بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه لرستان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

عنوان

مدول‌هایی که تحت حلقه‌ی درون‌ریختی‌هایشان اول هستند

نگارش

فتانه غیاثوند

استاد راهنما

دکتر رضا بیرانوند

استاد مشاور

دکتر علیرضا نظری

پایان‌نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی محض

دی ماه ۱۳۹۳

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

تقدیر و تشکر

سپاس مخصوص خداوند مهربان که به انسان توانایی و دانایی بخشید تا به بندگانش شفقت ورزد، مهربانی کند و در حل مشکلاتشان یاری شان نماید. از راحت خویش بگذرد و آسایش هم نوعان را مقدم دارد، با او معامله کند و در این خلوص انباز نگیرد و خوش باشد که پروردگار سمیع و بصیر است.

بدون شک جایگاه و منزلت معلم، اجّل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی شائبه ی او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم. اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تأمین می کند و سلامت امانت هایی را که به دستش سپرده اند، تضمین؛ بر حسب وظیفه و از باب "من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر الله عزّوجلّ":

از پدر و مادر عزیزم، این دو معلم بزرگوار که همواره بر کوتاهی و درشتی من قلم عفو کشیده اند و کریمانه از کنار غفلت هایم گذشته اند و در تمام عرصه های زندگی یار و یاوری بی چشم داشت برای من بوده اند؛ از استاد با کمالات و شایسته ام، جناب آقای دکتر رضا سیرانوند که در کمال سعه صدر از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این پایان نامه را بر عهده گرفتند؛ از استاد گرامی، جناب آقای دکتر علیرضا نظری که زحمت مشاوره این پایان نامه را متقبل شدند؛ و از استاد فرهیخته، جناب آقای دکتر سید مرتضی میرافضل که زحمت داوری این پایان نامه را بر عهده گرفتند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

چکیده

نام خانوادگی: غیاثوند   **نام:** فتانه

عنوان پایان‌نامه: مدول‌هایی که تحت حلقه‌ی درون‌ریختی‌هایشان اول هستند

استاد راهنما: دکتر رضا بیرانوند

استاد مشاور: دکتر علیرضا نظری

درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد   **رشته:** ریاضی محض   **گرایش:** جبر

محل تحصیل: دانشگاه لرستان   **دانشکده:** علوم پایه

تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۳   **تعداد صفحات:** ۷۶

کلید واژه‌ها: مدول اول، مدول‌هایی که تحت حلقه‌ی درون‌ریختی‌هایشان اول هستند، مدول جمع شدنی، مدول ددکیند متناهی، حلقه‌ی ددکیند متناهی، حلقه‌ی آرتینی ساده، حلقه‌ی گُلدی راست، مدول‌های کوهاپفین به‌طور ضعیف

چکیده: در این پایان‌نامه ابتدا به تعریف حلقه‌ی اول و ایدآل اول می‌پردازیم و سپس این تعریف را به مدول‌ها تعمیم داده و مدول اول و زیرمدول اول تعریف می‌شود. موضوع اصلی مورد مطالعه در این پایان‌نامه، مدولی است که تحت حلقه‌ی درون‌ریختی‌هایش اول است. R-مدول راست ناصفر M را تحت حلقه‌ی درون‌ریختی‌هایش اول گوییم هرگاه هر زیرمدول ناصفر کاملاً پایایی از M_R، روی حلقه‌ی درون‌ریختی‌های M_R وفادار باشد. بعد از آن به بررسی چند قضیه مهم می‌پردازیم. خواهیم دید که حلقه‌ی درون‌ریختی مدولی که تحت حلقه‌ی درون‌ریختی‌هایش اول باشد، اول است و مدول‌های مذکور دارای ویژگی پایای موریتا هستند. در فصل آخر با گذاشتن شرایطی بر روی این مدول‌ها، ویژگی های بیشتری از حلقه‌ی درون‌ریختی‌هایشان به‌دست آوردیم.

