بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده مهندسی مکانیک

تحلیل جریان فلزات و انتشار امواج الاستیک ـ پلاستیک در هنگام برخورد به کمک روش اویلری ذره ـ سطح مبنا
(Particle – Level Set)

پایان نامه دکترای مهندسی مکانیک تبدیل انرژی

بابک مهمان‌دوست اصفهانی

استاد راهنما

دکتر احمدرضا پیشه‌ور اصفهانی

زمستان ۱۳۸۷

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده مهندسی مکانیک

پایان نامه دکترای رشته تبدیل انرژی آقای بابک مهمان‌دوست اصفهانی

تحت عنوان

تحلیل جریان فلزات و انتشار امواج الاستیک ـ پلاستیک در هنگام برخورد به کمک روش اویلری ذره ـ سطح مبنا

(Particle – Level Set)

در تاریخ ۲۶ / ۱۰ / ۱۳۸۷ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهایی قرار گرفت.

۱- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر احمدرضا پیشه‌ور اصفهانی
۲- استاد مشاور پایان نامه	دکتر محمود فرزین
۳- استاد داور	دکتر بیژن برومند
۴- استاد داور	دکتر مسعود دربندی
۵- استاد داور	دکتر محمد سعید سعیدی
۶- استاد داور	دکتر ابراهیم شیرانی
۷- استاد داور	دکتر سعید ضیائی راد
سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده	دکتر مهدی کشمیری

بسم الله الرحمن الرحیم

منت خدای را عزوجل که طاعتش موجب قربتست و به شکر اندرش مزید نعمت.

هر نفسی که فرو می رود ممد حیاتست و چون برمی آید مفرح ذات.

پس در هر نفسی دو نعمت موجود است و بر هر نعمتی شکری واجب.

از دست و زبان که برآید کز عهدهٔ شکرش به درآید

اِعْمَلُوا آلَ داوُدَ شُکراً وَ قَلیلٌ مِنْ عِبادِیَ الشَّکور

چند سطر اول دیباچه کتاب گلستان سعدی را مقدمه ای قرار دادم برای نخست سپاس از خداوند که بار دیگر فرصتی را در اختیارم قرار داد تا در آزمایش بزرگ دیگری در پیشگاهش حضور یابم و به لطف و رحمتش سربلند بیرون درآیم و سپس سپاس از همه‌ی کسانی که مرا در این راه صادقانه یاری کردند و به خصوص از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر احمدرضا پیشه‌ور که با راهنمایی‌های خردمندانه و نصایح دلسوزانه همواره یاور من بوده و هستند، صمیمانه قدردانی می‌کنم. همچنین از همسر مهربانم که دشواری‌های همراهی با مرا در طول هشت ونیم سال تحصیل در دوره‌ی دکتری (مهر۱۳۷۹ تا بهمن۱۳۸۷) صبورانه تحمل کرد، سپاسگزارم. از دختر عزیزم فاطمه هم که من دوره‌ی دکتری را به یمن قدوم او در ۲۹ شهریور ۱۳۷۹ آغاز کردم، متشکرم.

بابک مهمان‌دوست اصفهانی

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوریهای ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه (رساله) متعلق به دانشگاه صنعتی اصفهان است.

