بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شهید بهشتی

دانشکده علوم ریاضی

گرایش ریاضی محض

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

عنوان
مشخص سازی زیررسته هایی از مدولها روی حلقه نوتری

نگارنده

زهرا دادخواه

استاد راهنما

آقای دکتر مسعود طوسی

استاد مشاور

آقای دکتر محمد مهدی ابراهیمی

شهریور ۱۳۸۹

دانشگاه شهید بهشتی

تاریخ ....
شماره ....
پیوست........................

«بسمه تعالی»

صورتجلسه دفاع از پایان نامه دانشجویان دوره کارشناسی ارشد

تهران ۱۹۸۳۹۶۳۱۱۳ اوین
تلفن: ۲۹۹۰۱

بازگشت به مجوز دفاع شماره **۲۷۰۶/۲۰۰/د** مورخ **۸۹/۶/۱۳** جلسه هیأت داوران ارزیابی پایان‌نامه **خانم زهرا دادخواه** به شماره شناسنامه: **۱۳۸۵** صادره از : **تکاب** متولد: **۱۳۶۵** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته: **ریاضی**

با عنوان:

مشخص سازی زیر رسته‌هایی از مدول‌ها روی حلقه نوتری

به راهنمایی: آقای دکتر مسعود طوسی

طبق دعوت قبلی در تاریخ **۸۹/۶/۲۴** تشکیل گردید و بر اساس رأی هیأت داوری و با عنایت به ماده ۲۰ آئین نامه دکتری مورخ ۷۵/۱۰/۲۵ پایان نامه مزبور با نمره **۱۸/۷۵ (هیجده و هفتاد و پنج‌صدم)** و درجه **عالی** مورد تصویب قرار گرفت.

	مرتبه علمی	نام دانشگاه	امضاء
۱. **استاد راهنما:** آقای دکتر مسعود طوسی	استاد	شهید بهشتی	
۲. **استاد مشاور:** آقای دکتر محمد مهدی ابراهیمی	استاد	شهید بهشتی	ابراهیمی
۳. **استاد داور:** خانم دکتر مژگان محمودی	استاد	شهید بهشتی	
۴. **استاد داور:** آقای دکتر کامران دیوانی آذر	دانشیار	الزهراء	
۵. **مدیر گروه:** آقای دکتر سهرابعلی یوسفی	دانشیار	شهید بهشتی	

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشکده
مژگان محمودی

تقدیم به

پدر و مادر بزرگوار

و همسر مهربانم

قدردانی

در ابتدا حمد و سپاس می گوییم دانای متعال را که آموخت به ما چگونه آموختن را و فرصت داد به من دانش آموختن را.

تشکر قلبی و بهترین احترامات تقدیم استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر طوسی، که در طی تکمیل این رساله جهت گشودن گره های گاه بسیار دشوار مطالب، با دانش و حوصله ای مثال زدنی، اینجانب را راهنمایی و هدایت فرمودند.

همچنین سپاسگذارم از محضر جناب آقای دکتر ابراهیمی، که با تکیه بر سالها دانش و تجربه، نکات مهمی را چه درباره جزئیات علمی و چه در جهت غنای کل و کیفیت این رساله به اینجانب گوشزد نمودند.

فهرست مندرجات

چکیده

فرض کنیم R حلقهٔ جابه‌جایی و نوتری باشد. مجموعهٔ ایده‌آلهای اول R را با $SpecR$ نشان می دهیم.

ایده‌آل اول P را وابسته به R−مدول M می نامیم هرگاه $m \in M$ وجود داشته باشد به طوری که $P = (o \underset{R}{:} m)$.

همچنین برای R- مدول مفروض M تعریف می کنیم:

$$supp_R(M) = \{P \in specR | \exists i \geq \circ ; Tor^i_{R_P}(\frac{R_P}{PR_P}, M_P) \neq \circ\}$$

و آن را محمل کوچک R-مدول M می نامیم.

در این رساله، ابتدا زیررسته هایی خاص از رستهٔ R-مدولها را تعریف و مشخص می نماییم.در ادامه با استفاده از مفهوم ایده‌آل اول وابسته و محمل کوچک نشان می دهیم که تناظر دوسویی بین مجموعهٔ این گونه از زیررسته‌های خاص و مجموعه‌ای از زیرمجموعه های $SpecR$ برقرار می باشد.