فهرست مطالب

مقدمه

برای اولین بار دانز در سال ۱۹۷۸ در مقاله‌ای با عنوان مدول‌های اول، مفهوم ایدآل اول را از حلقه به مدول‌هایی که بر روی حلقه‌های تعویض‌پذیرند تعمیم داد. با توجه به نقش اساسی ایدآل‌های اول در نظریه حلقه‌ها، گسترش این مفهوم روی مدول‌ها مورد توجه بسیاری از ریاضی‌دانان قرار گرفت و سؤالات متعددی در این زمینه مطرح گردید. اساسی‌ترین سؤالات در مورد زیرمدول‌های اول، ارتباط آن‌ها با ایدآل‌های حلقه و زیرمدول‌های ماکسیمال یک مدول بود. مجدداً دانز در سال ۱۹۸۰ توانست در دومین مقاله خود در این زمینه، ارتباط ایدآل‌های اول یک حلقه و زیرمدول‌های اول یک مدول بر روی آن حلقه را تحت شرایطی خاص بیان کند. بعد از وی لیو در سال ۱۹۸۰ قضایای اساسی زیرمدول‌های اول را اثبات نمود و برخی از قضیه‌های مهم مربوط به ایدآل‌های اول یک حلقه را به مدول‌ها تعمیم داد. وی به یکی از سؤالات مطرح شده در مورد زیرمدول اول پاسخ داد. در واقع وی نشان داد که لزوماً هر مدولی دارای زیرمدول اول نمی‌باشد و شرایطی را برای وجود زیرمدول های اول یک مدول روی حلقه‌های تعویض‌پذیر ارائه داد. با گسترش قضیه‌های مقدماتی زیرمدول های اول، از سال ۱۹۸۵ به بعد، به تدریج مسأله تعیین ساختار زیرمدول‌های اول مطرح گردید.در این پایان‌نامه به بررسی مدول‌هایی که تحت حلقه‌ی درون‌ریختی‌هایشان اول هستند می‌پردازیم. $R-$ مدول راست ناصفر M را تحت حلقه‌ی درون‌ریختی‌هایش اول گوییم هرگاه هر زیرمدول ناصفر کاملاً پایای آن روی حلقه‌ی درون‌ریختی‌های M_R وفادار باشد. نشان می‌دهیم حلقه‌ی درون‌ریختی چنین مدول‌هایی، اول است و هم‌چنین این مدول‌ها دارای ویژگی پایایی موریتا هستند. نشان می دهیم اگر حلقه‌ی R تعویض‌پذیر و $R-$مدول راست M تحت حلقه‌ی درون‌ریختی‌هایش اول باشد آن‌گاه M_R اول است. جمع مستقیم مدول‌های مذکور لزوماً تحت حلقه‌ی درون‌ریختی‌هایش اول

نیست که با آوردن مثال به اثبات آن پرداخته‌ایم. در سرتاسر این پایان‌نامه همه‌ی حلقه‌ها یکدار (نه لزوماً تعویض‌پذیر) و مدول‌ها یکانی فرض می‌شوند. مقاله‌ی اصلی مورد مطالعه و بررسی در این پایان‌نامه، مقاله زیر می‌باشد:

A. Haghany and M. R. Vedadi, *Endoprime Modules*, Acta Math. Hungar. 106 (1-2) (2005), 89-99.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

تعریف ۱.۱. ایدآل سره P از حلقه‌ی R را اول گوییم هرگاه برای هر دو ایدآل I و J در R، رابطه‌ی $IJ \subseteq P$ نتیجه بدهد $I \subseteq P$ یا $J \subseteq P$.

تعریف ۲.۱. حلقه‌ی R را اول گوییم هرگاه (0) ایدآل اول آن باشد.

تعریف ۳.۱. ایدآل I از حلقه‌ی R را نیم‌اول [1] گوییم هرگاه برای هر ایدآل A از R، رابطه‌ی $A^2 \subseteq I$ نتیجه بدهد $A \subseteq I$.

تعریف ۴.۱. حلقه‌ی R را نیم‌اول گوییم هرگاه (0) ایدآل نیم‌اول آن باشد.