تقدیم به روان پاک پدرم دکتر علی مهماندوست

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فهرست مطالب ..... هشت

فهرست شکل ها ..... ده

فهرست جدول ها ..... دوازده

فهرست نماد ها ..... سیزده

چکیده ۱

فصل اول: مقدمه **۲**

فصل دوم: روابط مسئله **۱۱**

۲ – ۱ – روابط ساختاری ۱۱

۲ – ۲ – معادلات حاکم ۱۴

۲ – ۳ – معادله‌ی حالت ۱۷

۲ – ۴ – الگوریتم برگشت شعاعی ۱۸

فصل سوم: روش حل عددی **۲۱**

۳ – ۱ – روش سی وینوی مرتبه چهار برای حل دستگاه معادلات هذلولوی بقایی ۲۱

۳ – ۱ – ۱ – الگوریتم حل ۲۵

۳ – ۲ – روش رونگ ـ کوتای مرتبه چهارِ چهار مرحله‌ای صریح با گسترش طبیعی پیوسته ۳۰

۳ – ۲ – ۱ – محاسبه‌ی توابع فلاکس رونگ–کوتا ۳۱

۳ – ۳ – روش سی وینوی مرتبه پنج برای حل معادلات هامیلتون ـ ژاکوبی دوبعدی ۳۲

۳ – ۳ – ۱ – آلگوریتم حل معادله هامیلتون ـ ژاکوبی به روش سی وینو ۳۳

۳ – ۳ – ۲ – بازسازی مرتبه پنجم یک بعدی ۳۴

۳ – ۳ – ۳ – بازسازی مرتبه ششم مشتقات ۳۷

۳ – ۳ – ۴ – انتگرال گیری ۳۸

۳ – ۳ – ۵ – بازسازی معکوس ۳۹

فصل چهارم: روش پی‌جویی مرز مشترک **۴۱**

۴ – ۱ – روش سطح مبنا ۴۲

۴ – ۲ – روش ذره ـ سطح مبنا ۴۴

۴ – ۳ – شرایط مرزی ۴۶

۴ – ۳ – ۱ – شرط مرزی برای تنش روی سطح آزاد ۴۸

۴ – ۳ – ۲ – میانیابی دوخطی ۴۹

۴ – ۳ – ۳ – میانیابی به روش وزنی عکس مجذور فاصله ۵۰

فصل پنجم: نتایج **۵۱**

۵ – ۱ – مسئله‌ی کرنش تک محوری ۵۱

۵ – ۱ – ۱ – تعریف مسئله ۵۲

۵ – ۱ – ۲ – شرایط مرزی ۵۲

۵ – ۱ – ۳ – بررسی نتایج ۵۳

۵ – ۲ – مسئله‌ی برخورد میله‌ی تیلور ۵۹

۵ – ۳ – مسئله‌ی ایجاد فواره‌ی فلزی در اثر برخورد امواج ضربه‌ای ۶۸

۵ – ۳ – ۱ – تعریف مسئله ۶۹

۵ – ۳ – ۲ – شرایط اولیه و مرزی ۶۹

۵ – ۳ – ۳ – بررسی نتایج ۷۰

۵ – ۴ – مسئله‌ی پر شدن حفره‌ها ۷۴

۵ – ۴ – ۱ – تعریف مسئله ۷۴

۵ – ۴ – ۲ – شرایط اولیه و مرزی ۷۵

۵ – ۴ – ۳ – بررسی نتایج ـ موج ضعیف ۷۶

۵ – ۴ – ۴ – بررسی نتایج ـ موج قوی ۷۹

جمع بندی **۸۲**

پیوست: نمودار گردشی برنامه‌ی رایانه‌ای **۸۴**

واژه نامه فارسی به انگلیسی **۸۵**

واژه نامه انگلیسی به فارسی **۹۰**

مراجع **۹۵**

چکیده انگلیسی **۹۹**

فهرست شکل ها

عنوان **صفحه**

شکل۱: جابجایی شبکه طی یک پله‌ی زمانی ۲۳
شکل۲: بیان یک بعدی شبکه‌ی نامتقابل ۲۴
شکل۳: تقسیم هر سلول به چهار ربع سلول ۲۶
شکل۴: مراحل بازسازی بعد به بعد؛ (الف): میانیابی در جهت x ؛ (ب): میانیابی در جهت y..... ۳۳
شکل۵: نمایش نقاط پاسخ در پله‌ی زمانی جدید قبل از بازسازی معکوس ۴۰
شکل۶: مقدار اولیه‌ی تابع سطح مبنا برای مستطیل در فضای دوبعدی..... ۴۳
شکل۷: ذرات منفی که به بخش مثبت سطح مبنای اولیه می‌گریزند..... ۴۵
شکل۸: نمایش نقاط مجازی دور و نزدیک..... ۴۷
شکل۹: نمایش نقطه‌ی مجازی روی شبکه و تصویر آینه‌ای آن در داخل جسم ۴۸
شکل۱۰: میانیابی دوخطی ۴۹
شکل۱۱: مسئله‌ی کرنش تک محوری ۵۲
شکل۱۲: انتشار امواج الاستیک ـ پلاستیک ضربه‌ای از محل برخورد..... ۵۵
شکل۱۳: انعکاس موج پلاستیک ضربه‌ای به صورت موج پلاستیک انبساطی از انتهای باز لوله..... ۵۵
شکل۱۴: انعکاس موج پلاستیک انبساطی به صورت موج پلاستیک انبساطی از انتهای بسته‌ی لوله ۵۶
شکل۱۵: تعقیب موج انبساطی توسط موج ضربه‌ای تشکیل شده در محل جداشدن میله از صفحه..... ۵۶
شکل۱۶: انعکاس معکوس امواج (انبساطی به ضربه‌ای و ضربه‌ای به انبساطی) از انتهای باز میله ۵۷
شکل۱۷: کاهش دامنه‌ی موج ناپیوستگی به زیر تنش تسلیم ماده و تبدیل ناپیوستگی پلاستیک به الاستیک..... ۵۷
شکل۱۸: حرکت موج ناپیوستگی الاستیک در طول میله با سرعت و دامنه‌ی ثابت..... ۵۸
شکل۱۹: کاهش سرعت میله از ۲۰۰ متر بر ثانیه به ۱۸۶ متر بر ثانیه پس از انعکاس از صفحه ۵۸
شکل۲۰: آزمایش برخورد تیلور..... ۵۹
شکل۲۱: تصویر نمایشی مسئله‌ی برخورد میله‌ی تیلور..... ۵۹
شکل۲۲: میدان و شبکه حل عددی مسئله‌ی برخورد میله‌ی تیلور ۶۱
شکل۲۳: بررسی عدم وابستگی به شبکه ۶۲
شکل۲۴: مطالعه‌ی زمانی تغییر شکل میله برای شبکه‌ی حل عددی ۴۰۰×۸۰..... ۶۲
شکل۲۵: کانتورهای کرنش پلاستیک معادل در چهار زمان مختلف ۶۴
شکل۲۶: بردار و کانتورهای سرعت در چهار زمان مختلف ۶۴
شکل۲۷: کانتورهای دما و مطالعه‌ی اثر دما و نرخ کرنش در شکل نهایی میله ۶۵
شکل۲۸: مقایسه‌ی برآورد دو مدل مادی از کانتورهای چگالی و شکل نهایی در سرعت برخورد ۴۰۰..... ۶۶
شکل۲۹: مقایسه‌ی برآورد دو مدل مادی از توزیع تنش مؤثر در حالت نهایی برای سرعت برخورد ۴۰۰..... ۶۶
شکل۳۰: عکسبرداری متوالی از حرکت فواره‌ی فلزی ایجاد شده از روی حفره‌ی نیم کروی مسی..... ۶۸
شکل۳۱: عکسبرداری با اشعه‌ی ایکس از آزمایش ایجاد فواره‌ی فلزی در اثر برخورد امواج ضربه‌ای..... ۶۸

