشانی هموار دارد، باید به اطلس متعلق باشد.

آنچه از تعریف اطلس بدست می آید، آن است که با داشتن یک اطلس می توان از اشیاء هندسی که روی M تعریف شده‌اند، مثلاً مشتق گیری کرد. در عمل مشتق گیری از تصویر این اشیاء در$\mathbb{R}^n$ انجام می شود.

چون کارتهای اطلس به طور دیفئومورفیزم به یکدیگر مربوطند، می توان این کار را روی همه M انجام داد.

به این ترتیب اطلس یک ساختار دیفرانسیل روی خمینه M تعریف می‌کند و بنابراین اطلس یک حساب سازگار روی M به دست می دهد.

ویژگی (A۳) مانع از آن می‌شود که دواطلسِ در ظاهر متفاوت که حسابهای یکسانی روی M بدست می دهند، برای M تعریف شوند. در واقع ویژگی (A۳) ماکزیمال بودن اطلس $\mathcal{A}$ را بیان می کند.

اکنون با این مفاهیم می توان قوانین و روابط فیزیکی را روی خمینه‌های غیراقلیدسی توصیف کرد.

اشیائی که روی M می توانند تعریف شوند، از طریق نگاشت کارتی قابل تصور می شوند و می توان از طریق یک حساب سازگار، آنها را مورد مطالعه قرارداد که این حساب در $\mathbb{R}^n$ آشناست.

خمینه‌ی دیفرانسیل پذیر هموار،از طریق دوتایی خمینه واطلس ، $(M, \mathcal{A})$ تعریف می شود: زیرا ساختار توپولوژیک آن با تعریف M و ساختار دیفرانسیل پذیر روی M با اطلس کامل $\mathcal{A}$ داده می شود.

۳ برخی تعاریف مهم روی خمینه‌ها

در این فصل از انواع اشیاء هندسی که با مکانیک در ارتباطند و روی خمینه‌ها تعریف می شوند، سخن خواهیم گفت.

این مبحث را با یک مفهوم کلی آغاز می کنیم؛ نگاشت F از خمینه هموار M با اطلس $\mathcal{A}$ به خمینه هموار N با

اطلس $\mathcal{B}$ (که می تواند همان خمینه M باشد) را در نظر می گیریم :

$$F : (M, \mathcal{A}) \longrightarrow (N, \mathcal{B}) \qquad (۱-۴)$$

نگاشت F پیوسته است هرگاه نگاشت معکوسِ مجموعه‌های باز، مجموعه های باز باشد. (نه اینکه لزوماً مجموعه های باز را به مجموعه‌های باز بنگارد.)
فرض می کنیم ابعاد خمینه های M و N به ترتیب m و n باشند. اگر (φ, U) یک کارت از اطلس $\mathcal{A}$ و (Ψ, V) کارتی از اطلس $\mathcal{B}$ باشد به گونه ای که $F(U)$ کاملاً در V قرارداشته باشد، آنگاه نگاشت ترکیبی زیر نگاشتی بین فضاهای اقلیدسی $\mathbb{R}^m$ و $\mathbb{R}^n$ است:

$$\Psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \Psi(V) \subset \mathbb{R}^n \qquad (۱-۵)$$

اگر نگاشت بالا برای هر $p \in M$ و $(\varphi, U) \in \mathcal{A}$ و $(\Psi, V) \in \mathcal{B}$ دارای این ویژگی باشد که $F(U)$ کاملاً در V قرارداشته باشد، آن گاه نگاشت F هموار یا دیفرانسیل پذیر است.

۱-۳ توابع و منحنی ها روی خمینه ها

یک تابع هموار روی خمینه M نگاشتی از M به اعداد حقیقی است:

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R} : p \in M \longmapsto f(p) \in \mathbb{R} \qquad (۱-۶)$$

f یک نگاشت دیفرانسیل پذیر است.
مثال اول: هامیلتونی به هر نقطه فضای فاز $\mathbb{P}$ یک عدد حقیقی نسبت می دهد. (البته اگر هامیلتونی وابسته به زمان باشد آنگاه $M = P \times \mathbb{R}_t$ و $H(q, p, t) \in \mathbb{R}$.
مثال دوم : نگاشت $x^i = f^i \circ \varphi$ یک تابع روی M است که به هر نقطه $p \in U \subset M$ مختصهٔ i ام آن در کارت (φ, U) را نسبت می دهد.

$$\varphi(p) = (x^1(p), ..., x^n(p)) \quad , \quad p \in M$$

x^i ها مختصات در $\mathbb{R}^n$ را نشان می دهند.
مجموعه همه این توابع هموار روی M با $\mathcal{F}(M)$ نمایش داده می شود.