تعریف ۵.۱. فرض‌کنید R یک حلقه و M یک R-مدول راست باشد. مجموعه‌ی $ann_R(M) = \{r \in R \mid Mr = 0\}$ را پوچ‌ساز [2] M تحت R (یا پوچ‌ساز راست M) می‌نامیم. هم‌چنین به راحتی دیده می‌شود که $ann_R(M)$ یک ایدآل دوطرفه در حلقه‌ی R است.

تعریف ۶.۱. R-مدول راست M را وفادار [3] گوییم هرگاه $ann_R(M) = 0$.

گزاره ۱.۱. فرض‌کنید M و N دو R-مدول راست باشند. هم‌چنین $f : M \longrightarrow N$ یک R-هم ریختی باشد. در این‌صورت:

(۱) اگر f مونومورفیسم باشد، آن‌گاه $ann_R(N) \subseteq ann_R(M)$.

(۲) اگر f اپی‌مورفیسم باشد، آن‌گاه $ann_R(M) \subseteq ann_R(N)$.

اثبات. (۱) فرض‌کنید $r \in ann_R(N)$. نشان می‌دهیم $r \in ann_R(M)$. یعنی $Mr = 0$. با توجه به R-هم‌ریختی بودن f، برای هر $m \in M$ داریم $f(mr) = f(m)r$. از طرف دیگر چون $r \in ann_R(N)$ و $f(m) \in N$، $f(m)r = 0$. بنابراین با توجه به این‌که f مونومورفیسم است برای هر $m \in M$، $mr = 0$.

(۲) فرض‌کنید $r \in ann_R(M)$. نشان می‌دهیم $r \in ann_R(N)$. یعنی $Nr = 0$. فرض‌کنید

---

[1] semiprime

[2] annihilator

[3] faithful

$n \in N$. چون f اپی‌مورفیسم است، $0 \neq m \in M$ به‌طوری‌که $f(m) = n$. بنابراین داریم $f(m)r = nr$. با توجه به R-هم‌ریختی بودن f داریم $f(mr) = f(m)r = nr$. از طرفی طبق فرض $r \in ann_R(M)$ بنابراین با توجه به رابطه‌ی اخیر داریم $nr = f(0) = 0$. درنتیجه برای هر $n \in N$، $nr = 0$.

تعریف ۷.۱. زیرمدول N از مدول M را زیرمدول سره [۴] در M گوییم هرگاه $N \neq M$ باشد.

تعریف ۸.۱. R-مدول راست ناصفر M را اول گوییم هرگاه برای هر زیرمدول ناصفر N از M داشته باشیم $ann_R(M) = ann_R(N)$.

تعریف ۹.۱. فرض‌کنید M و N دو R-مدول راست باشند. مجموعه‌ی همه‌ی R-هم‌ریختی‌ها از M به N را با $Hom_R(M, N)$ نشان می‌دهیم. اگر $M = N$، $Hom_R(M, N)$ را با نماد $End(M_R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۰.۱. زیرمدول N از M را کاملاً پایا [۵] نامیم هرگاه برای هر $f \in End(M_R)$، $f(N) \subseteq N$.

تعریف ۱۱.۱. فرض‌کنید M یک R-مدول راست باشد. زیرمدول N از M را ماکزیمال گوییم هرگاه $N \neq M$ و اگر زیرمدولی مانند K وجود داشته باشد به‌طوری‌که $N \subseteq K \subseteq M$، آن‌گاه $K = M$ یا $K = N$.

تعریف ۱۲.۱. فرض‌کنید M یک R-مدول راست باشد. زیرمدول N از M را مینیمال گوییم هرگاه $N \neq 0$ و اگر زیرمدولی مانند K وجود داشته باشد به‌طوری‌که $0 \leq K \leq N$، آن‌گاه $K = N$ یا $K = 0$.

تعریف ۱۳.۱. R-مدول راست ناصفر M را ساده گوییم هرگاه M زیرمدولی به جز M و (0) نداشته باشد.