شکل۳۲: تصویر نمایشی مسئله‌ی ایجاد فواره‌ی فلزی ۶۹
شکل۳۳: مشخصات میدان و شبکه حل عددی مسئله‌ی ایجاد فواره‌ی فلزی ۷۱
شکل۳۴: مراحل توسعه ورشد فواره‌ی فلزی و کانتورهای سرعت عمودی برای شعاع حفره‌ی ۴ میلیمتر ۷۲
شکل۳۵: مراحل توسعه ورشد فواره‌ی فلزی و کانتورهای دما برای شعاع حفره‌ی ۱۵ میلیمتر ۷۳
شکل۳۶: نمایش میدان و مشخصات حل عددی مسئله‌ی پر شدن حفره ۷۵
شکل۳۷: برشی از فضای واقعی؛ بین هر دو حفره شرط تقارن وجود دارد ۷۶
شکل۳۸: روند تغییر شکل حفره در طول فرآیند ویسکوپلاستیکی ۷۷
شکل۳۹: کانتور فشار و تغییر شکل حفره در چهار زمان مختلف برای فرآیند ویسکوپلاستیکی ۷۸
شکل۴۰: کانتورهای دما، کرنش پلاستیک معادل و سرعت در انتهای فرآیند ویسکوپلاستیکی جمع شدن حفره ۷۸
شکل۴۱: کانتور فشار و تغییر شکل حفره در چهار زمان مختلف برای فرآیند هیدرودینامیکی ۷۹
شکل۴۲: کانتور دما و تغییر شکل حفره در چهار زمان مختلف برای فرآیند هیدرودینامیکی ۷۹
شکل۴۳: خطوط جریان، کانتور سرعت و تغییر شکل حفره در چهار زمان مختلف برای فرآیند هیدرودینامیکی ۸۰
شکل۴۴: روند تغییر شکل حفره در طول فرآیند هیدرودینامیکی پرشدن حفره ۸۰
شکل۴۵: نمایش تبدیل حفره ها به «نقطه‌ی داغ» پس از عبور ضربه ۸۱

فهرست جدول ها

عنوان **صفحه**

جدول۱: رژیمهای مختلف برخورد ۸
جدول۲: ضرایب مدل مادی برای جنس مس..... ۱۴
جدول۳: ضرایب گرونیسن برای جنس مس ۱۷
جدول۴: خواص فیزیکی مس ۶۰
جدول۵: مقایسه‌ی عددی نتایج مسئله‌ی برخورد میله‌ی تیلور ۶۳
جدول۶: مقایسه بین سرعت نوک فواره و شعاع متوسط فواره محاسبه شده برای شعاع حفره‌های ۴ و ۱۵ میلیمتر..... ۶۳
جدول۷: مقایسه بین مقادیر عددی محاسبه شده برای سرعت نوک فواره (km/s) در زمان‌های مختلف ۶۳

فهرست نمادها

سرعت صوت	c
سرعت صوت اولیه	c_0
گرمای ویژه	C_p
نرخ کرنش	D
نرخ کرنش کاهیده	$\bar{D}$
نرخ کرنش الاستیک	D^e
نرخ کرنش پلاستیک	D^P
انرژی کلی بر واحد حجم	E
انرژی درونی بر واحد جرم	e_0
بردار فلاکس جابجاشونده در راستای شعاعی	$\overrightarrow{f^x}$
بردار فلاکس جابجاشونده در راستای محوری	$\overrightarrow{f^y}$
مدول برشی	G
تابع هامیلتونیَن	H
ضریب کارسختی	h
تابع فلاکس رونگ ـ کوتا	K
ضریب هدایت حرارتی	k
بردار واحد عمود بر سطح	N
فشار	P
بردار متغیرهای وابسته	$\vec{q}$
شعاع ذره	r_p
تنش کاهیده	s
بردار چشمه	$\vec{s}$
ثابت دوم جنس در معادله حالت مای ـ گرونیسن	s_0
تنش مؤثر فون ـ میسز	S_e
مشتق یومان (جومان)	$\overset{\nabla}{S}$
زمان	t
دما	T
دمای ذوب	T_m

دمای محیط	T_0
مؤلفه‌ی سرعت در امتداد شعاعی	u
مؤلفه‌ی سرعت در امتداد محوری	v
تابع وزنی	w
توان تنشی در اثر کار پلاستیک	$\dot{W}_p$
امتداد شعاعی	x
بردار مکان ذره	$\vec{x}_p$
امتداد محوری	y

ضریب انبساط حرارتی	α
ثابت اول جنس در معادله حالت مای ـ گرونیسن	Γ_0
پله‌ی زمانی	Δt
بُعد سلول در جهت x	Δx
بُعد سلول در جهت y	Δy
دلتای کرونکر	δ_{ij}
کرنش پلاستیک معادل یا مؤثر	$\bar{\varepsilon}^p$
دمای بی بعد	θ
پارامتر همسازی	Λ
چگالی	ρ
چگالی اولیه	ρ_0
تنش (کوشی)	σ
تنش تسلیم	σ_y
تنش تسلیم اولیه	σ_{y0}
تابع سطح مبنا	Φ
چرخش	Ω

چکیده :

