دانشگاه زنجان

پایان نامه ی کارشناسی ارشد

نامساوی عملگر ینسن برای توابع دو متغیره

دانشجو

فاطمه عباسی

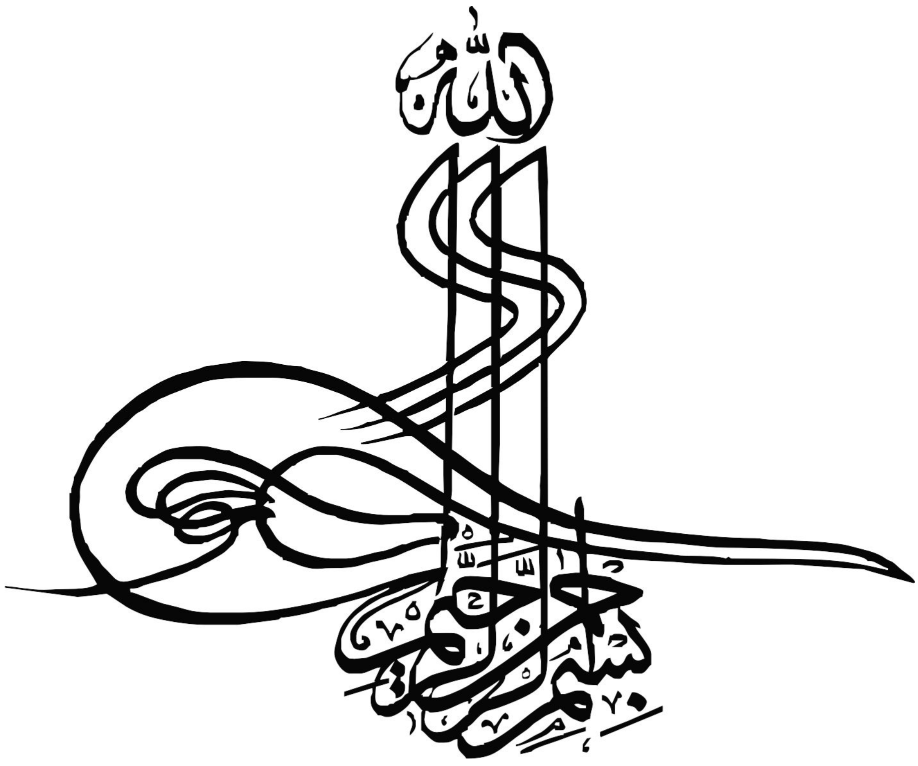
استاد راهنما

دکتر فرض اله میرزاپور

استاد مشاور

آقای علی مرصعی

مهرماه ۱۳۹۱


بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به

پدر مهربانم

او که آغوش گرمش را گشود تا فرصت پرواز یابم. هرچه داشت به پایم ریخت و هرچه آرزو کردم برایم خواست. او که تمام امروزهای من تجسم دیروزهای از دست رفته‌اش است. او که لبخندهای امروزم را به بهای سیاهی موهایش و طراوت زندگیش برایم به ارمغان آورده است.

مادر عزیزم

آرام جانم و مهربانتر از من به من، اولین پزشک درمان گر زندگیم، اولین لبخندی که به یاد دارم. اولین در همه جا. او که در نیایش های دیروزش امروز مرا از خدا خواست. او که گذشت از هر آن چه نمی توان گذشت.

و

همه کسانی که لحظه ای بعد انسانی و وجدانی خود را فراموش نمی کنند و بر آستان گران بهای انسانیت سر فرود می آورند و انسان را با همه تفاوت هایش ارج می نهند.

تقدیر و تشکر

سپاس بی‌کران پروردگار یکتا را که هستی‌مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمون‌مان شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه چینی از علم و معرفت را روزی‌مان ساخت و درود بی‌پایان به محضر امام عصر، حضرت مهدی (عج) یگانه منجی عالم.

از استاد با کمالات و شایسته؛ جناب آقای دکتر فرض اله میرزاپور که در کمال سعه‌صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را به‌عهده گرفتند.