مقدمه

فرض کنیم حلقهٔ R جابه‌جایی و نوتری باشد. ردهٔ R—مدولها و R—همریختی ها را با $ModR$ و زیرردهٔ $ModR$، متشکل از R—مدولهای دارای نمایش متناهی را با $modR$ نمایش می دهیم. مجموعهٔ تمام ایده‌آلهای اول حلقهٔ R را با $SpecR$ نشان می دهیم .

در این رساله برخی زیررده های $ModR$ را تعریف می کنیم:

زیرردهٔ منسجم: زیررده ای است که تحت هسته،هم هسته و توسیع بسته باشد.

زیرردهٔ سِر: زیرردهٔ منسجم است که تحت زیرمدول بسته می باشد.

کلاس تاب دار: زیرردهٔ سِر می باشد به طوری که تحت جمع مستقیم دلخواه بسته است .

زیرردهٔ موضعی: زیررده ای است که تحت زیرمدول، مدول خارج قسمتی، توسیع و جمع مستقیم دلخواه بسته باشد.

نتیجهٔ کلاسیک گابریل [۱] را یادآوری می کنیم که یک تناظر دوسویی بین مجموعهٔ زیررده های موضعی از $ModR$ و مجموعهٔ زیرمجموعه های از بالا بسته (برای تعریف به صفحهٔ ۶۳ مراجعه کنید) از $SpecR$ را برقرار کرد.

---

۱ Gabriel

اخیرا تعدادی از محققین زیررسته های $ModR$ را برحسب زیرمجموعه های $SpecR$ مطالعه کرده اند. به[۶] و [۸] و [۱۲] مراجعه کنید.

هدف اصلی این رساله‌این است که نشان می دهیم تناظر دوسویی بین مجموعهٔ زیررسته های خاصی از R—مدولها و مجموعهٔ زیرمجموعه های $SpecR$ برقرار می باشد.

برای تهیهٔ این رساله از مقالات [۷] و [۱۲] استفاده شده است.

نگارش این رساله در دو فصل شامل ۷ بخش تنظیم شده است. در ذیل به اختصار به معرفی و توضیح در مورد آنها پرداخته می شود.

فصل اول که شامل ۳ بخش می باشد به معرفی پیش نیازها و مقدمات لازم برای مطالعهٔ فصل دوم اختصاص داده شده است.

در بخش اول مفهوم حد مستقیم را تعریف کرده و برخی از خواص حد مستقیم R—مدولها را بیان نموده و اثبات می نماییم.

در بخش دوم و در قسمت اول، مفاهیم پوشش انژکتیو R—مدول مفروض و ایده آل اول وابستهٔ R—مدول مفروض را تعریف می کنیم و با ذکر چند قضیه برخی خواص اساسی آنها را که در مطالعهٔ پایان نامه مورد نیاز است، اثبات می کنیم. در قسمت دوم، تحلیل انژکتیو و عدد باس را برای R—مدول مفروض تعریف می نماییم.

در بخش سوم ابتدا برای R—مدول مفروض M، یک M—رشته را تعریف می کنیم. در ادامه مفهوم درجهٔ ایده آل دلخواه روی R—مدول مفروض را تعریف کرده و برخی

خواص آن که در بخش ۲—۵ به کار خواهیم برد را در قالب چند لم بررسی می کنیم.

فصل دوم که شامل ۴ بخش می باشد مطالب اصلی و تخصصی این رساله را در بر دارد.

در بخش ۴ برخی خواص اساسی زیررسته های R—مدولها را ذکر کرده و اثبات می نماییم. همچنین تعاریف دقیق تری از زیررسته هایی که در ابتدای مقدمه گفته شد ارائه داده می شود و برخی از خواص آنها مورد بررسی قرار می گیرد.

بخش ۵ آغاز مطالب اصلی این رساله می باشد. در این بخش، زیررسته‌هایی از R—مدولها را به وسیلهٔ مجموعهٔ ایده‌آلهای اول وابسته مشخص می نماییم. قضیهٔ اصلی این بخش عبارت است از:

قضیه: فرض کنیم X مجموعهٔ زیررسته هایی از R—مدولها باشد که تحت زیر مدول، توسیع و حد مستقیم بسته باشند و Y مجموعهٔ زیر مجموعه های $SpecR$ باشد.

