دانشگاه شهید چمران اهواز

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

گروه ریاضی

رشته:
ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان:

توسیع‌های حلقه‌های تعویض‌پذیر

استادان راهنما:

دکتر امیدعلی شهنی کرم‌زاده و دکتر البرز آذرنگ

نگارنده:

مصطفی راه‌نورد

مهرماه ۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: راه‌نورد　　　　نام: مصطفی

عنوان: توسیع‌های حلقه‌های تعویض‌پذیر

استادان راهنما: دکتر امیدعلی شهنی کرم‌زاده و دکتر البرز آذرنگ

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد　　رشته: ریاضی محض　　گرایش: جبر

دانشگاه: شهید چمران اهواز　　دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر
تاریخ فارغ‌التحصیلی: مهرماه ۱۳۹۲　　تعداد صفحات: ۱۰۷

واژگان کلیدی: فضای ایدال‌های اول مینیمال، شرط پوچساز، توسیع‌های صلب، r- توسیع‌ها، r^*- توسیع‌ها

چکیده: در سرتاسر این پایان‌نامه تمامی حلقه‌های مورد بحث، تعویض‌پذیر، یکدار و کاهش‌یافته هستند. پس از مقدمات، به معرفی انواع مهمی از توسیع‌های یک حلقه، از جمله توسیع‌های صلب و r- توسیع‌ها خواهیم پرداخت. سپس برای حلقه R، توسیعی به‌نام حلقه کامل کسرها که آن را با نماد $Q(R)$ نشان می‌دهیم و دو زیرحلقه مهم از آن، به‌نام‌های پوش اپی‌مورفیک و پوش بئر، معرفی شده و مورد مطالعه قرار خواهند گرفت. پوش اپی‌مورفیک R را با نماد $E(R)$ و پوش بئر R را با نماد $B(R)$، نشان می‌دهیم. هدف نهایی ما در این مطالعه، تعیین شرایطی است که تحت آن، توسیع‌های $R \hookrightarrow Q(R)$، $R \hookrightarrow B(R)$ و $R \hookrightarrow E(R)$، صلب یا شبه صلب هستند. این شرایط صرفا جبری نیستند؛ بلکه با بهره‌گیری از مفاهیم توپولوژی هسته-غلافی و توپولوژی معکوس روی مجموعه ایدال‌های اول مینیمال، به‌دست می‌آیند. به عنوان مثال، توسیع‌های $R \hookrightarrow Q(R)$ و $R \hookrightarrow B(R)$، صلب هستند، اگر و تنها اگر فضای ایدال‌های اول مینیمال R، فشرده و شدیدا ناهمبند باشد و علاوه براین، R در شرط پوچساز صدق کند. از دیگر نتایج مهم که می‌توان به آن اشاره نمود، این است که توسیع $R \hookrightarrow E(R)$ شبه صلب است، اگر و تنها اگر فضای ایدال‌های اول مینیمال R، فشرده باشد.

با عشق

تقدیم به

همسرم

او که در نهایت مهربانی، در مسیر طلب دانش
همسفر من است

به نام علیمی که شعله علم را در فانوس سینه‌ی انسان افروخت

آغاز کلام را آراسته می کنم با سپاس گزاری از مهربان خدایی که سرشاری هزار دریا، قطره‌ای از مهر اوست و شانه‌های نحیف شعورم توان سپاسی در خور او را ندارد.