---

[۴] proper

[۵] fully invariant

تعریف ۱.۱۴. حلقه‌ی R ابتدایی راست (چپ) [۶] نامیده می‌شود هرگاه یک R-مدول راست (چپ) ساده و وفادار داشته باشد.

گزاره ۱.۲. هر حلقه‌ی ساده، ابتدایی چپ (راست) است.

اثبات. فرض‌کنید R یک حلقه‌ی ساده باشد. چون حلقه‌ی R یکدار است، دارای ایدآل چپ ماکزیمالی مانند m است. دراین‌صورت R/m یک R-مدول چپ ساده است. توجه داریم که حلقه‌ی R ساده است بنابراین $ann_R(R/m) = ۰$ یا $ann_R(R/m) = R$. اگر

$$ann_R(R/m) = R \Longrightarrow R \cdot (R/m) = ۰ \Longrightarrow R(۱ + m) = ۰ \Longrightarrow ۱(۱ + m) = ۰ \Longrightarrow$$
$$۱ + m = m \Longrightarrow ۱ \in m$$

که با ماکزیمال بودن m در تناقض است. بنابراین $ann_R(R/m) = ۰$ و حکم برقرار است.

تعریف ۱.۱۵. ایدآل I از حلقه‌ی R را ابتدایی راست (چپ) می‌نامیم هرگاه حلقه‌ی خارج قسمتی R/I ابتدایی راست (چپ) باشد.

تعریف ۱.۱۶. فرض‌کنید R یک حلقه و M یک R-مدول باشد. زیرمدول K از M را اساسی [۷] (در M) گوییم هرگاه برای هر زیرمدول L از M رابطه‌ی $K \cap L = ۰$ نتیجه بدهد $L = ۰$. دراین صورت آن را با نماد $K \leq_e M$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۱۷. فرض‌کنید R یک حلقه و M یک R-مدول باشد. زیرمدول K از M را کوچک [۸] (در M) گوییم هرگاه برای هر زیرمدول L از M رابطه‌ی $M = K + L$ نتیجه بدهد $L = M$. دراین صورت آن را با نماد $K \ll M$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۱۸. مونومورفیسم $f : K \longrightarrow M$ را اساسی گوییم هرگاه $Imf \leq_e M$.

تعریف ۱.۱۹. اپی‌مورفیسم $g : M \longrightarrow K$ را کوچک گوییم هرگاه $Kerg \ll M$.

---

[۶] right primitive

[۷] essential

[۸] small

تعریف ۲۰.۱. R-مدول راست M را جمع شدنی [۹] گوییم اگر برای هر زیرمدول ناصفر N از M داشته باشیم $Hom_R(M,N) \neq 0$.

تعریف ۲۱.۱. R-مدول راست ناصفر M را "تحت حلقه‌ی درون‌ریختی‌هایش اول" [۱۰] گوییم هرگاه هر زیرمدول ناصفر کاملاً پایایی از M_R، روی حلقه درون‌ریختی‌های M_R وفادار باشد.

تعریف ۲۲.۱. فرض‌کنید R یک حلقه باشد. R-مدول راست M را نیم‌ساده می‌نامیم هرگاه M جمع مستقیمی از زیرمدول‌های ساده‌اش باشد. اگر این زیرمدول‌ها با هم یک‌ریخت باشند، آن‌گاه M را نیم‌ساده همگن [۱۱] می‌نامیم.

تعریف ۲۳.۱. فرض‌کنیم M یک R-مدول راست و T یک مجموعه از زیرمدول‌های M باشد. می گوییم M در شرط ACC [۱۲] روی T صدق می‌کند هرگاه هر زنجیر صعودی از اعضای T متوقف شود.

تعریف ۲۴.۱. فرض‌کنید R یک حلقه و M یک R-مدول راست ناصفر باشد. M را یکنواخت [۱۳] گوییم هرگاه هر زیرمدول ناصفر از M، یک زیرمدول اساسی در M باشد. به عبارت معادل هر دو زیرمدول ناصفر از M، دارای اشتراک ناصفر باشند.