برای هر زیررستهٔ C از مجموعهٔ X تعریف می کنیم $AssC = \bigcup\limits_{M\in C} AssM$. برای هر مجموعهٔ ϕ از Y تعریف می کنیم $Ass^{-1}\phi = \{M \in ModR | AssM \subseteq \phi\}$.

نگاشت $f : X \to Y$، با ضابطهٔ تعریف $f(\mathbf{C}) = Ass\mathbf{C}$ و نگاشت $g : Y \to X$ با ضابطهٔ تعریف $g(\phi) = Ass^{-1}\phi$ را در نظر می گیریم. در این صورت:

۱) $f \circ g = Id_Y$.

۲) $g \circ f = Id_X$.

۳) نگاشت f، رابطهٔ شمول را حفظ می کند.

در بخش ٦ و در قسمت اول، مفاهیم محمل R—مدول مفروض و مجموعهٔ منسجم را تعریف می کنیم. در ادامه با استفاده از مفهوم محمل کوچک زیررسته‌هایی از R—مدولها را مشخص می کنیم. قضیهٔ اصلی این بخش عبارت است از:

قضیه: فرض کنیم X مجوعهٔ زیر رسته هایی از R—مدولها باشد که منسجم هستند و تحت حد مستقیم بسته می باشند و Y مجموعهٔ زیر مجموعه های منسجم از $SpecR$ باشد.

برای هر زیر رستهٔ C از مجموعهٔ X تعریف می کنیم $suppC = \bigcup_{M \in \mathbf{C}} suppM$. برای هر مجموعهٔ Φ از Y تعریف می کنیم: $supp^{-1}\Phi = \{M \in ModR | suppM \subseteq \Phi\}$.
نگاشت $f : X \to Y$ با ضابطهٔ تعریف $f(\mathbf{C}) = supp\mathbf{C}$ و نگاشت $g : Y \to X$ با ضابطهٔ تعریف $g(\Phi) = supp^{-1}\Phi$ را در نظر می گیریم. دراینصورت:

۱) $f \circ g = Id_Y$

۲) $g \circ f = Id_X$

۳) نگاشت f، رابطهٔ شمول را حفظ می کند.

بخش ۷، بخش پایانی این رساله است. در این بخش خواص زیرمجموعه های منسجم از $SpecR$ را بررسی می کنیم.

در تمام طول این رساله فرض می کنیم R حلقهٔ جابه جایی و نوتری باشد وA حلقهٔ جابه جایی باشد.

فصل ۱

پیشنیازها و مقدمات

۱—۱ حد مستقیم

در این بخش مفهوم حد مستقیم را تعریف می کنیم. نشان می دهیم در رستهٔ A—مدولها، حد مستقیم وجود دارد و چند لم دربارهٔ خواص حد مستقیم بیان و اثبات می نماییم.

تعریف ۱.۱ مجموعهٔ جزئا مرتب I را مستقیم[۱] می نامیم هرگاه برای هر $i, j \in I$، $k \in I$ وجود داشته باشد به طوری که $i \leq k$ و $j \leq k$.

تعریف ۲.۱ رستهٔ[۲] $\mathbf{C}$، کلاسی از اشیا $A, B, C, \ldots$ همراه با

۱) به ازای هر زوج (A, B) از اشیای $\mathbf{C}$، مجموعه ای با نمایش $Hom(A, B)$ وجود داشته باشد به طوری که $Hom(A, B) \cap Hom(A', B') = \emptyset$ مگر $A = A'$ و $B = B'$.

۲) برای هر سه تایی (A, B, C) از اشیا $\mathbf{C}$، تابع

$$o : Hom(A, B) \times Hom(B, C) \longrightarrow Hom(A, C)$$

وجود داشته باشد که در خواص زیر صدق می کند:

الف) شرکت پذیری: اگر $f : A \longrightarrow B$ و $g : B \longrightarrow C$ و $h : C \longrightarrow D$ ریخت هایی از $\mathbf{C}$ باشند آنگاه $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

۱ direct

۲ category

ب) همانی: به ازای هر شی دلخواه B از $\mathbf{C}$، ریختی مانند $I_B : B \longrightarrow B$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $f : A \longrightarrow B$ و $g : B \longrightarrow A$ داشته باشیم: $g \circ I_B = g$ و $I_B \circ f = f$.