و با تقدیر و تشکر از جناب آقای علی مرصعی که با نکته‌های دلاویز راه‌گشای بنده بوده و زحمت مشاوره این رساله را به‌عهده داشته‌اند.

و از برادر عزیزم مسعود که همواره در طول تحصیل تکیه گاه بنده در مواجهه با مشکلات بوده و وجودش مایه دلگرمیم می‌باشد تشکر می‌کنم. و همچنین از خواهرانم که وجودشان شادی بخش و صفایشان مایه آرامش بنده است سپاسگزارم.

و از جناب آقای سید حسین موسی کاظمی و جناب آقای دکتر سید محمدرضا نیشابوری که در زمینه‌ی تهیه‌ی مقاله‌ها و کتاب‌ها بنده را یاری فرمودند، نهایت تقدیر و تشکر را دارم.

چکیده

در این پایان نامه به توابع محدب عملگری دو متغیره پرداخته می‌شود. فرض کنید که I, J بازه‌هایی باشند که $0 \in I \cap J$ و M_m جبری از ماتریس‌های مختلط $m \times m$ و $M_m(I)$ مجموعه‌ی همه‌ی اعضای هرمیتی از M_m اند که طیف آن مشمول در I می‌باشد و π_m مجموعه‌ای از تصاویر در M_m هستند. همچنین برخی نتایج روی توابع تحدب ماتریسی یک متغیره را به حالت‌هایی از توابع دو متغیره گسترش می‌دهیم.

کلمات کلیدی: عملگر، توابع محدب، نامساوی ینسن، طیف، تصویر متعامد

فهرست مطالب

پیشگفتار

در این پایان نامه درباره‌ی نامساوی ینسن روی توابع دو متغیره کار می‌شود که می‌توان به چند متغیره هم گسترش داد اما با پیچیدگی همراه است.
در فصل اول تعاریف و قضیه‌هایی را که در فصول بعدی مورد نیاز است آورده‌ایم. در جایی‌که اگر به اثبات این قضیه‌ها نیاز باشد اثبات آورده شده و گرنه به بیان صورت قضیه اکتفا کرده‌ایم. در فصل دوم ابتدا ضرب تانسوری را تعریف کرده و برخی خواص آن را یادآور شده سپس یک عملگر یک متغیره را به کل فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ گسترش می‌دهیم و سپس روی دو متغیره با استفاده از ضرب تانسوری کار می‌کنیم. در فصل سوم محدب عملگری و یکنوای عملگری را تعریف کرده و به بررسی عملگر خطی کراندار و روابط بین محدب عملگری و یکنوای عملگری و به تعریف میانگین همساز و ارتباط پرداخته و قضیه‌های مربوط را اثبات می‌کنیم. در فصل پنجم به بررسی تحدب ماتریسی و تحدب ماتریسی مجزا و تحدب ماتریسی قطری و به روابطی که بین آن‌ها وجود دارد می‌پردازیم.

فصل ۱

پیش‌نیازها

در این فصل قضایا و تعاریفی را که در بخش‌های بعدی به آنها نیاز داریم را می‌آوریم. مطالب فصل عمدتا از مراجع [۹،۱۰،۱۴،۱۵] استخراج شده است.

۱.۱ توابع محدب و محدب میانی حقیقی

تعریف ۱.۱. فرض کنید $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ یک تابع باشد، در این صورت f، *محدب میانی* نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x,y\in(a,b)$،

$$f\left(\frac{x+y}{۲}\right)\leq\frac{۱}{۲}\big(f(x)+f(y)\big).$$

قضیه ۱.۱.۱. *(قضیه‌ی ینسن) فرض کنید f یک تابع محدب میانی روی (α,β) باشد (که درآن $-\infty\leq\alpha\leq\infty$) و روی (α,β) از بالا به یک عدد حقیقی M کراندار باشد. آن‌گاه f یک تابع پیوسته و محدب روی (α,β) می‌باشد.*