تعریف ۲۵.۱. فرض‌کنید R یک حلقه باشد. مجموعه‌ی
$Cen_R(R) = \{r \in R \quad | \quad rx = xr \quad \forall x \in R\}$ را مرکز حلقه‌ی R گوییم. به سادگی دیده می شود که $Cen_R(R)$ یک زیرحلقه‌ی تعویض‌پذیر از R است.

تذکر ۱.۱. حلقه‌ی R تعویض‌پذیر است اگر و تنها اگر $R = Cen_R(R)$.

---

[۹] retractable

[۱۰] endoprime

[۱۱] homogeneous semisimple

[۱۲] ascending chain condition

[۱۳] uniform

تعریف ۲۶.۱. فرض کنید R یک حلقه و $A \subseteq R$ باشد. مجموعه‌ی $Cen_R(A) = \{x \in R \quad | \quad ax = xa \quad \forall a \in A\}$ را R-مرکزساز [۱۴] A گوییم.

گزاره ۳.۱. فرض کنید R یک حلقه و $A \subseteq R$ باشد. اگر $x \in Cen_R(A)$ در R معکوس‌پذیر باشد، آن‌گاه آن معکوس در $Cen_R(A)$ قرار دارد.

اثبات. فرض کنید $y \in R$ معکوس x باشد. درنتیجه $xy = yx = ۱$. فرض کنید $a \in A$. نشان می دهیم $ya = ay$. چون $x \in cen_R(A)$، $xa = ax$. اکنون داریم:

$$xa = ax \Longrightarrow yxa = yax \Longrightarrow a = yax \Longrightarrow ay = yaxy \Longrightarrow ay = ya.$$

گزاره ۴.۱. مرکز هر حلقه‌ی ساده، میدان است.

اثبات. فرض کنید R یک حلقه‌ی ساده باشد. نشان می‌دهیم $Cen_R(R)$ میدان است. واضح است $Cen_R(R)$ تعویض‌پذیر است. فرض کنید $۰ \neq x \in Cen_R(R)$. نشان می‌دهیم x معکوس‌پذیر است. به آسانی دیده می‌شود $Rx = \{rx \quad | \quad r \in R\}$ یک ایدآل دوطرفه در R است. توجه داریم که R یک حلقه‌ی ساده است بنابراین $Rx = ۰$ یا $Rx = R$. اگر $Rx = ۰$، آن‌گاه برای هر $r \in R$، $rx = ۰$. ولی می‌دانیم $x \neq ۰$ درنتیجه $Rx \neq ۰$. پس $Rx = R$. حال چون $۱ \in R$، عضو ناصفر $y \in R$ وجود دارد به‌طوری‌که $yx = ۱ = xy$. درنتیجه بنا به گزاره قبل $y \in Cen_R(R)$. بنابراین $Cen_R(R)$ میدان است.

تعریف ۲۷.۱. فرض کنید R یک حلقه و M یک R-مدول راست باشد. می‌گوییم M دارای بعد یکنواخت [۱۵] n است (و می‌نویسیم $u.dimM = n$) هرگاه زیرمدول اساسی $V \leq_e M$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که V جمع مستقیم n زیرمدول یکنواخت باشد. اگر عدد صحیح n با این شرط موجود نباشد می‌نویسیم $u.dimM = \infty$.

---

[۱۴] centralizer

[۱۵] uniform dimension

تعریف ۲۸.۱. حلقه‌ی R را گُلدی راست [۱۶] گوییم هرگاه $u.dimR < \infty$ و R در شرط ACC روی پوچ‌سازهای راست صدق کند. (حلقه‌ی گُلدی چپ به‌طور مشابه تعریف می‌شود.)