تعریف ۳.۱ فرض کنیم I یک مجموعهٔ جزئا مرتب و $\mathbf{C}$ یک رسته باشد. یک دستگاه مستقیم در $\mathbf{C}$ با مجموعهٔ اندیس مستقیم I، خانوادهٔ (F_i, φ_j^i) است به طوری که در آن برای هر $i \in I$، F_i یک شی $\mathbf{C}$ می باشد و برای هر $i, j \in I$ که $i \leq j$، φ_j^i ریخت از F_i به F_j است به طوری که در شرایط زیر صدق می کند:

۱) برای هر $i \in I$، $\varphi_i^i : F_i \to F_i$ ریخت همانی باشد.

۲) هر گاه $i \leq j \leq k$، در اینصورت نمودار (۱.۱) جابجایی باشد.

تعریف ۴.۱ فرض کنیم (F_i, φ_j^i) یک دستگاه مستقیم در رستهٔ $\mathbf{C}$ باشد. حد مستقیم[۳] این دستگاه که با $\varinjlim F_i$ نشان داده می شود، یک شی و یک خانواده از ریخت ها مثل $\{\alpha_i : F_i \to \varinjlim F_i\}$ است که در شرایط زیر صدق می کند:

۱) هر گاه $i, j \in I$ که $i \leq j$ آنگاه $\alpha_i = \alpha_j \varphi_j^i$.

۲) هر گاه X یک شئ $\mathbf{C}$ باشد و یک خانواده از ریخت ها مثل $\{f_i : F_i \to X\}$ وجود داشته باشد که برای هر $i, j \in I$ با شرط $i \leq j$ داشته باشیم: $f_i = f_j \varphi_j^i$، آنگاه ریخت $\beta : \varinjlim F_i \to X$ وجود داشته باشد به طوری که نمودار (۲.۱) جابجایی باشد.

۳ directed limit

$$\begin{tikzcd}
F_i \arrow[rr, "\Phi_k^i"] \arrow[dr, "\Phi_j^i"'] & & F_k \\
& F_j \arrow[ur, "\Phi_k^j"'] &
\end{tikzcd}$$

شکل ۱.۱: نمودار جابجایی ۱

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim F_i \arrow[rr, dashed, "\beta"] & & X \\
& F_i \arrow[ul, "\alpha_i"'] \arrow[ur, "f_i"] \arrow[d, "\Phi_j^i"] & \\
& F_j \arrow[uul, "\alpha_j"] \arrow[uur, "f_j"'] &
\end{tikzcd}$$

شکل ۲.۱: نمودار جابجایی ۲

حال ثابت می کنیم در رستهٔ A—مدولها، حد مستقیم وجود دارد.

قضیه ۵.۱ حد مستقیم دستگاه مستقیم (F_i, φ_j^i) روی مجموعهٔ اندیس I در رستهٔ A—مدولها وجود دارد.

برهان : برای هر $i \in I$، فرض کنیم $\lambda_i : F_i \to \bigoplus_{i\in I} F_i$، A— تکریختی طبیعی باشد. فرض کنیم S، زیر مدول تولید شده توسط مجموعهٔ $\{\lambda_j\varphi_j^i(a_i) - \lambda_i(a_i); a_i \in F_i, i \leq j, i,j \in I\}$ در $\bigoplus_{i\in I} F_i$ باشد. قرار می دهیم: $\varinjlim_{i \in I} F_i = \frac{\bigoplus_{i\in I} F_i}{S}$.

نگاشت $\alpha_i : F_i \to \varinjlim_{i \in I} F_i$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\alpha_i(a_i) = \lambda_i(a_i) + S$$

در اینصورت $(\varinjlim_{i \in I} F_i, (\alpha_i)_{i\in I})$ در شرایط تعریف حد مستقیم صدق می کند.

تعریف ۶.۱ فرض کنیم I، مجموعهٔ اندیس مستقیم و (A_i, ϕ^i_j) یک دستگاه مستقیم روی مجموعهٔ اندیس I در رستهٔ A—مدولها باشد. X را برابر $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ تعریف می کنیم. همچنین یک رابطهٔ هم ارزی روی X را به صورت زیر تعریف می کنیم:

برای $a_i \in A_i$ و $a_j \in A_j$، $a_i \sim a_j$ هر گاه عنصر $k \geq i, j$ وجود داشته باشد به طوری که داشته باشیم: $\Phi^i_k(a_i) = \Phi^j_k(a_j)$.