برهان. چون f یک تابع محدب میانی است پس برای هر $n\in\mathbb{N}$ و هر $x_۱,\ldots,x_n$ در (α,β)

خواهیم داشت

$$f\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)\leq\frac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n}$$

عدد صحیح و مثبت $m<n$ را انتخاب کرده و قرار می‌دهیم $x_1=x_2=\cdots=x_m=x+n\delta$ و $x_{m+1}=\cdots=x_n=x$ که در آن $x\in(\alpha,\beta)$ دلخواه بوده و δ بگونه‌ای انتخاب می‌شود که $x+n\delta\in(a,b)$. بنابراین

$$\begin{aligned}f(x+m\delta)&=f\left(\frac{m(x+n\delta)+(n-m)x}{n}\right)\\&\leq\frac{m}{n}f(x+n\delta)+\frac{n-m}{n}f(x),\end{aligned}$$

و درنتیجه

$$\frac{f(x+n\delta)-f(x)}{n}\geq\frac{f(x+m\delta)-f(x)}{m}.$$

اکنون با جایگذاری مناسب $-\delta$ به جای δ، بطور مشابه به‌دست می‌آوریم

$$\frac{f(x)-f(x-m\delta)}{m}\geq\frac{f(x)-f(x-n\delta)}{n}.$$

ولی بنا به تعریف تابع محدب میانی، چون $f(x+m\delta)+f(x-m\delta)\geq 2f(x)$ پس

$$f(x+m\delta)-f(x)\geq f(x)-f(x-m\delta),$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\frac{f(x+n\delta)-f(x)}{n}&\geq\frac{f(x+m\delta)-f(x)}{m}\\&\geq\frac{f(x)-f(x-m\delta)}{m}\\&\geq\frac{f(x)-f(x-n\delta)}{n}.\end{aligned}$$

با توجه به اینکه f روی (α,β) از بالا به M کراندار است و با فرض $m=۱$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\frac{M-f(x)}{n} &\geq f(x+\delta)-f(x)\\ &\geq f(x)-f(x-\delta)\\ &\geq \frac{f(x)-M}{n}\end{aligned}$$

وحال اگر $\delta \longrightarrow ۰$، می‌توان n را آن‌قدر بزرگ گرفت که هنوز $x-n\delta, x+n\delta \in (\alpha,\beta)$ باشند، لذا می‌توان فرض کرد $n \longrightarrow \infty$، و نتیجه گرفت

$$\lim_{\delta\to ۰}[f(x+\delta)-f(x)]=۰$$

برای اثبات محدب بودن فرض کنیم $\lambda \in [۰,۱]$ که $\lambda=\frac{m}{n}$ و $۰\leq m\leq n$ یعنی

$$\begin{aligned}f\big(\lambda x+(۱-\lambda)y\big) &= f\Big(\frac{m}{n}x+\frac{n-m}{n}y\Big)\\ &= f\Big(\frac{mx+(n-m)y}{n}\Big)\\ &\leq \frac{mf(x)+(n-m)f(y)}{n}\\ &= \lambda f(x)+(۱-\lambda)f(y)\end{aligned}$$

حال اگر $\lambda\in[۰,۱]$ دلخواه باشد در این صورت یک دنباله از اعداد گویا مانند λ_k از $[۰,۱]$ هست که $\lambda_k \longrightarrow \lambda$. با توجه به پیوستگی f می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}f\big(\lambda x+(۱-\lambda)y\big) &= \lim_{k\to\infty} f\big(\lambda_k x+(۱-\lambda_k y)\big)\\ &\leq \lim_{k\to\infty}[\lambda_k f(x)+(۱-\lambda_k)f(y)]\\ &= \lambda f(x)+(۱-\lambda)f(y)\end{aligned}$$

یعنی f روی (α,β) محدب است. □

قضیه ۲.۱.۱. *(قضیه استون وایرشتراس) اگر تابع f بر بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد. آن‌گاه دنباله‌ای از چندجمله‌ای‌ها مانند $\{P_n\}$ وجود دارد که $P_n \rightrightarrows f$.*

۲.۱ توابع محدب عملگری

تعریف ۲.۱. ۱) فضای برداری مختلط $\mathcal{H}$ را یک فضای ضرب داخلی گویند اگر به هر زوج مرتب از بردارهای y, x در $\mathcal{H}$ یک عدد مختلط مانند $\langle x, y\rangle$ به‌نام «ضرب داخلی» (یا ضرب اسکالر) y, x به شرایط زیر مربوط باشد.