تعریف ۲۹.۱. فرض‌کنید $\mathscr{C}$ کلاسی از مجموعه‌ها باشد. برای هر $A, B \in \mathscr{C}$ یک مجموعه در نظر می‌گیریم که آن را با نماد $mor_{\mathsf{C}}(A, B)$ نشان می‌دهیم. اعضای این مجموعه را به صورت $f : A \longrightarrow B$ در نظر می‌گیریم. A را دامنه و B را هم‌دامنه می‌نامیم. هم‌چنین برای هر سه تایی $A, B, C \in \mathscr{C}$ یک تابع $\circ : mor_{\mathsf{C}}(B, C) \times mor_{\mathsf{C}}(A, B) \longrightarrow mor_{\mathsf{C}}(A, C)$ وجود دارد. در واقع هر زوج مانند $f : A \longrightarrow B$ و $g : B \longrightarrow C$ را به $\circ(g, f)$ می‌برد که آن را با نماد $gf : A \longrightarrow C$ نشان می‌دهیم. حال دستگاه [۱۷] سه تایی $\mathsf{C} = (\mathscr{C}, mor_{\mathsf{C}}, \circ)$ شامل کلاس $\mathscr{C}$، نگاشت $mor_{\mathsf{C}} : (A, B) \longmapsto mor_{\mathsf{C}}(A, B)$ و تابع (رابطه) $\circ$ را یک رسته [۱۸] می‌نامیم درصورتی‌که در شرایط زیر صدق کند.

(۱) برای هر $f : A \longrightarrow B$ و $g : B \longrightarrow C$ و $h : C \longrightarrow D$ رابطه‌ی $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ برقرار باشد.

(۲) برای هر $A \in \mathscr{C}$، $1_A \in mor_{\mathsf{C}}(A, A)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که اگر $f : A \longrightarrow B$ و $g : C \longrightarrow A$ باشد، آن‌گاه $f \circ 1_A = f$ و $1_A \circ g = g$.

اگر $\mathsf{C} = (\mathscr{C}, mor_{\mathsf{C}}, \circ)$ یک رسته باشد، آن‌گاه اعضای کلاس $\mathscr{C}$ را اشیای این رسته و اعضایی مانند $f : A \longrightarrow B$ را مورفیسم‌های این رسته می‌نامیم. هم‌چنین نگاشت $\circ$ را ترکیب مورفیسم‌ها و $1_A (A \in \mathscr{C})$ را همانی‌های این رسته گوییم.

تعریف ۳۰.۱. مورفیسم $f : A \longrightarrow B$ را یک‌ریختی گوییم هرگاه مورفیسمی مانند $f^{-1} : B \longrightarrow A$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $f \circ f^{-1} = 1_B$ و $f^{-1} \circ f = 1_A$.

تعریف ۳۱.۱. رسته‌ی $\mathsf{D} = (\mathscr{D}, mor_{\mathsf{D}}, \circ)$ را زیررسته‌ی $\mathsf{C} = (\mathscr{C}, mor_{\mathsf{C}}, \circ)$ گوییم هرگاه $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{C}$ و برای هر $A, B \in \mathscr{D}$، $mor_{\mathsf{D}}(A, B) \subseteq mor_{\mathsf{C}}(A, B)$ و تابع ترکیب $\circ$ در D همان تحدید $\circ$ در

[۱۶] right Goldie

[۱۷] system

[۱۸] category

C باشد. هم‌چنین اگر برای هر $A, B \in \mathscr{D}$، $mor_{\mathsf{D}}(A, B) = mor_{\mathsf{C}}(A, B)$، آن‌گاه D را زیررسته‌ی کامل [۱۹] C گوییم.

تعریف ۱.۳۲. (فانکتور) فرض‌کنید $\mathsf{C} = (\mathscr{C}, mor_{\mathsf{C}}, \circ)$ و $\mathsf{D} = (\mathscr{D}, mor_{\mathsf{D}}, \circ)$ دو رسته باشند. زوج توابع $F = (F', F'')$ را یک فانکتور هم‌ورد [۲۰] از C به D گوییم در صورتی‌که F' تابعی از $\mathscr{C}$ به $\mathscr{D}$ باشد و F'' یک تابع از مورفیسم‌های C به مورفیسم‌های D باشد به‌طوری‌که به ازای هر $A, B, C \in \mathscr{C}$ و هر $f : A \longrightarrow B$ و $g : B \longrightarrow C$ در C، شرایط زیر برقرار باشد.