برای هر $i \in I$ و $a_i \in A_i$، کلاس هم ارزی a_i نسبت به $\sim$ را با $[a_i]$ نشان می دهیم.

تعریف می کنیم: $L = \{[a_i]; a_i \in A_i, i \in I\}$. همچنین برای هر $r \in A$ و $a_i \in A_i$ و $a'_j \in A'_j$، تعریف می کنیم:

$r[a_i] = [ra_i]$.

$[a_i] + [a'_j] = [a_k + a'_k]$ به طوری که $k \geq i, j$ و $a_k = \Phi^i_k(a_i)$ و $a'_k = \Phi^j_k(a'_j)$.

به راحتی می توان دید که اعمال بالا خوشتعریف هستندو L، با اعمال بالا یک A—مدول می شود.

نگاشت $\lambda_i : A_i \to L$ را به صورت $\lambda_i(a_i) = [a_i]$ تعریف می کنیم.

در این صورت $(L,(\lambda_i)_{i\in I})$ در شرایط تعریف حد مستقیم صدق می کند.

لم ۷.۱ فرض کنیم R یک قلمرو صحیح و F میدان کسر های R باشد. قرار می دهیم $I = R - \{0\}$. رابطهٔ $(\leq)$ را روی مجموعهٔ I به صورت زیر تعریف می کنیم:

فرض کنیم $x, y \in I$. در اینصورت $x \leq y \Leftrightarrow x|y$.

در نتیجه $(I, \leq)$ یک مجموعهٔ مستقیم می باشد.

خانوادهٔ $\{A_x\}_{x\in I}$ از R—مدولها را به صورت $(x \in I)\quad A_x = \frac{1}{x}R$ در نظر می گیریم.

برای هر $x, y \in I$ که $x \leq y$ داریم: $\frac{1}{x}R \subseteq \frac{1}{y}R$.

تعریف می کنیم $\begin{array}{ll} \Phi y^x : A_x \to & A_y \\ a_x \to & a_y \end{array}$. در اینصورت نگاشت $\phi : \varinjlim_{x \in I} A_x \to F$

باضابطهٔ $\phi([a_x]) = a_x$ یک R—یکریختی می باشد.

برهان : اول) به راحتی دیده می شود که $(I, \leq)$ یک مجموعهٔ مستقیم است.

دوم) فرض کنیم $x, y \in I$ در اینصورت

$$\begin{array}{rcll} x \leqslant y & \Leftrightarrow & x|y & (R - 0) \\ & \Leftrightarrow & \exists r \in R; y = xr & (R - 0) \\ & \Leftrightarrow & \exists r \in R; \frac{1}{x} = \frac{r}{y} & (F) \\ & \Leftrightarrow & \frac{1}{x}R \subseteq \frac{1}{y}R & (F) \end{array}$$

سوم) نشان می دهیم نگاشت ϕ، خوش تعریف و یک به یک است.

فرض کنیم $[a_x], [a_y] \in \underrightarrow{\lim}_{x \in I} A_x$. در اینصورت $[a_x] = [a_y]$ اگر وتنهااگر $a_x \sim a_y$ اگر و تنها اگر عنصر $z \in I$ و $z \geq x, y$ وجود داشته باشد به طوری که $\Phi^x_z(a_x) = \Phi^y_z(a_y)$ اگر وتنها اگر $a_x = a_y$.

چهارم) نشان می دهیم نگاشت ϕ پوشاست.

فرض کنیم $\frac{r}{s} \in F$. در اینصورت $\frac{r}{s} \in \frac{1}{s}R = A_s$. قرار می دهیم $a_s = \frac{r}{s}$. در نتیجه داریم: $\phi([a_s]) = a_s$.

پنجم) ثابت می کنیم نگاشت ϕ یک همریختی R—مدولی است.