با مفهوم منحنی هموار $\gamma(t)$ در یک فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ آشنا هستیم؛ منحنی هموار $\gamma(t)$ در یک فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ نگاشتی از یک بازه I از اعداد حقیقی (مثلاً محور زمان $\mathbb{R}_t$) به $\mathbb{R}_n$ است:

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n : \tau \in \mathbb{R} \longmapsto \gamma(\tau) \in \mathbb{R}^n \qquad (۱-۷)$$

بازه I می تواند از $-\infty$ تا $+\infty$ باشد.
اگر $\{e_i\}$ یک پایه استاندارد در $\mathbb{R}^n$ باشد آنگاه:

$$\gamma(\tau) = \sum_{i=1}^{n} \gamma^{(i)}(\tau)\, e_i$$

منحنی های هموار روی خمینه اختیاری N به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow N : \tau \in I \longmapsto \gamma(\tau) \in N \qquad (۱-۸)$$

اگر (Ψ, V) یک کارت روی N باشد، آنگاه برای آن قسمت از منحنی که در V قرارمی گیرد $\Psi \circ V$ یک منحنی در $\mathbb{R}^n$ است. با استفاده از کامل بودن اطلس روی N می توان منحنی را به عنوان یک کل، از یک کارت به کارت دیگر دنبال کرد.

دو نکته:

۱) منحنی های هموار غالباً به صورت معادلات دیفرانسیل مرتبه اول ظاهر می شوند. اگر I $\tau_\circ \in I$ ، $p_\circ = \gamma(\tau_\circ) \in \mathbb{R}^n$ نقطه ای از منحنی است که در زمان $\tau_\circ$ ، $\gamma(\tau)$ از آن عبور می کند.
اگر از منحنی نسبت به زمان مشتق بگیریم: $\dot{\gamma}(\tau) = \frac{d\gamma(\tau)}{d\tau}$ آنگاه:

$$\dot{\gamma}(\tau_\circ) = \sum_{i=1}^{n} \dot{\gamma}^i(\tau_\circ)\, e_i =: v_{p_\circ}$$

بردار مماس بر منحنی در نقطه $p_\circ$ خواهد بود.
حال فرض می شود که بردارهای مماسی v_p روی منحنی در تمام نقاط آن $p \in \gamma(\tau)$ رسم شده است، تصویر به وجود آورده را ساختار قطعه‌ای منحنی پاسخ می گویند.
اگر بردارهای مماسی در تمام نقاط $\mathbb{R}^n$ یا ناحیه ای از آن (نه فقط در امتداد منحنی $\gamma(\tau)$)معلوم باشند و نیز میدان برداریِ حاصل هموار باشد، آن گاه $\gamma(\tau)$ یک نمایش از شار کل پاسخ های معادله دیفرانسیل زیر است

$$\dot{\alpha}(\tau) = v_{\alpha(\tau)} \qquad (۱-۹)$$

۲) فرض می کنیم y یک نقطه دلخواهِ ثابت در $\mathbb{R}^n$ باشد. $T_y\mathbb{R}^n$ مجموعهٔ همه بردارهای مماس به تمام منحنی های هموار ممکنی که از y می گذرند، است .
این مماس ها یک فضای برداری می سازند، زیرا می توان آنها را جمع و یا در یک عدد حقیقی ضرب کرد و حاصل بازهم یک مماس به یک منحنی هموار است.

فضای $T_y\mathbb{R}^n$ با $\mathbb{R}^n$ ایزومورف است(مثلاً بردارهای مماس برمنحنی ها در فضای $\mathbb{R}^n$ ، را می توان در همان فضای منحنی ها رسم کرد.)