(۱) $F''(f) : F'(A) \longrightarrow F'(B)$ در D.

(۲) $F''(g \circ f) : F''(g) \circ F''(f)$.

(۳) $F''(1_A) = 1_{F'(A)}$.

یک فانکتور پادورد [۲۱] زوجی مانند $F = (F', F'')$ است به‌طوری‌که در دوگان شرط‌های (۱) و (۲) صدق کند. به عبارت دیگر یعنی:

(۱)* $F''(f) : F'(B) \longrightarrow F'(A)$ در D.

(۲)* $F''(g \circ f) = F''(f) \circ F''(g)$.

(۳) $F''(1_A) = 1_{F'(A)}$.

تعریف ۱.۳۳. تبدیل طبیعی [۲۲] بین فانکتورها: فرض‌کنید C و D دو رسته باشند و F و G دو فانکتور از C به D (هر دو هم‌ورد) و $\eta = (\eta_A)_{A \in \mathscr{C}}$ یک مجموعه اندیس‌دار از مورفیسم‌های در D باشد به طوری‌که برای هر $A \in \mathscr{C}$، $\eta_A \in mor_{\mathsf{D}}\big(F(A), G(A)\big)$. دراین‌صورت η یک تبدیل طبیعی از F به G نامیده می‌شود هرگاه برای هر زوج $A, B \in \mathscr{C}$ و هر $f \in mor_{\mathsf{C}}(A, B)$ نمودار زیر

full subcategory[۱۹]

covariant functor[۲۰]

contravariant functor[۲۱]

natural transformation[۲۲]

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_A"'] & F(B) \arrow[d, "\eta_B"] \\ G(A) \arrow[r, "G(f)"'] & G(B) \end{tikzcd}$$

تعویض‌پذیر باشد؛ یعنی $G(f)\circ\eta_A = \eta_B\circ F(f)$. هم‌چنین اگر هر η_A یک‌ریختی باشد، آن‌گاه η را یک‌ریختی طبیعی [۲۳] گوییم.

تعریف ۳۴.۱. فرض کنید C و D دو رسته‌ی دلخواه باشند. آن‌گاه فانکتور هم‌ورد $F : \mathsf{C} \longrightarrow \mathsf{D}$ هم ارزی رسته‌ای است اگر فانکتور $G : \mathsf{D} \longrightarrow \mathsf{C}$ و یک‌ریختی‌های طبیعی $FG \cong 1_{\mathsf{D}}$ و $GF \cong 1_{\mathsf{C}}$ وجود داشته باشند. به این معنی‌که برای هر $M, M' \in \mathsf{D}$ و هر $f \in mor_{\mathsf{D}}(M, M')$، یک‌ریختی های طبیعی $\eta_M : FG(M) \longrightarrow M$ و $\eta_{M'} : FG(M') \longrightarrow M'$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که نمودار زیر

$$\begin{tikzcd} FG(M) \arrow[r, "FG(f)"] \arrow[d, "\eta_M"'] & FG(M') \arrow[d, "\eta_{M'}"] \\ M \arrow[r, "f"'] & M' \end{tikzcd}$$

تعویض‌پذیر باشد؛ یعنی $f\circ\eta_M = \eta_{M'}\circ FG(f)$. البته بحثی مشابه این برای $GF \cong 1_{\mathsf{C}}$ وجود دارد. فانکتور G با این ویژگی را هم‌ارزی وارونه F گوییم. دو رسته‌ی C و D هم‌ارز هستند اگر یک هم‌ارزی رسته‌ای از یکی به دیگری وجود داشته باشد و آن را با نماد $\mathsf{C} \cong \mathsf{D}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳۵.۱. دو حلقه‌ی R و S را هم‌ارز (هم‌ارز موریتا) [۲۴] گوییم هرگاه رسته‌ی R-مدول‌های چپ (راست) با رسته‌ی S-مدول‌های چپ (راست) هم‌ارز باشند.