فرض کنیم $[a_x], [a_y] \in \underrightarrow{\lim}_{x \in I} A_x$. در اینصورت $\phi([a_x] + [a_y]) = \phi([a_k + a'_k])$ به طوری که $k \in I$ و $k \geq x, y$ و $a_k = \Phi^x_k(a_x)$ و $a'_k = \Phi^y_k(a_y)$. در نتیجه داریم $a_k = a_x$ و $a'_k = a_y$. لذا داریم :

$$\phi([a_x] + [a_y]) = \phi[a_x + a_y] = a_x + a_y = \phi([a_x]) + \phi([a_y])$$

فرض کنیم $[a_x] \in \underrightarrow{\lim}_{x \in I} A_x$ و $r \in R$. در اینصورت داریم:

$$\phi(r[a_x]) = \phi([ra_x]) = ra_x = r\phi([a_x])$$

از مطالب بالا حکم نتیجه می شود.

تذکر ۸.۱ فرض کنیم $(\Lambda, \leq)$ یک مجموعهٔ مستقیم ناتهی باشد و $(w_\alpha, h^\alpha_\beta)$ یک دستگاه مستقیم از R–مدولها با مجموعهٔ اندیس Λ باشد به طوری که برای هر $(\alpha, \beta) \in \Lambda \times \Lambda$ که $\alpha \geq \beta$، آنگاه $h^\alpha_\beta : w_\beta \to w_\alpha$. قرار می دهیم $w_\infty := \varinjlim_{\alpha \in \Lambda} w_\alpha$ و فرض می کنیم برای هر $\alpha \in \Lambda$، $h_\alpha : w_\alpha \to w_\beta$ نگاشت طبیعی باشد.

فرض می کنیم $T : F(R) \to F(R)$ یک فانکتور همورد باشد. از تعریف فانکتور نتیجه می شود که $T(h^\alpha_\beta)$، خانوادهٔ $(T(w_\alpha))_{\alpha \in \Lambda}$ را به یک دستگاه مستقیم از R–مدولها و R– همریختی‌ها در مجموعهٔ اندیس Λ تبدیل می کند. همچنین هرگاه $\alpha, \beta \in \Lambda$ باشند به طوری که $\alpha \geq \beta$، آنگاه نمودار جابجایی (۳.۱) نمودار جابجایی (۴.۱) را القا می کند. بنابراین با توجه به تعریف حد مستقیم، R–همریختی $w_T := \varinjlim_{\alpha \in \Lambda} T(w_\alpha) \to T(\varinjlim_{\alpha \in \Lambda} w_\alpha)$ وجود دارد.

هر گاه برای هر مجموعهٔ مستقیم Λ و دستگاه مستقیم $(w_\alpha, h^\alpha_\beta)$ در مجموعهٔ اندیس Λ، نگاشت w_T یک R–یکریختی باشد،آنگاه می گوییم فانکتور T با حد مستقیم جا به جا می شود.

$$\begin{tikzcd} W_\beta \arrow[r, "h^\alpha_\beta"] \arrow[dr, "h_\beta"'] & W_\alpha \arrow[d, "h_\alpha"] \\ & W_\infty \end{tikzcd}$$

شکل ۱.۳: نمودار جابجایی ۳

$$\begin{tikzcd} T(W_\beta) \arrow[r, "T(h^\alpha_\beta)"] \arrow[dr, "T(h_\beta)"'] & T(W_\alpha) \arrow[d, "T(h_\alpha)"] \\ & T(W_\infty) \end{tikzcd}$$

شکل ۱.۴: نمودار جابجایی ۴

۲) فرض کنیم M یک R–مدول باشد. قرار می دهیم $T = Ext^i_R(M,-)$.
در اینصورت T یک فانکتور همورد از رستهٔ R–مدولها به خودش می باشد. در نتیجه طبق قسمت (1) برای هر $i \geq 0$، همریختی $\Psi^i(M) : \varinjlim_{\alpha \in \Lambda} Ext^i_R(M, w_\alpha) \to Ext^i_R(M, w_\infty)$ را داریم.
اگر M یک R–مدول متناهی مولد باشد، آنگاه برای هر $i \geq 0$، $\Psi^i(M)$ یک R–یکریختی است.

۳) فرض کنیم S زیر مجموعهٔ ضربی بسته از R باشد. قرار می دهیم $T = S^{-1}(-)$.
دراینصورت T یک فانکتور همورد از رستهٔ R–مدولها به خودش می باشد. در نتیجه