از سال‌های دور دبستان که چشم‌های معلم سرآغاز جدید زندگیم شد، تا همین لحظه‌ی گذرا که سرشار از لذت ادراک و علاقه ام، دریافتم که دور روزگار هر کاری بکند نمی تواند اسامی را که زندگی با خط شکسته نستعلیق بر لوح دلمان کشیده پاک کند. بزرگوارانی که عمر خویش را ثانیه ثانیه دادند تا از آسمان بارانی معرفت جرعه جرعه بستانند و به من بنوشانند تا برای هر چرایی، چراغی داشته باشم. به برکت آنان که گزیده‌ای از گنج‌های زمینند و من در کنارشان دستانم را پر از مروارید دانش می بینم، اندیشمندانی که برای عطر هوش و حضور عالمانشان احترامی عمیق قائلم و وظیفه فطری من است، نه فقط در مقام لفظ بلکه با تمام وجود با سرانگشت ساده‌ی دل صبوری کنم تا کلمات لباس‌های قشنگ تری بپوشند اما، تمام ثروت قلم بیش از سی و دو حرف الفبا نیست و من شرمنده با دست ارادتی بر سینه، سپاسی ساده دارم اما سرشار و صمیمی که تقدیمتان می کنم.

با سپاس فراوان از استاد گرامی جناب آقای دکتر آذرنگ که بسیار خشنودم طفل تازه پای دانشم ردپای گام‌های بلند و استوارشان را تا بهار آگاهی جستجو می کند.

با امتنان فراوان از اساتید محترم آقای دکتر رضایی و خانم دکتر شیرعلی که در سایه نگاه عمیق و دقیق‌شان آموختم حدود جغرافیای دانش بشری چشم‌هاییست که خوب می بینند.

از همسر مهربانم صمیمانه سپاس گزارم که در تمام لحظات زندگی و به ویژه در عرصه طلب دانش، با محبت بی دریغش، مرا همراهی نموده است.

از دوستان گرامیم آقایان سیاوش شریفی، سید محسن موسوی محمدی و مهدی فرخی نیا سپاس گزارم که صادقانه اقرار می کنم از آسمان حضورشان جز مهربانی بر من نبارید.

هر چند برای هر یک بار برخاستن هزار بار افتاده ام، امیدوارم چون کبوتری که دانه اش را در زمین می خورد و امتحانش را در آسمان پس می دهد، من هم لایق آن باشم که در خور شاگردی شما بلند پروازانه بیندیشم و در این زندگی بی مجال شما باشید و چتر تعلیمتان، من باشم و دعای شما.

مصطفی راه نورد

۱۳۹۲

فهرست مطالب

مقدمه

به‌نام خداوند جان و خرد

در این پایان‌نامه، تمامی حلقه‌های مورد مطالعه، تعویض‌پذیر، یکدار و کاهش‌یافته هستند. برای مشاهده تعریف حلقه کامل کسرهای R، که آن را با نماد $Q(R)$ نشان می‌دهیم، می‌توان به [۱۳]، مراجعه نمود. بین R و $Q(R)$، توسیع‌های مهمی از R قرار دارند که حلقه کلاسیک کسرهای R، $q(R)$ یکی از این توسیع‌هاست. زاریسکی مجموعه ایدال‌های اول حلقه R را به یک توپولوژی که به‌نام توپولوژی زاریسکی موسوم است، تجهیز نموده است. به عبارت دیگر $Spec(R)$ را به‌عنوان یک فضای توپولوژی در اختیار داریم. با القاء این توپولوژی به مجموعه $Min(R)$، یعنی مجموعه تمام ایدال‌های اول مینیمال حلقه R، این مجموعه را به یک فضای توپولوژی تبدیل می‌کنیم. این توپولوژی، توپولوژی هسته-غلافی نام دارد. در این پایان‌نامه با بهره گیری از توپولوژی هسته-غلافی و توپولوژی دیگر به‌نام توپولوژی معکوس، به بررسی توسیع‌های مهم ذکر شده از حلقه R، می‌پردازیم. درفصل اول، مقدمات موررد نیاز از جبر و توپولوژی را شرح می‌دهیم. در بخش مقدمات جبری، ابتدا به بیان مطالبی در زمینه ایدال‌های اول مینیمال، شرایط پوچساز و خودتوان‌ها خواهیم پرداخت. در ادامه کار با تعریف ایدال‌های چگال، زمینه را برای معرفی حلقه کامل کسرها آماده می‌سازیم. در این بخش همچنین نشان خواهیم داد که حلقه کامل کسرهای یک حلقه کاهش‌یافته، حلقه‌ای منظم به معنی وان نیومان است. از مهمترین قضایایی که در بخش مقدمات جبری اثبات می‌کنیم، این است که منظم بودن یک حلقه تعویض‌پذیر، با کاهش‌یافته بودن و صفر بعدی بودن آن حلقه