اگر تابع هموار $f(x)$ را روی $\mathbb{R}^n$ (یا در یک همسایگی باز از نقطه y) درنظر بگیریم و نیز یک بردار $\vec{v} = \sum v^i e_i$ از $T_y\mathbb{R}^n$ ، آنگاه مشتق تابع $f(x)$ در جهت $\vec{v}$ در نقطه y به صورت زیر است:

$$v(f) := \sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\, |_{x=y} \qquad (۱-۱۰)$$

v^i بردار یکه مماس در جهت x^i است.

این **مشتق جهتی** به هر تابع $f(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ یک عدد حقیقی با توجه به معادله فوق نسبت می دهد.

$$v : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R} : f \longmapsto v(f) \qquad (۱-۱۱)$$

این مشتق جهتی دارای ویژگی های زیر است:
اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع روی $\mathbb{R}^n$ و a و b دو عددحقیقی باشند، آن‌گاه

$$v(af+bg)(y)=av(f)+bv(g) \tag{۱۲—۱}$$

($\mathbb{R}$—خطی)

$$v(f.g)(y)=v(f)g(y)+f(y)v(g) \tag{۱۳—۱}$$

(قاعده لایب نیتز)

۳—۲ بردارهای مماسی روی یک خمینه هموار

اگر خمینه دو بعدی M که در یک فضای $\mathbb{R}^۳$ نشانده شده را درنظر بگیریم و در نقطه y روی آن بردارهای مماسی را رسم کنیم، یک صفحه $\mathbb{R}^۲$ مماس بر M در نقطه y، به دست می آوریم.
به همین ترتیب فضای مماسی بر خمینه n بعدی که در فضای $\mathbb{R}^n+۱$ نشانده شده است، فضای تخت n بعدی $\mathbb{R}^n$ است که آن را با TyM نشان می دهیم. مثلاً فضای مماس بر کره‌ی دو بعدی، عبارت است از صفحات دو بعدی که این صفحات در یک فضای سه بعدی $\mathbb{R}^۳$ نشانده شده‌اند و نمی توان همه‌ی آن‌ها را در یک فضای تختِ دو بعدی نشاند. بنابرآنچه گفته شد با عنصری از TyM می توان از توابع روی M مشتق جهتی گرفت که نگاشتی با ویژگی های خطی و قاعده‌ی لایب نیتزاست.

تعریف ۷.۱ بردار مماسی v روی M در نقطه $p\in M$ یک تابع حقیقی بصورت:

$$v:\mathcal{F}(M)\longrightarrow\mathbb{R} \tag{۱۴—۱}$$

است، (به آن تابع حقیقی می گوییم، زیرا فضای برداری توابع روی M، $\mathcal{F}(M)$ را به اعداد حقیقی می نگارد) که ویژگی های آن عبارتند از:

$$v(af+bg)=av(f)+bv(g)$$
$$v(f.g)_p=v(f)g(p)+f(p)v(g)$$

در اینجا $f,g\in\mathcal{F}(M)$, $a,b\in\mathbb{R}$ هستند.

ویژگی‌دوم نشان می دهد که v یک مشتق گیری است.
فضای T_pM ، فضای همه بردارهای مماسی در نقطه p ، یک فضای برداری حقیقی است، اگر برای همه توابع f روی خمینه و عدد حقیقی a داشته باشیم :

$$(v_۱+v_۲)f=v_۱(f)+v_۲(f)$$
$$(av)(f)=av(f)$$

بعد این فضای برداری، همان بعد خمینه M است.
در حالت کلی نمی توان از تابع $g\in\mathcal{F}(M)$ روی M مشتق گیریِ جزئی کرد ولی برای تصویر g روی کارتهای

موضعی این امر امکان پذیر است.
فرض کنید (φ,U) یک کارت باشد، $p\in U$ یک نقطه از M و g یک تابع روی M است.
$g\circ\varphi^{-1}$ نگاشتی است که $\mathbb{R}^n$ را به $\mathbb{R}$ می نگارد، یعنی تابعی روی $\mathbb{R}^n$ است.
مشتق توابع روی $\mathbb{R}^n$ را می شناسیم، پس مشتق $g\circ\varphi^{-1}$ نسبت به توابع مختصاتِ f^i در نقطه $\varphi(p)$ از فضای $\mathbb{R}^n$ به صورت زیر است:

$$\partial_i\mid_p(g)\equiv\frac{\partial g}{\partial x^i}\mid_p:=\frac{\partial(g\circ\varphi^{-1})}{\partial f^i}(\varphi(p)) \tag{۱-۱۵}$$