الف) اگر $x, y, z \in \mathcal{H}$ ، $\langle x+z, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle$.

ب) اگر $x, y, z \in \mathcal{H}$ و α اسکالر باشد، $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha \langle x, y\rangle$.

پ) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ (علامت بار نشانگر مزدوج مختلط است).

ت) به ازای هر $x \in \mathcal{H}$، $\langle x, x\rangle \geq ۰$ و $\langle x, x\rangle = ۰$ فقط اگر $x = ۰$ باشد.

۲) هر فضای هیلبرت یک فضای ضرب داخلی است که با متر تعریف شده به‌وسیله‌ی ضرب داخلی تام باشد یعنی هر دنباله‌ی کوشی در آن همگراست.

تعریف ۳.۱. یک جبر مختلط مانند $\mathcal{A}$ یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{C}$ است که ضرب آن با یک نگاشت دو خطی زیر تعریف می‌شود

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}, \qquad (a, b) \longmapsto ab$$

به‌طوری‌که برای $a, b, c \in \mathcal{A}$ داشته باشیم $a(bc) = (ab)c$.

در این پایان نامه $\mathcal{A}$ یک جبر در نظر گرفته شده است.

تعریف ۴.۱. نگاشت T که از فضای برداری $\mathcal{H}$ به فضای برداری $\mathcal{K}$ تعریف شده، عملگر خطی است در صورتی که به ازای هر x, y در $\mathcal{H}$، و هر اسکالر α، $T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y)$، در صورتی که $\mathcal{K}, \mathcal{H}$ فضای ضرب داخلی باشند، عملگر T کراندار خوانده می‌شود هرگاه $M > ۰$ موجود باشد به‌طوری که به‌ازای هر $x \in \mathcal{H}$، $\| Tx \| \leq M \| x \|$ و نرم عملگر T را به‌صورت

$$\| T \| = \sup \{\| Tx \| : x \in \mathcal{H}, \| x \| \leq ۱\}$$

تعریف می‌کنیم.

تعریف ۵.۱. گوئیم عملگر a مثبت است اگر برای هر $x \in \mathcal{H}$، $\langle a(x), x\rangle \geq ۰$ که با نماد $a \geq ۰$ نشان داده می‌شود. همچنین عملگر a اکیداً مثبت است اگر a مثبت و وارون‌پذیر باشد. که با نماد $a > ۰$ نشان داده می‌شود. که در آن $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ کلیه‌ی عملگرهای خطی کراندار بر فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ است.

$a \geq b$ برای عملگرهای مثبت a, b روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ برای هر $x \in \mathcal{H}$ به‌صورت $\langle ax, x\rangle \geq \langle bx, x\rangle$ تعریف می‌شود.

تعریف ۶.۱. نگاشت $* : a \to a^*$ از جبر مختلط (نه لزوما تعویض پذیر) $\mathcal{A}$ به توی $\mathcal{A}$ را یک برگشت بر $\mathcal{A}$ گویند اگر چهار خاصیت زیر را به ازای هر $a, b \in \mathcal{A}$ و $\lambda \in \mathbb{C}$ داشته باشد

الف) $(a+b)^* = a^* + b^*$،

ب) $(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*$،

پ) $(ab)^* = b^* a^*$،

ت) $a = a^{**}$.

زوج $(\mathcal{A}, *)$ را یک جبر برگشتی یا یک *-جبر می‌نامیم.