تعریف ۳۶.۱. فرض کنید M و N دو R-مدول باشند. هرگاه $f : M \longrightarrow N$ و $f' : N \longrightarrow M$ دو R-هم‌ریختی باشند به‌طوری‌که $ff' = 1_N$، آن‌گاه f را اپی‌مورفیسم شکافته [۲۵] و f' را مونومورفیسم

---

natural isomorphism[۲۳]

Morita equivalence[۲۴]

split[۲۵]

شکافته گوییم.

گزاره ۱.۵. شرایط زیر برای دنباله‌ی دقیق کوتاه[۲۶] $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \longrightarrow 0$ در رسته ی R-مدول‌های راست معادل هستند.

(a) دنباله‌ی فوق شکافته است.

(b) مونومورفیسم f شکافته است.

(c) اپی‌مورفیسم g شکافته است.

(d) $Ker g = Im f$ یک جمعوند مستقیم M است.

(e) هر R-هم‌ریختی مانند $h : M_1 \longrightarrow N$ از f می‌گذرد.

(f) هر R-هم‌ریختی مانند $h : N \longrightarrow M_2$ از g می‌گذرد.

اثبات. مرجع [۳]، قضیه ۵.۲ را ببینید.

تعریف ۱.۳۷. R-مدول راست P را پروژکتیو (تصویری) گوییم هرگاه برای هر اپی‌مورفیسم R-مدولی $f : A \longrightarrow B$ و هر R-هم‌ریختی $g : P \longrightarrow B$، R-هم‌ریختی‌ای مانند $h : P \longrightarrow A$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $fh = g$.

گزاره ۱.۶. شرایط زیر بر روی R-مدول P معادل هستند.

(۱) P یک R-مدول پروژکتیو است.

(۲) هر دنباله‌ی دقیق کوتاه مانند $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ شکافتنی است و از این رو $B \simeq A \oplus P$.

(۳) P جمعوند یک R-مدول آزاد است یعنی R-مدول آزادی مانند F و R-مدولی مانند K وجود دارند به‌طوری‌که $F \simeq K \oplus P$.

اثبات. مرجع [۹]، نتیجه ۲.۶ را ببینید.

---

[۲۶] exact

تعریف ۳۸.۱. R-مدول راست M را شبه‌پروژکتیو [۲۷] گوییم هرگاه برای هر اپی‌مورفیسم R-مدولی $f : M \longrightarrow N$ و هر R-هم‌ریختی $h : M \longrightarrow N$، درون‌ریختی R-مدولی $g : M \longrightarrow M$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $fg = h$.

تعریف ۳۹.۱. R-مدول راست E را انژکتیو گوییم هرگاه برای هر مونومورفیسم R-مدولی $f : A \longrightarrow B$ و هر R-هم‌ریختی $g : A \longrightarrow E$، R-هم‌ریختی‌ای مانند $h : B \longrightarrow E$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $hf = g$.

لم ۱.۱. (لم زُرن [۲۸]) فرض‌کنید A یک مجموعه‌ی ناتهی مرتب جزئی باشد. اگر هر زنجیر در A دارای کران بالایی در A باشد، آن‌گاه A دارای عنصر ماکزیمال است.

قضیه ۱.۱. (قضیه بئر) فرض‌کنید R یک حلقه باشد. R-مدول J انژکتیو است اگر و تنها اگر به ازای هر ایدآل چپ L از R، هر R-هم‌ریختی $f : L \longrightarrow J$ از R-مدول‌ها را بتوان به یک R-هم ریختی R-مدولی از R به J توسیع داد.

اثبات. ($\Leftarrow$) منظور از توسیع R-هم‌ریختی $f : L \longrightarrow J$ یعنی یک R-هم‌ریختی مانند $h : R \longrightarrow J$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که نمودار زیر

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[dl, "h"] \\ & J & \end{tikzcd}$$

تعویض‌پذیر باشد. واضح است اگر J انژکتیو باشد، h همواره وجود دارد.

($\Rightarrow$) فرض‌کنید J دارای خاصیت توسیع باشد و نمودار زیر را داشته باشیم

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \\ & J & \end{tikzcd}$$

---

[۲۷] quasi projective

[۲۸] Zorn's lemma