در این پروژه یک روش حجم محدود اویلری با معادله حالت دلخواه برای شبیه‌سازی عددی رفتار الاستیک ـ پلاستیک مواد جامد تراکم‌پذیر در هنگام برخورد شدید، ارائه شده است. معادلات حاکم شامل معادلات بقای جرم، مومنتوم و انرژی به همراه معادلات تکامل برای تنش‌های کاهیده هستند که در شکل بقایی اویلری حل می‌شوند. از آن‌جا که در روش اویلری محل مرزهای ماده، به طور جداگانه تعیین می‌شود، الگوریتم حل نیز در هر پله‌ی زمان به حل دو مسئله‌ی جداگانه می‌پردازد. نخست، متغیرهای وابسته با توجه به شرایط مرزی که با یک روش ابتکاری در مرز مشترک ماده بیان شده‌اند، به روز می‌شوند. برای این کار از روش مرتبه چهار «سی‌وینو» برای حل دستگاه معادلات هذلولوی بقایی استفاده می‌شود. این روش که در اصل برای تسخیر امواج ضربه‌ای در داخل محیط گازی و بدون هیچ شرط مرزی توسعه یافته است، در این‌جا برای دنبال کردن امواج الاستیک ـ پلاستیک در محیط جامد تراکم‌پذیر با نرخ کرنش بزرگ و تغییر شکل مرزی، تصحیح و تکمیل شده است. در این روش محاسبات بر روی یک شبکه‌ی نامتقابل که به اندازه‌ی نصف ابعاد سلولی جابجا شده است، انجام می‌شوند. بنابراین محاسبه‌ی فلاکس‌های عبوری از مرزهای جدید سلولی در نواحی هموار و بدون ناپیوستگی داخل سلول‌های قدیم انجام می‌شود. در نتیجه نیازی به حل مسئله‌ی ریمان که در صورت ثابت ماندن شبکه ناگزیر به انجام آن بودیم، وجود ندارد و قید «منفی نشدن فشار» هم برداشته می‌شود و این خود محدودیت استفاده از معادله‌ی حالت را برمی‌دارد. پس از حل متغیرهای وابسته نوبت به تعیین محل جدید مرز مشترک می‌رسد. جابجایی مرز مشترک ماده به روش ذره ـ سطح مبنا دنبال می‌شود. از یک روش مرتبه پنج «سی‌وینو» برای حل معادله‌ی هامیلتون ـ ژاکوبی حاکم برتوابع سطح مبنا استفاده می‌شود. در آخر توانایی‌های روش پیشنهادی در مدل‌سازی عددی مسئله‌ی برخورد تیلور و چند مثال دیگر، بررسی می‌شود.

کلمات کلیدی: ضربه، برخورد شدید، روش ذره ـ سطح مبنا، روش سی وینو، معادلات هامیلتون ـ ژاکوبی

فصل اول : مقدمه

این پروژه روشی را برای حل مسائل با تغییر شکل بزرگ و نرخ کرنش زیاد که از برخورد شدید دو جسم جامد ناشی می‌شوند، ارائه می‌دهد. برخورد شدید مواد جامد، علاوه بر ایجاد تغییر شکل در مرزهای ماده، انتشار امواج الاستیک ـ پلاستیک در داخل محیط جامد را به همراه خود دارد. این امواج از محل برخورد شروع به انتشار می‌کنند. فرآیند انتشار امواج در محیط جسم برخوردکننده به شدت غیرخطی است. همچنین نواحی تنش ـ کرنش الاستیک و پلاستیک توسط سطوح تسلیم غیر خطی به هم مرتبط می‌شوند. لذا فیزیک حاکم بر مسأله‌ی برخوردِ شدید، بسیار پیچیده است و مدل‌های متناسب با آن باید در معادلات حاکم گنجانده شوند.

دو مسئله‌ی اساسی که در تحلیل عددی مسأله‌ی برخورد باید مد نظر قرار بگیرند یکی وجود گرادیان‌های بزرگ در جریان ماده‌ی جامد است که بیشتر در پیشانی امواج در حال انتشار وجود دارند و دیگری جابجایی و تغییر شکل بزرگ در مرزهای جسم جامد است. روش حل عددی باید بتواند جابجایی مرزها و انتشار امواج الاستیک ـ پلاستیک را به طور همزمان و با دقت پیجویی کند. روش‌هایی که برای حل چنین مسائلی مورد استفاده قرار می‌گیرند، تحت عنوان عمومی «هیدروکد[1]» شناخته می‌شوند [۱]. هیدروکدها جابجایی ماده را به یکی از روش‌های «اویلری[2]» یا «لاگرانژی[3]» بیان می‌کنند. در دیدگاه لاگرانژی هر گره از شبکه‌ی حل عددی به یک ذره‌ی به خصوص از ماده نسبت داده می‌شود و همراه با آن جابجا می‌شود. طبیعی است که این جابجایی با سرعتی برابر با سرعت ذره‌ی مادی انجام می‌شود. از سوی دیگر در دیدگاه اویلری، شبکه‌ی حل عددی تا انتها پابرجا می‌ماند و مرزهای مادی

---

[1] Hydrocodes
[2] Eulerian
[3] Lagrangian

اجازه می‌یابند تا در لابلای این شبکه جابجا شوند. یک روش بینابین هم وجود داردکه روش «لاگرانژی ـ اویلری دلخواه[1]» نامیده می‌شود. در این روش شبکه‌ی حل عددی همانند روش لاگرانژی اجازه‌ی جابجا شدن دارد تا بتواند بر کانتورهای جسم تغییر شکل یافته منطبق شود. ولی سرعت جابجایی شبکه لزوماً با سرعت ذرات ماده یکسان نیست. برای مثال کدهای داینا[2] و ایپیک[3] که پایه‌ی لاگرانژی دارند، از شبکه‌ی بی‌سازمان متحرک برای دنبال کردن مرزهای جابجاشده استفاده می‌کنند. در حالی که در کد سی‌تی‌اچ[4] که پایه‌ی اویلری دارد، مرزهای جابجاشده در لابلای یک شبکه‌ی حل عددی ثابت پی‌جویی می‌شوند. بنسون در مقاله‌ی خود مروری وسیع بر هیدروکدها و ویژگی‌های آن‌ها انجام داده است [۲].