تعریف ۷.۱. فرض کنید $a, u \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ باشد در این‌صورت

الف) a نرمال است اگر $aa^* = a^*a$،

ب) a خودالحاقی یا هرمیتی است اگر $a^* = a$،

پ) اگر $u^*u = ۱$ آن‌گاه u را طولپایی گویند،

ت) عنصر u یکانی است اگر $uu^* = ۱ = u^*u$ که در آن $۱_{\mathcal{H}} = ۱$ عملگر همانی بر $\mathcal{H}$ است،

ث) $p \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ تصویر است اگر $p^۲ = p^* = p$.

با توجه به تعاریف بالا هر تصویر، عضو هرمیتی است و هر یکانی، عضوی نرمال است و همچنین دیده می‌شود هر یکانی یک طولپایی است.

لم ۱.۲.۱. *عملگر a انقباضی است اگر و فقط اگر* $a^*a \leq ۱_{\mathcal{H}}$.

برهان. فرض کنیم $\|a\| \leq ۱$ پس $۱ = \|۱_{\mathcal{H}}\| \leq \|a\|$ بنابراین $\|a\|^۲ \leq \|۱_{\mathcal{H}}\|^۲$ بنابراین$\leq a^*a$ $۱_{\mathcal{H}} = ۱_{\mathcal{H}}^*۱_{\mathcal{H}}$ در نتیجه $a^*a \leq ۱_{\mathcal{H}}$.

حال عکس آن را اثبات می‌کنیم فرض کنیم که $a^*a \leq ۱_{\mathcal{H}}$ پس $a^*a \leq ۱_{\mathcal{H}}^*۱_{\mathcal{H}} = ۱_{\mathcal{H}}$ بنابراین $۱ = \|۱_{\mathcal{H}}\|^۲ \leq \|a\|^۲$ پس $\|a\| \leq ۱$. $\square$

تعریف ۸.۱. طیف عنصر a از جبر یکدار $\mathcal{A}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\sigma(a) = \sigma_{\mathcal{A}}(a) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda ۱ - a \notin Inv(\mathcal{A})\}$$

که در آن $Inv(\mathcal{A})$ مجموعه‌ی تمام عناصر وارون‌پذیر $\mathcal{A}$ است.

گزاره ۲.۲.۱. *اگر عملگر* $a \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$*، به گونه ای باشد که* $\| a \| \leq ۱$ همچنین، $x = (۱ - aa^*)^{\frac{۱}{۲}}$ و $y = (۱ - a^*a)^{\frac{۱}{۲}}$. *در این صورت،*

$$U = \begin{pmatrix} a & x \\ y & -a^* \end{pmatrix}$$

و

$$V = \begin{pmatrix} a & -x \\ y & a^* \end{pmatrix}$$

عملگرهای یکانی هستند.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم، $a^*(۱ - aa^*)^{\frac{۱}{۲}} = (۱ - a^*a)^{\frac{۱}{۲}}a^*$ می بینیم که $a^*(۱ - aa^*) = (۱ - a^*a)a^*$ همچنین،

$$a^*(۱ - aa^*)^۲ = a^*(I - ۲aa^* + aa^*aa^*) = (I - ۲a^*a + a^*aa^*a)a^* = (۱ - a^*a)^۲a^*$$

به همین ترتیب به استقراء معلوم می‌شود که $a^*(۱ - aa^*)^n = (۱ - a^*a)^n a^*$ پس برای هر چندجمله ای p، $a^*p(۱ - aa^*) = p(۱ - a^*a)a^*$. و با اتکا به قضیه استون وایراشتراس حکم مطلوب ثابت می‌شود. به این ترتیب می‌بینیم، $ya^* = a^*x^*$ و $ay = x^*a$ و نیز به سادگی معلوم

می‌شود، $xx^* = ۱ - aa^*$ و $yy^* = ۱ - a^*a$. بنابراین

$$\begin{pmatrix} a & x \\ y & -a^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^* & y^* \\ x^* & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa^* + xx^* & ay^* - xa \\ ya^* - a^*x^* & yy^* + a^*a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

پس U یکانی است و به همین ترتیب V یکانی می‌باشد. $\square$

حال قضیه طیفی را برای عملگرهای خودالحاقی و خطی کراندار روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ معرفی می‌کنیم. به همین خاطر ابتدا در زیر قطری کردن ماتریس‌های خودالحاقی در نظریه ماتریس‌ها را بیان می کنیم.