یعنی تغییرات g نسبت به x^i (مختصات نقطه p روی خمینه M) در نقطه p برابر است با تغییرات $g\circ\varphi^{-1}$ نسبت به f^i (مختصات نقطه $\varphi(p)$ در $\mathbb{R}^n$) در نقطه $\varphi(p)$.
لذا $\partial_i g$ مشتق g در مختصات موضعی (φ,U) است.
توابع:

$$\partial_i\mid_p\equiv\frac{\partial}{\partial x^i}\mid_p:\ \mathcal{F}(M)\longrightarrow\mathbb{R}\ :\ g\longmapsto\frac{\partial g}{\partial x^i}\mid_p\quad,\quad i=۱,۲,...,n \tag{۱-۱۶}$$

دارای ویژگی های خطی و قاعده‌ی لایب نیتز هستند، بنابراین متعلق به بردارهای مماسی روی $p\in U\subset M$ می باشند.

از ملاحظات بالا دو نکته زیر دست می آید:
نکته اول: می توان به کمک ∂_i ها مشتقات جزئیِ توابع هموارِ g روی M را تعریف کرد؛
به این ترتیب که g را به وسیله کارتها به یک فضای اقلیدسی تصویر می کنیم، واز این تصویر مشتق می گیریم .
نکته دوم: می توان نشان داد:

$$\partial_۱\mid_p,\partial_۲\mid_p,...,\partial_n\mid_p$$

پایه‌ای برای فضای برداری T_pM تشکیل می دهند به گونه ای که هر بردار مماسی در این فضا دارای نمایش کارتی زیر است:

$$v=\sum_{i=۱}^{n}v(x^i)\ \partial_i|_p \tag{۱-۱۷}$$

x^i عبارت است از $f^i\circ\varphi$.
نتیجه: به هر نقطه‌ی p از خمینه هموار و اختیاری M یک فضای برداری T_pM نسبت داده می شود که بردارهای مماسی M در نقطه‌ی p، عناصری از این فضا هستند. اگر (φ,U) یک کارت روی M باشد که نقطه p را شامل شود، آنگاه n بردارِ $\partial_i|_p$ ، $i=۱,...,n$ تشکیل یک پایه در فضای T_pM می دهند: این بردارها به طور خطی مستقلند وهر بردار v از T_pM را می توان به صورت ترکیب خطی آنها نوشت. ضرایب این بردارهای یکه، نقش مؤلفه های بردار مماس در این پایه را دارند.

۳—۳ کلاف مماسیِ یک خمینه

به ازاء هر نقطه p و q و r و ... از خمینه هموار M، یک فضای مماسی یکتا، T_pM، T_qM T_rM و ... وجود دارد. این فضاها با هم متفاوت اند، ولی بعد آنها یکسان است. اجتماع همه فضاهای مماسی یک خمینه، خود یک خمینه‌ی هموار است:

$$TM = \bigcup_{p\in M} T_pM \tag{۱—۱۸}$$

TM را« کلاف مماسی » می گویند. اگر بعد M، n باشد، بعد TM برابر با $2n$ است. M فضای پایه و فضای مماسی T_pM در نقطه p، تار نامیده می شود. TM را می توان مانند M به کمک کارت های موضعی و اطلس توصیف نمود.

هر کارت (φ,U) یک نگاشت دیفرانسیل پذیر از همسایگی U از M به $\mathbb{R}^n$ است.

اگر فضای مماسی بر $U \subset M$ را درنظر بگیریم: $TU := \bigcup_{p\in u} T_pM$

که TU خود، زیرمجموعه‌ای از TM است، تحت نگاشت φ از U به $\mathbb{R}^n$، بردارهای مماسی در نقطه p (مماس ها بر منحنی هایی که از p می گذرند)، به طور خطی به بردارهای مماسی در $\mathbb{R}^n$ در نقطه $\varphi(p)$ نگاشته می شوند.