هر یک از روشهای لاگرانژی و اویلری از نقاط قوت وضعف خاص خودش برخوردار است. برای مثال در روش‌های لاگرانژی روابط ساده‌تر هستند. زیرا مشتق مادی شامل بسط جملات جابجایی نمی‌شود و مرزهای جسم جامد هنگام تغییر شکل همراه با حل معادلات حاکم به طور طبیعی دنبال می‌شوند و این روش حل عددی را ساده‌تر می‌کند. ولی در مسائل مربوط به تغییر شکلهای بزرگ، ممکن است پس از گذشت تنها چند پله‌ی زمان المان‌های لاگرانژی دچار لهیدگی شدید شوند و ضریب منظری ـ نسبت طول به عرض ـ آنها بسیار بزرگ شود. به طوری که در نهایت منجر به توقف حل عددی و یا غیر واقعی شدن پاسخ‌ها شود. یک راه حل برای این مشکل استفاده از فرآیند اصلاحی «المان‌بندی مجدد» است. البته این فرآیند بسیار پرهزینه است و امکان بروز خطا هنگام انتقال اطلاعات از المان‌های قدیم به المان‌های جدید وجود دارد. از سوی دیگر روش‌های اویلری اصولاً با چنین مشکلی روبرو نمی‌شوند. چراکه این روش‌ها معادلات حاکم را در یک شبکه‌ی ثابت و بدون تغییر ابعاد المان‌ها حل می‌کنند. در عوض در این روش‌ها تغییر شکل و جابجایی مرزهای جسم جامد باید جدا از معادلات حاکم، به یکی از روش‌های پیجویی مرز مشترک دنبال شود. شاید بزرگ‌ترین چالشِ استفاده از روش‌های اویلری در حل مسائل مقدار مرزی با مرز متحرک، بیان مناسب شرایط مرزی باشد. تغییر ناگهانی خواص فیزیکی در محل مرز مشترک یکی از مواردی است که می‌تواند روش حل عددی اویلری را دچار مشکل کند. به خصوص اگر فشار از یک معادله‌ی حالت به دست بیاید. این مشکل وقتی که مرز مشترک تحت اثر امواج غیرخطی قوی هم باشد، دوچندان می‌شود. لذا برای اغلب روش‌های اویلری دقت محاسبات عددی در نزدیکی مرز مشترک کاهش می‌یابد.

در شبیه سازی اویلری تغییر شکل‌های بزرگ ناشی از برخورد شدید، چند مطلب را باید مد نظر داشت. نخست این که این پدیده منجر به انتشار امواج غیرخطی مختلف و بروز ناپیوستگی در پاسخ عددی می‌شود. لذا روش‌های تسخیر ضربه مبتنی بر اطلاعات بالادست می‌تواند یک انتخاب طبیعی باشد و در بین آن‌ها می‌توان از روش‌های گودانفی[5] به عنوان یک شاخص نام برد. در روش گودانف یک تابع درون‌یاب تکه‌ای از روی مقادیر متوسط سلولی در پله‌ی زمان قبلی ساخته می‌شود و با حل دقیق معادلات بقا به پله‌ی زمان بعدی تکامل می‌یابد. به دلیل وجود

---

[1] ALE: Arbitrary Lagrangian Eulerian
[2] DYNA
[3] EPIC
[4] CTH
[5] Godunov Type