اگر A یک ماتریس خودالحاقی $k \times k$ باشد، پس ماتریس یکانی U وجود دارد به‌طوری‌که

$$A = U^*\Lambda U \qquad (۱.۱)$$

که $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_۱, ..., \lambda_k)$ و $\lambda_i \in \mathbb{R}$ مقادیر ویژه ماتریس A می‌باشند.

اگر قرار دهیم

$$E_۱ = U^*\mathrm{diag}(۱, ۰, ..., ۰)U$$

$$E_۲ = U^*\mathrm{diag}(۱, ۱, ۰, ..., ۰)U$$

$$.$$

$$.$$

$$.$$

$$E_k = U^*\mathrm{diag}(۱, ۱, ..., ۱)U$$

پس (۱.۱) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$A = \lambda_۱ E_۱ + \lambda_۲(E_۲ - E_۱) + ... + \lambda_k(E_k - E_{k-۱}) = \sum_{j=۱}^{k} \lambda_j \triangle E_j \qquad (۲.۱)$$

که $\triangle E_j = E_j - E_{j-1}$ و $E_0 = 0$. اگر $f(t)$ تابع حقیقی مقدار پیوسته روی طیف $\sigma(A)$ باشد، پس $f(A)$ را می‌توان به‌صورت زیر تعریف کرد،

$$f(A) = \sum_{j=1}^{k} f(\lambda_j)\triangle E_j. \tag{۳.۱}$$

این نتیجه را می‌توان به عملگرهای خودالحاق روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ گسترش داد.

فرض کنید A عملگر خودالحاقی روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ و $f(t)$ تابع حقیقی مقدار پیوسته‌ی تعریف شده روی بازه‌ی $[m, M]$ باشد، که $m = \inf_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle$ و $M = \max_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle$.

پس A به‌صورت زیر بیان می‌شود،

$$A = \int_{m-0}^{M} \lambda dE_\lambda \tag{۴.۱}$$

که $\{E_\lambda : \lambda \in \mathbb{R}\}$ خانواده‌ای از تصویرهایی است که $E_\lambda \leq E_\mu$ هرگاه $\lambda \leq \mu$، همچنین $E_{\lambda+0} = E_\lambda$، $E_{-\infty} = 0$ و $E_\infty = 1_{\mathcal{H}}$ باشند.

پس عملگر خودالحاقی A روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ یک گسترش از ماتریس خودالحاقی است، می‌توان (۴.۱) را به عنوان گسترش یافته‌ی (۲.۱) بررسی کرد. بنابراین گسترش یافته (۳.۱) به‌صورت زیر است،

$$f(A) = \int_{m-0}^{M} f(\lambda) dE_\lambda \tag{۵.۱}$$

گزاره ۳.۲.۱. *اگر V یک طولپایی باشد، آن‌گاه* $f(VAV^{-1}) = Vf(A)V^{-1}$.

برهان. فرض کنید E و E' به ترتیب اندازه طیفی مربوط به عملگری VAV^{-1} و A باشند در این صورت،

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n dE_{x,x}(\lambda) &= \left\langle (VAV^{-1})^n x, x \right\rangle \\ &= \left\langle A^n V^{-1}x, V^* x\right\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n dE'_{V^{-1}x, V^* x}(\lambda)\end{aligned}$$

بنابراین برای هر چند جمله ای f، طولپایی V و عملگر خودالحاق A،

$f(VAV^{-1}) = Vf(A)V^{-1}$ برقرار است. بنا بر قضیه ی استون وایرشتراس برهان کامل می‌شود.