این نگاشت با $T\varphi$ نشان داده می شود.

$$T\varphi := TU \longrightarrow \varphi(U)\times\mathbb{R}^n;$$

$T\varphi$ همه ویژگی های نگاشت های کارتی را دارد. برای هر کارت (φ,U) از اطلس M، یک کارت $(T\varphi,TU)$ برای TM به وجود می آید که آنرا «**کارت کلاف** » می گویند.

هر نقطه TM با دو داده مشخص می شود:

$$v\in T_pM \quad , \quad p\in M \quad \text{با} \quad (p,v)$$

علاوه بر آن، به طور طبیعی یک برافکنش از TM به M وجود دارد:

$$\pi : TM \longrightarrow M \ : \ (p,v)\longmapsto p\ ;\ p\in M\ ,\ v\in T_pM \tag{۱—۱۹}$$

به طوری که به هر عنصر از تار T_pM نقطه پای p را نسبت می دهد.

۳—۴ میدان های برداری

روی خمینه‌های هموار میدان های برداری (به هر نقطه از فضا یک بردار نسبت می دهند) مثال هایی از مفاهیم به طور شهودی آشنا در فیزیک هستند که باآنها زیاد روبرو می شویم، مانند: میدان سرعت‌ها، میدان نیروها، میدان برداری هامیلتونی و ...

در بخش قبل در تعریف بردارهای مماسی، همه بردارهای مماس به یک نقطه p از خمینه M مدنظربود، اما میدان های برداری برای هر نقطه از خمینه فقط یک بردار مماس خاص از فضای مماسی را انتخاب می کند.

تعریف ۸.۱ یک میدان برداری V روی خمینه M یک تابع است که به هر نقطه $p \in M$ یک بردار مماسی V_p از T_pM نسبت می دهد:

$$V : M \longrightarrow TM \ : \ p \in M \longmapsto V_p \in T_pM \tag{۱—۲۰}$$

دیدیم که بردارهای مماسی روی توابع هموار خمینه M کنش می کنند و حاصل مشتق جهتی تعمیم یافته خواهد بود. لذا میدان برداری نیز روی توابع هموار اثر می کند: $\quad V : \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$

$$V(f)(p) := V_p(f) \ ; \ \ f \in \mathcal{F}(M) \tag{۱—۲۱}$$

که در آن V_p نمایندهٔ میدان برداری V در نقطه p است.

میدان برداری V هموار نامیده می شود اگر $V(f)$ برای همه توابع هموار روی M، هموار باشد.

میدان برداری V به هر نقطه $p \in M$ عنصر (p, v) از TM را نسبت می دهد، لذا نگاشتی از M به TM است. اگر در پیِ این نگاشت یک برافکنش اعمال کنیم، حاصل، یک نگاشت همانی خواهد بود:

$$\sigma : M \longrightarrow TM \quad , \quad \pi : TM \longrightarrow M \ \longrightarrow \ \pi \circ \sigma = id_M$$

σ را «مقطع» در TM می نامیم.

لذا یک میدان برداری یک مقطع دیفرانسیل پذیر است.

میدان‌های برداری مختصات یا همان میدان‌های پایه برای نمایش موضعی یک میدان برداری به کار می روند و از طریق نگاشت:

$$\partial_i : U \longrightarrow TU \ : \ p \in U \longmapsto \partial_i \mid_p \tag{۱—۲۲}$$

به عنوان میدان های برداری هموار فضای مماسی روی مجموعه باز U تعریف می شوند. اگر $\varphi(p) = (x^1(p), ..., x^n(p))$ مختصات نقطه p باشد، بسط میدان برداری V برحسب میدانهای پایه روی کارت (φ, U) به صورت زیر است :

$$V = \sum_{i=1}^{n} (V x^i) \, \partial_i \tag{۱—۲۳}$$

اثر میدان‌های مماسی روی یک تابع، خود یک تابع حقیقی است(اثر میدان برداری روی یک تابع در نقطه‌ی p ، درواقع تابعی است از نقطه‌ی p).

$$V \in \mathcal{X}(M) : f \in \mathcal{F}(M) \longrightarrow V(f) \in \mathcal{F}(M) \ : \ f(p) \longmapsto V_p(f)$$

این نگاشت دارای خواص خطی و قاعده‌ی لایب نیتز است یعنی روی f مانند یک مشتق گیری عمل می کند. بنابراین می توان میدان‌های برداری را به عنوان مشتقات مجموعه توابع هموار روی M مطرح کرد. به بیان دیگر، فضای برداری حقیقی مشتقات $\mathbb{R}$– خطی $\mathcal{F}(M)$ با فضای برداری حقیقی $\mathcal{X}(M)$ ایزومورف است.