ناپیوستگی بین توابع درون‌یاب سلول‌های مجاور، این امر مستلزم حل دقیق یا تقریبی مسئله‌ی ریمان برای هر یک از مرزهای بین سلولی است. اما وقتی با یک فیزیک پیچیده مواجه باشیم، تضمینی برای وجود پاسخ برای مسئله‌ی ریمان وجود ندارد و بدین ترتیب روش‌های بالادستی که روی شبکه‌ی حل عددی ثابت بیان می‌شوند، دچار مشکل می‌شوند. برای حل این نوع مسائل استفاده از روش گودانف با شبکه‌ی نامتقابل پیشنهاد می‌شود که بر مبنای اختلاف مرکزی نوشته می‌شود. این الگوریتم در شکل ابتدایی و مرتبه اول خود ابتدا توسط لاکس و فِردریکس معرفی شد [۳]. آن‌ها برای بازسازی مقادیر داخلی هر سلول مانند روش گودانف از یک تابع ثابت استفاده کردند. حُسن این روش در عدم نیاز آن به حل مسئله‌ی ریمان است. زیرا مرزهای سلول‌های جابجا شده در نواحی هموار داخلی سلول‌های اولیه واقع می‌شوند. همچنین در مسائل دو و سه بعدی نیازی به تصویر کردن معادلات در امتدادهای مشخصه‌ای نیست. در این روش لازم است در انتهای هر پله‌ی زمان، پاسخ‌های به دست آمده برای شبکه‌ی جابجا شده مجدداً بر روی مراکز سلول‌های اولیه بازسازی معکوس شوند. در این صورت جواب در روی شبکه‌ی جابجاشده به گام زمانی بعدی تکامل می‌یابد. با جایگزین کردن تابع ثابت با یک چندجمله‌ای، در بازسازی مقادیر داخل هر سلول، می‌توان مرتبه‌ی حل عددی را در این روش ارتقا داد. اما باید توجه داشت که وجود ناپیوستگی‌ها حل عددی را در روش‌هایی که صرفاً از یک چندجمله‌ای مرتبه بالا برای بازسازی استفاده کرده‌اند، دچار نوسان می‌کند. به این دلیل، گروه جدیدی از الگوریتم‌ها برای رفع این مشکل به وجود آمدند که تحت عنوان عمومی «اینو[1]» مخفف «غیرنوسانی ذاتی» شناخته می‌شوند [۴]. این روش‌ها از چند چندجمله‌ای به جای یک چندجمله‌ای برای بازسازی هر سلول استفاده می‌کنند. هر چندجمله‌ای از یک استنسیل متفاوت که در یک امتداد به خصوص از سلول‌های همسایه کشیده شده است، بهره می‌برد. الگوریتم بازسازی اینو باید بتواند از بین آن‌ها از چندجمله‌ای مربوط به استنسیل هموارترین امتداد مجاور سلول استفاده کند و از بقیه صرف نظر کند تا نوسانات حل عددی حداقل شوند. نِسیاهو و تادمور روش غیر نوسانی خود را برای اولین بار در شکل اختلاف مرکزی ارائه کردند [۵]. روش پیشنهادی آن‌ها یک روش مرتبه دو بود. اشکال این روش این است که اطلاعات مربوط به جهت‌های دیگر به طور کلی مفقود می‌شوند. روش پیشنهادی برای رفع این مشکل، الگوریتم «وینو[2]» مخفف «غیرنوسانی ذاتی وزنی» است [۶]. در این روش به هر چندجمله‌ای، بسته به میزان همواری استنسیل آن یک ضریب وزن نسبت داده می‌شود. ضریب وزن یک عدد بین صفر و یک است. طبیعی است که هر چه ناحیه هموارتر باشد، ضریب وزنی مربوط به آن بزرگ‌تر است. در عین حال جمع ضرایب وزنی باید یک بشود. بزرگترین چالشِ پیش روی این روش، تعیین ضرایب وزنی است که خود مستلزم حل یک الگوریتم غیرخطی برای تعیین میزان همواری استنسیل‌ها است. روش‌های «وینو»ای که بر مبنای اختلاف مرکزی نوشته می‌شوند، تحت عنوان عمومی «سی وینو[3]» مخفف «غیرنوسانی ذاتی وزنی مرکزی» شناخته می‌شوند. اساس کار این پروژه هم یک روش «سی وینو»ی مرتبه چهار است که توسط لِوی وهمکاران پیشنهاد شده است [۷]. البته آن‌ها روش خود را برای سیستم هذلولوی ساده که کاربرد آن برای دینامیک گازها و بدون اعمال هیچ شرط

---

[1] ENO
[2] WENO
[3] CWENO

مرزی است، نوشته‌اند. خاطر نشان می‌شود به دلیل وجود همزمان گرادیان‌های بزرگ و امواج ضعیف در محیط مادی، برای حفظ امواج ضعیف، یا باید از شبکه‌های بسیار ریز شده استفاده کرد و یا استهلاک روش عددی را با استفاده از یک روش حل عددی مرتبه بالا کاهش داد.

نکته‌ی حائز اهمیت دیگر در تحلیل اویلری مسائلی که شامل تغییر شکل سریع الاستیک ـ پلاستیک می‌شوند، نحوه‌ی دنبال کردن همزمان مرز مشترک انتشار یابنده در لابلای شبکه‌ی ثابت اویلری است. حتی پس از تعیین دقیق محل مرز مشترک، یکی از مشکلات معمول در تحلیل اویلری به تعیین خواص سلول‌هایی مربوط می‌شود که مرز مشترک در داخل آن‌ها واقع می‌شود. مثلاً اگر مرز مشترک بینِ دوجسم جامد، در وسط یک سلول واقع شود، روش اویلری به طور معمول، یک چگالی متوسط برای آن سلول فرض می‌کند. این مشکل در مرز مشترک بین جسم جامد و فضای خالی هم وجود دارد زیرا در چنین مواقعی حل معمول و بدون اصلاح اویلری، برای سلولی که مثلاً نصف آن فضای خالی باشد، نصف چگالی جسم جامد را برآورد می‌کند. این به نوبه‌ی خود به دلیل تغییر ناگهانی چگالی بین دو سلول مجاور می‌تواند منبع یک خطای بزرگ شود. همچنین فشار هم که از معادله‌ی حالت به دست می‌آید، به اشتباه برآورد خواهد شد. لذا قبل از شروع محاسبات پله‌ی زمانی جدید، باید اوّلاً محل دقیق مرز مشترک با اعمال یکی از روش‌های پی‌جویی مرز مشترک یا پیشانی مرزی تعیین شود. ثانیاً روش مناسبی برای بیان شرایط مرزی اتخاذ شود تا یکپارچگی سلول‌های مرزی حفظ شود.

روش‌های پی‌جویی مرز مشترک یا پیشانی مرزی را در یک دسته‌بندی کلی می‌توان به روش‌های لاگرانژی و اویلری تقسیم کرد.