$\square$

تعریف ۹.۱. تابع حقیقی f روی بازه I (لزومی ندارد بازه متناهی، باز یا بسته باشد.) *یکنوای عملگری* گفته می‌شود، اگر برای هر زوج از عملگرهای خودالحاق y, x که طیف آن‌ها در بازه I است، و $x \leq y$، داشته باشیم، $f(x) \leq f(y)$.

مثال. تابع $f(t) = t^2$ یکنوای عملگری نیست. برای دیدن این موضوع فرض کنید ماتریس های A, B به صورت های زیر باشند،

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

در این‌صورت اگر $A \geq B$ یعنی $A - B \geq 0$ اما نامساوی $A^2 \ngeq B^2$ برقرار نیست. چون

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \ngeq 0$$

تعریف ۱۰.۱. تابع n متغیری حقیقی f را روی حاصلضرب دکارتی از بازه های $J = J_1 \times ... \times J_n$ *محدب عملگری* گویند اگر برای هر عملگر B_i, A_i با $\sigma(A_i) \subset J_i$، $\sigma(B_i) \subset J_i$ و $0 \leq i \leq n$ و هر $0 \leq \lambda \leq 1$ داشته باشیم

$$f\big(\lambda(A_1, ..., A_n) + (1 - \lambda)(B_1, ..., B_n)\big) \leq \lambda f(A_1, ..., A_n) + (1 - \lambda) f(B_1, ..., B_n)$$

مثال. تابع $f(t) = t^3$ روی $[0, \infty)$ محدب عملگری نیست. برای دیدن این موضوع فرض کنید ماتریس های A, B به صورت های زیر باشند،

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

در این صورت،

$$\frac{A^{۳}+B^{۳}}{۲}-(\frac{A+B}{۲})^{۳}=\begin{pmatrix} ۱ & ۶ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

ماتریس معین مثبت نیست.

مثال. تابع $f(t)=-\frac{۱}{t}$ روی $(۰,\infty)$ یکنوای عملگری است زیرا فرض کنید $B \geq A > ۰$، در این صورت $I \geq B^{\frac{-۱}{۲}}AB^{\frac{-۱}{۲}}$. از طرفی اگر A مثبت و معکوس پذیر باشد $A^{-۱}$ نیز مثبت است. پس $t \to t^{-۱}$ روی عملگرهای مثبت و جابجایی، ترتیب را عکس می‌کند. بنابراین $I \leq B^{\frac{۱}{۲}}A^{-۱}B^{\frac{۱}{۲}}$ در نتیجه $-A^{-۱} \leq -B^{-۱}$. اگر A و B بایکدیگر جابجا شوند، AB خودالحاق است و چون A و B مثبت هستند، طیف AB در $[۰,\infty)$ قرار می‌گیرد. پس در این صورت $AB \geq ۰$.

گزاره ۱.۲.۴. *فرض کنید تابع f یکنوای عملگری باشند، در این صورت اگر A عملگر خود الحاق و P تصویر باشد. $Pf(PAP)P = f(PAP)P = Pf(PAP)P$.*

برهان. نشان می‌دهیم $f(PAP)P = Pf(PAP)$. برای این منظور فرض کنید E تجزیه طیفی مربوط به عملگر PAP باشد به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^n dE_{Px,x}(\lambda) &= \langle (PAP)^n Px, x\rangle \\ &= \langle PA^n Px, x\rangle \\ &= \langle (PAP)^n x, Px\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\lambda^n dE_{x,Px}(\lambda).\end{aligned}$$

و درنتیجه برای هر چند جمله‌ای f، $f(PAP)P = Pf(PAP)$ و این تساوی اول را ثابت می‌کند. و تساوی دوم نیز به همین ترتیب اثبات می‌شود. □

گزاره ۱.۲.۵. *اگر A یک عملگر خودالحاق و P یک تصویر باشد که $PA = AP$ آن‌گاه $Pf(PAP)P = Pf(A)P$.*

برهان. فرض کنید E, E' به ترتیب اندازه‌ی طیفی مربوط به عملگر های PAP, A باشند در این صورت،