تعریف ۹.۱ جابجاگردو میدان X و Y از فضای $\mathcal{F}(M)$:

$$Z = [X, Y] := XY = XY - YX \qquad (۲۴-۱)$$

X یا Y روی تابع هموار f کنش می کند و دوباره یک تابع به دست می دهند. اثر جابجاگرها روی f نیز خود یک تابع هموار است و بنابراین تعریف شده می باشد:

$$Zf = X(Yf) - Y(XF)$$

چون X و Y از ویژگی‌های خطی و قاعده‌ی لایب نیتز پیروی می کنند، اگر به جای Z قراردهیم $[X, Y]$:

$$Z(fg) = (XY - YX)(fg)$$

آنگاه $[X, Y]$ نیز یک میدان برداری است.

تذکر ۱۰.۱ جابجاگر $[X, Y]$ همان «مشتق لی» میدان برداری Y در راستای X است: میدان برداریِ X یک جریان تعریف می‌کند.منظور همه‌ی پاسخ‌های معادله دیفرانسیل $\dot{\alpha}(\tau) = X_{\alpha(\tau)}$ می باشد. چگونگی تغییر اشیاء هندسی (توابع، میدانهای برداری و ...) در امتداد این جریان، به معنی مشتق گیری از آنها در امتداد X است. این نحوه مشتق گیری جزیی را «مشتق لی » می نامند و با L_X نشان می دهند.
اثر مشتق لی روی تابع هموار f :

$$L_X(f) = X(f) = \sum X(x^i)\ \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

اثر مشتق لی روی یک میدان برداری:

$$L_X Y = [X, Y]$$

$L_X Y$ ، خود یک میدان برداری است.
یکی از ویژگی‌های مشتق لی اینست که : $L_{[X,Y]} = [L_X, L_Y]$

۳−۵ فرم‌های بیرونی

تعریف ۱۱.۱ یک ۱− فرمی عبارت است از نگاشت:

$$\begin{aligned} \omega \quad &: M \longrightarrow T^*M \\ &: p \longmapsto \omega_p \in T^*M \end{aligned}$$

یعنی به هر نقطه $p \in M$ یک عنصر ω_p در T_p^*M نسبت می دهد.
ω_p یک نگاشت خطی از T_pM به اعداد حقیقی نیز هست: $\omega_p(v_p) \in \mathbb{R}$

به طور کلی می توان ω را در هر نقطه p ، روی هر میدان برداری X در نقطه p اثر داد که مقدار آن در نقطه p با عدد حقیقی $\omega_p(X_p)$ داده می‌شود. از این‌رو:

تعریف ۱۲.۱ ۱–فرمی ω هموار نامیده می شود اگر تابع $\omega(X)$ به ازاء هر میدان برداری $X \in \mathcal{X}(M)$ ، هموار باشد.

مجموعه همه ۱–فرمی های هموار روی M با $\mathcal{X}^*(M)$ نشان داده می شود، که همزاد مجموعه‌ی $\mathcal{X}(M)$ است.

تعریف ۱۳.۱ دیفرانسیل یک تابع هموار روی M، $df : TM \longleftrightarrow \mathbb{R}$ به گونه‌ای‌تعریف می شود که : $(df)(X) = X(f)$.

df مثالی از ۱–فرمی‌هاست.