روش‌های لاگرانژی که پیشانی مرزی را دنبال می‌کنند مانند کار تریگواسون و همکاران [۸] و کار آنوِردی و تریگواسون [۹] و نیز کارهایی که از ذرات نشانگر روی مرز استفاده می‌کنند [۱۰– ۱۴] برای مدل کردن مسائل جریان‌های چندفازی و چند سیالی وسطوح آزاد در مکانیک سیالات استفاده شده‌اند.

یک روش ساده‌ی اویلری برای پی‌جویی پیشانی مرزی، روش «حجم سیال[1]» هرت و نیکولز [۱۵] است که به طور گسترده مورد استفاده قرار می‌گیرد. اما شاید مهم‌ترین و کارآمدترین روش اویلری برای پی‌جویی مرز مشترک، «روش سطح مبنا» باشد.

روش سطح مبنا به صورت فراگیر برای پی‌جویی مرزهای جابجا شده، به ویژه هنگامی که جابجایی مرزها زیاد باشد، مورد استفاده قرار گرفته است. کاربرد روش سطح مبنا شامل بخش وسیعی از مسائل از جمله مکانیک سیالات، احتراق، تصاویر رایانه‌ای و علم مواد می‌شود. برخی از این کاربردها در مقالات و کتاب‌های آشر و فِدکیو [۱۶– ۱۷] و سِتین [۱۸– ۱۹] آمده‌اند. کاربرد این روش در حل مسائل دیگر روز به روز در حال افزایش است.

روش سطح مبنا از ابتدا برای مدل کردن جریان‌های تراکم‌ناپذیر چندفازی مخلوط‌نشدنی مورد استفاده قرار گرفته است [۲۰]. یکی از ویژگی‌های برجسته‌ی روش سطح مبنا این است که این روش مرزمشترک‌های با هندسه‌ی پیچیده را به طور مناسب توصیف می‌کند و به سادگی هم قابل برنامه‌نویسی است.

---

[1] VOF

به منظور مقایسه‌ی روش‌های مختلف پی‌جویی مرز مشترک، رایدر و کت [۲۱- ۲۲] مجموعه‌ای از مسائل آزمایشی را ترتیب دادند که به برآورد جریان‌های پرچرخش می‌پردازند. این روش‌ها درجات مختلفی از موفقیت را در مدل کردن صحیح جریان‌های پرچرخش به دست آورده‌اند. در یک مقایسه‌ی روش‌های لاگرانژی و اویلری مختلف برای این جریان‌ها، رایدر و کت دریافتند که روش‌های دنبال کردن لاگرانژی ساختار رشته‌ای مرز مشترک را بهتر از روش‌های اویلری حفظ می‌کنند. آن‌ها همچنین دریافتند وقتی رشته‌های سیال آنقدر نازک می‌شوند که نمی‌توان آن‌ها را به طور مناسب روی شبکه مشخص کرد، روش سطح مبنا دچار کاهش یا افزایش جرمی می‌شود. در حالی که روش «حجم سیال» با تشکیل رشته‌های چسبناک، بقای جرم را به طور محلی ارضا می‌کند. این دو اشکال باعث کاهش دقت در تعیین محل دقیق مرز مشترک می‌شوند. در عین حال سادگی و حفظ مناسب خواص هندسی در روش سطح مبنا باعث شده برای رفع اشکالات آن تلاش شود.

شاید بهترین روشی که بتوان آن را به خصوص برای پی‌جویی مرزهای جامد به کار گرفت، روش پیشنهادی اِنرایت و همکاران باشد [۲۳]. این روش، ترکیبی از روش اویلری «سطح مبنا» و روش لاگرانژی «ذرات نشانگر» است. روش ترکیبی ذره ـ سطح مبنا[1] برای پی‌جویی دقیق‌تر مرز مشترک و اصلاح عیوب روش سطح مبنای ساده در مسائل هیدرودینامیکی معرفی شد.

روش‌های لاگرانژی خالص که از ذرات نشانگر برای جداسازی مرز مشترک استفاده می‌کنند، در عین حال که دارای ویژگی برتر حفظ تیزی مرز مشترک در گوشه‌ها هستند، نمی‌توانند به آسانی به نتیجه‌ی مشابه با روش سطح مبنا برسند. زیرا یک راه از پیش تعیین شده برای منظم سازی این روش‌ها وجود ندارد. ذرات لاگرانژی به طور کامل دنباله‌رو مشخصه‌های جریان هستند. اگر مشخصه‌ها در یک ناحیه‌ی داده شده به هم بپیوندند، آن گاه ذرات نشانگر برجامانده باید به طور دستی حذف بشوند. هلمسن [۲۴] و دیگران از روش بازدارنده‌ی تکرار برای حذف ذرات نشانگر برجامانده استفاده کرده‌اند. هرچند این روش در مسائل دوبعدی به خوبی جواب می‌دهد، اما در مسائل سه بعدی کارآمد نیست.

روش ذره ـ سطح مبنا روشی است که ویژگی‌های برتر روش اویلری سطح مبنا و روش لاگرانژی ذرات نشانگر را با هم ترکیب می‌کند. این روش مجموعه‌ای از ذرات نشانگر را به طور اتفاقی نزدیک مرز مشترک تعریف شده توسط سطح مبنای صفر می‌نشاند. این ذرات بدون جرم ولی دارای حجم هستند و تحت اثر جریان جابجا می‌شوند. در جریان‌های سیالی، ذرات نشانگر هیچگاه مرز مشترک را قطع نمی‌کنند. مگر هنگامی که روش پی‌جویی مرز مشترک نتواند مکان درست مرز مشترک را با دقت شناسایی کند. اگر ذرات نشانگر در ابتدا در یک سوی مرز مشترک نشانده شده باشند و سپس در سوی دیگر آن ردیابی شوند، نشان دهنده‌ی وجود خطا در نمایش مرز مشترک توسط روش سطح مبنا است. این مشکل را می‌توان با بازسازی سطح مبنا به طور محلی برطرف کرد. برای این کار از اطلاعات مشخصه‌ای که در ذرات نشانگر جابجا شده وجود دارند، استفاده می‌شود. بدین ترتیب روش سطح مبنا می‌تواند به دقتی در ابعاد ریزتر از شبکه‌ی حل عددی برسد و مشکل عدم ارضای بقای جرم در نواحی غیر قابل