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n dE_{Px,Px}(\lambda) &= \langle (PAP)^n Px, Px\rangle \\ &= \langle A^n Px, Px\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n dE'_{Px,Px}(\lambda).\end{aligned}$$

بنابراین هرچندجمله‌ای f، درصورتی‌که $PA = AP$ آن‌گاه $Pf(PAP)P = Pf(A)P$. □

تعریف ۱.۱۱. نگاشت خطی پیوسته $U : \mathcal{H}_۱ \longrightarrow \mathcal{H}_۲$ بین فضاهای هیلبرت $\mathcal{H}_۱$ و $\mathcal{H}_۲$یک طولپایی جزئی است اگر U روی $ker(U)^\perp$ ایزومتریک باشد بدین معنی که برای هر $x \in \ker(U)^\perp$، $\|U(x)\| = \|x\|$ باشد.

قضیه ۱.۲.۶. *(تجزیه قطبی) فرض کنید که V یک عملگر خطی و پیوسته روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد آن‌گاه طولپایی جزئی یکتا چون $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ وجود دارد به‌طوری که $V = U|V|$ علاوه بر آن $U^*V = |V|$.*

برهان. اگر $x \in \mathcal{H}$ باشد داریم

$$\begin{aligned}\||V|(x)\|^۲ &= \langle |V|(x), |V|(x)\rangle \\ &= \langle |V|^۲(x), x\rangle \\ &= \langle V^*V(x), x\rangle \\ &= \langle V(x), V(x)\rangle \\ &= \|V(x)\|^۲\end{aligned}$$

در نتیجه

$$U_۰ : \ |V|(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{H}, \quad |V|(x) \mapsto V(x)$$

طولپایی و خوش تعریف است همچنین $U_\circ$ خطی است. بنابراین $U_\circ$ داری توسیع طولپایی خطی یکتا (همان $U_\circ$) به $\overline{|V|(\mathcal{H})}$ دارد. $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$U = \begin{cases} U_\circ & on\ \overline{|V|(H)} \\ \circ & on\ \overline{|V|(H)^\perp} \end{cases}$$

آنگاه $U|V| = V$ و U روی$ker(U)^\perp$ طولپایی است زیرا $ker(U) = \overline{|V|(H)}^\perp$. بنابراین U طولپایی جزئی است.حال

$$\begin{aligned} \langle U^*V(x), |V|(y)\rangle &= \langle V(x), V(y)\rangle \\ &= \langle V^*V(x), y\rangle \\ &= \langle |V|(x), |V|(y)\rangle \end{aligned}$$

در نتیجه $\langle UV(x), Z\rangle = \langle |V|(x), Z\rangle$ برای هر $Z \in \overline{|V|(H)}$ برقرار است. بنابراین برای هر $Z \in \mathcal{H}$ برقرار است. در نتیجه $U^*V = |V|$. حال فرض کنید که W طولپایی جزئی دیگری باشد به طوری که $V = W|V|$ و $ker(U) = ker(V)$ آن‌گاه W با U روی $\overline{|V|(H)}^\perp$ مساوی است و روی $ker(U) = ker(W) = ker(V) = \overline{|V|(H)}^\perp$ بنابراین $W = U$ □

لم ۷.۲.۱. *اگر f تابع یکنوای عملگری باشد آن‌گاه*

$$f(U^*AU) = U^*f(A)U$$

برهان. قرار دهید $B = U^*AU$ که B خود الحاق است چون $B^* = U^*A^*U = U^*AU = B$. بنابراین $B^m = (U^*AU)^m = (U^*AU)(U^*AU) \quad \dots \quad (U^*AU) = U^*A^mU$ برای هر عدد صحیح $m \geq \circ$. داریم $p(B) = U^*p(A)U$ برای هر چند جمله‌ای $p(t)$. در نتیجه چندجمله‌ای (p_j) وجود دارد به طوری که $\|f - p_j\| \to \circ$ وقتی $j \to \infty$ برای هر تابع یکنوای