۱–فرمی‌های $dx^1, ..., dx^n$ را « **فرم های دیفرانسیل پایه مرتبه ۱ روی** U » می‌نامند. هر ۱–فرمی همواری را می توان به صورت زیر بسط داد:

$$\omega = \sum_{i=1}^{i} \omega(\partial_i) dx^i \qquad (۱–۲۵)$$

که در آن $\omega(\partial_i)$ یک عدد حقیقی است که از اثر دادن ω روی میدان های پایه ∂_i بدست می آید. این رابطه روی همسایگی U از M برقرار است و با توجه به آنکه کارتهای یک اطلس کامل روی M، همه‌ی M را می‌پوشانند و با یکدیگر به طور دیفئومورف مرتبط هستند، می توان ω را روی کل M تعریف کرد. یعنی از کنار هم قراردادن کارتهای (φ, U)، (Ψ, V) و ....می توان نمایش موضعی ω را به روی کل M گسترش داد و یا همه جایی کرد.

مثال: اگر g یک تابع هموار روی M باشد، دیفرانسیل کامل این تابع را خواهیم داشت :

$$dg(\partial_i) = \partial_i(g) = \frac{\partial g}{\partial x^i} \quad , \quad dg = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x^i} dx^i$$

جمع بندی:

میدان برداری X در هر فضای T_pM روی نقطه‌ی $p \in M$ ، یکی از بردارهای مماسی فضای T_pM با نمایش را X_p معین می کند، که به طور دیفرانسیل پذیر روی توابع هموار طبق ویژگی های خطی و قاعده‌ی لایب نیتز، اثر می کند. میدان‌های برداری پایه ∂_i ها هستند که به صورت کارتی تعریف می شوند.

۱–فرمی ω در هر نقطه‌ی p یک ω_p از T_p^*M معین می کند که به صورت یک نگاشت خطی روی عناصر X_p از T_pM اثر می کند.

$\omega(X)$ یک تابع هموار از نقطه‌ی p است. پایه‌ی ۱–فرمی ها $\{dx^i|_p\}$ از T_p^*M هستند که همزاد پایه $\{\partial_i|_p\}$ می باشند.

۴ حساب روی خمینه‌ها

۴—۱ انتقال اشیاء هندسی بین دو خمینه

در این بخش چگونگی تولید اشیاء هندسی جدید از روی آنهایی که در بخش‌های قبل دیدیم و نیز نحوه انجام محاسبات روی این اشیاء را بررسی می کنیم.
در اینجا با دو مفهوم جدید آشنا خواهیم شد؛ یکی ضرب خارجی فرم‌ها که تعمیمی است از ضرب برداری در فضای $\mathbb{R}^3$، و دیگری مشتق خارجی که تعمیمی از مفاهیم آشنای گرادیان، کرل و دیورژانس در فضای $\mathbb{R}^3$ است. بحث مختصری نیز راجع به منحنی‌های انتگرالی میدان برداری خواهیم کرد. این بخش را با مفهوم کلیدی نگاشت هموار از یک خمینه به خمینه‌ی دیگر آغاز می کنیم، و مطالب خود را با تحلیل تبدیلات خطی به وجود آمده روی فضاهای مماسی و هم‌مماسی دنبال می کنیم.

با داشتن نگاشت دیفرانسیل پذیر بین خمینه‌های M و N با ساختارهای دیفرانسیل پذیر $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ به صورت :

$$F : (M, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathcal{N}, \mathcal{B}) \qquad (۱—۲۶)$$

می خواهیم بدانیم چگونه اشیاء هندسی از روی M به N منتقل می شوند.

توابع

فرض کنید f یک تابع هموار روی خمینه‌ی مقصد N باشد:

$$\begin{aligned} f \quad & : N \longrightarrow \mathbb{R} \\ & : q \in N \longrightarrow f(q) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$q \in N$ تصویر یک نقطه $p \in M$ تحت نگاشت F است : $F(p) = q$، ترکیب $f \circ F$ تابعی هموار روی خمینه مبداء M است.
بازپس نگاشت F را با F^* نشان می دهیم: با این نگاشت، تابع f را از N به M بازپس کشیده می شود.

$$F^* f = f \circ F : p \in M \longmapsto f(F(p)) \in \mathbb{R} \qquad (۱—۲۷)$$

به بیان دیگر F^* فضای توابع هموار روی N را به فضای توابع هموار روی M می‌نگارد. برعکس اگر F یک نگاشت وارون پذیر باشد و وارون آن هموار باشد (یعنی F یک دیفئومورفیزم باشد)، آنگاه می توان از یک تابع روی M یک تابع روی N ساخت.