---

[1] PLS

تشخیص را برطرف سازد. ذرات نشانگر به جز این هیچ نقشی را در محاسبات ایفا نمی‌کنند و هندسه‌ی هموار مرز مشترک توسط سطح مبنا به تنهایی برآورد می‌شود. بنابراین از آن‌جا که ذرات نشانگر تنها جنبه‌ی راهنما دارند و پس از آن جدا می‌شوند، راحتی و سادگی روش سطح مبنا در روش ترکیبی ذره ـ سطح مبنا حفظ می‌شود. در عین حال این روش مانع گرد شدن گوشه‌های تیز یعنی مشکل روش سطح مبنای ساده می‌شود. در این روش مرزهای پیچیده به سادگی توسط سطوح مبنای مختلف بیان می‌شوند. مرزمشترک بدون ایجاد مزاحمت برای روش حل عددی جریان، جابجا می‌شود و تغییر شکل می‌دهد. مقایسه پاسخ‌های این روش با نمونه‌های دوبعدی و سه بعدی آزمایش شده توسط رایدر و کت نشان می‌دهد که این روش همانند روش «حجم سیال» بقای جرم را به خوبی ارضا می‌کند و در عین حال از ساختار مناسب مرز مشترک در روش‌های لاگرانژی برخوردار است و به همین دلیل برای استفاده در این پروژه برگزیده می‌شود.

اما همان طور که اشاره شد، سومین چالش اساسی روش‌های اویلری، در حل مسائل مقدار مرزی، بیان مناسب شرایط مرزی است. یعنی پس از آن که محل مرز مشترک توسط یکی از روش‌های پی‌جویی مرز مشترک یا پیشانی مرزی تعیین شد، لازم است شرایط مرزی طوری بیان شوند که یکپارچگی سلول‌هایی که مرز مشترک در داخل آن‌ها واقع می‌شود، حفظ شود. روش پیشنهادی بِنسون و همکاران برای رفع این مشکل یک روش دو مرحله‌ای است. در مرحله‌ی اول، به کمک یک روش لاگرانژی گره‌ها به مکان جدیدشان منتقل می‌شوند و در مرحله‌ی دوم، پاسخ به دست آمده، مجدداً به روی شبکه‌ی ثابت اویلری تصویر می‌شود [۲۵- ۲۶]. در روش دیگری که نخست توسط فِدکیو و همکاران ارائه شد و به «روش سیال مجازی» معروف است [۲۷]، ابتدا با «روش سطح مبنا» محل مرز مشترک تعیین می‌شود و سپس خواص از داخل یک ماده به گره‌های مجازی که در مجاورت مرز مشترک ولی در خارج آن ماده واقع شده‌اند، برون یابی می‌شوند و شرایط مرزی بین گره‌های داخلی و گره‌های خارجی که مجازاً از جنس ماده‌ی داخلی فرض شده‌اند، اعمال می‌شوند. بدین ترتیب یکپارچگی خواص سلول‌ها حفظ می‌شود. یک روش مرز مشترک تیز هم توسط یودِی‌کومار و همکاران [۲۸- ۳۱] ارائه شده است که هرچند از ایده‌ی گسترش مجازی ماده استفاده نمی‌کند، اما در طرز تفکر شبیه به روش سیال مجازی است. در این روش مرزهای مشترک در روی شبکه به صورت معمول اویلری مشخص نمی‌شوند. زیرا مواد مختلف می‌توانند بدون آن که مخلوط شوند، به هم برسند. فرمولبندی برای این مخلوط هم نیازی به مرزبندی‌های متعدد ندارد. چنین حالتی برای سلول‌هایی که فقط بخشی از آن‌ها پر شده و بقیه‌ی فضای آن‌ها خالی است نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد. در روش مرز مشترک تیز شرایط مرزی به طور مستقیم در روی مرز مشترک اعمال می‌شوند و تقسیم گره‌های محاسباتی نزدیک به مرز مشترک به طور مناسبی تصحیح می‌شوند تا وجود مرز احساس بشود. همچنین پژوهش‌های دیگری که برخی از آن‌ها ترکیب یا تصحیح روش‌های قبلی محسوب می‌شوند، انجام شده‌اند. از جمله پژوهش‌هایی برای تحلیل برهم‌کنش جامد ـ سیال [۳۲] و دینامیک قطره ـ حباب [۳۳- ۳۴] انجام شده است. در بعضی از این روش‌ها شبکه به صورت اویلری خالص است و در بعضی دیگر مخلوطی از اویلری و لاگرانژی است. در هر حال معادلات حاکم به صورت اویلری روی یک شبکه‌ی ثابت حل می‌شوند. تِرَن و یودِی‌کومار روش ذره ـ سطح مبنا را در حل مسئله‌ی برخورد شدید به کار گرفتند [۳۵]. روش آن‌ها در عین حال تصحیحی برای روش‌های سیال مجازی و مرز مشترک تیز برای رسیدن به