معادل است. پس از مقدمات جبری، مفاهیم و گزاره‌های مورد نیاز از توپولوژی عمومی، بیان شده است. سرانجام در آخرین قسمت از مقدمات، تمامی مطالب لازم، جهت معرفی توپولوژی های هسته-غلافی و معکوس، روی مجموعه $Min(R)$، شرح داده می‌شوند.

توسیع $R \hookrightarrow S$ را یک توسیع صلب می‌نامیم، هرگاه برای هر $s \in S$، عضو $a \in R$ وجود داشته باشد که $Ann_S(s) = Ann_S(a)$. در فصل دوم به شرح کامل توسیع صلب و دو نوع مهم دیگر از توسیع‌ها با نام‌های r- توسیع و r^*- توسیع، خواهیم پرداخت و ارتباط آن‌ها را با توپولوژی‌های هسته -غلافی و معکوس روی $Min(R)$، بررسی خواهیم نمود. هرگاه برای توسیع $R \hookrightarrow S$، به ازای هر $P \in Min(S)$، نتیجه شود $P \cap R \in Min(R)$، آن‌گاه $R \hookrightarrow S$، یک m- توسیع خوانده می‌شود و نگاشت $\psi : Min(S) \to Min(R)$ با ضابطه $\psi(P) = P \cap R$ با معنی خواهد بود. در فصل دوم نشان می‌دهیم که نگاشت فوق یک همسانریختی نسبت به توپولوژی هسته-غلافی است، دقیقا هرگاه $R \hookrightarrow S$ یک r- توسیع باشد. در بخش چهارم از این فصل نشان خواهیم داد که توسیع $R \hookrightarrow R[x]$ صلب است، اگر و تنها اگر R در شرط پوچساز صدق کند.

برای مشاهده مهمترین معادل‌های فشردگی فضای $Min(R)$، می‌توان به [۹]، مراجعه کرد. به عنوان مثال، یکی از این معادل‌ها، تساوی مقابل است: $Min(R) = \{M \cap R : M \in Spec(Q(R)\}$. در فصل سوم به اثبات این قضیه اساسی و بیان نتایج مهمی از آن می‌پردازیم. در این فصل، حلقه‌های بئر و حلقه‌های منظم را به عنوان دو رده مهم از حلقه‌هایی که فضای ایدال‌های اول مینیمال آن‌ها فشرده است، مطرح خواهیم نمود.

در فصل چهارم توسیع‌های اپی‌مورفیک را مورد بررسی قرار می‌دهیم. مطالعه اپی‌مورفیسم‌ها در جبر، به‌طور جدی توسط آیزبل در یک سری از مقالات به عنوان اپی‌مورفیسم‌ها و دامنه‌ها آغاز شد. در مورد حلقه‌های تعویض‌پذیر، باید بیشترین ارزش را برای استوررقائل باشیم. وی برای یک حلقه تعویض‌پذیر، مفهومی به نام پوش اپی‌مورفیک را تعریف کرده، وجود آن را نشان داد. به‌علاوه، او ثابت کرد که پوش اپی‌مورفیک یک حلقه را به‌صورت‌های دیگر نیز می‌توان بیان کرد. براساس این

تعریف، پوش اپی‌مورفیک R عبارت است از بزرگترین توسیع اساسی اپی‌مورفیک حلقه R و آن را با نماد $E(R)$ نشان می‌دهیم. دیگر توسیع مهم از حلقه R که در این فصل معرفی می‌شود، پوش بئر R است که عبارت است از اشتراک تمام زیر حلقه‌های بئر $Q(R)$ که شامل R هستند. در این فصل معین خواهیم کرد که تحت چه ویژگی‌های توپولوژی و جبری، توسیع‌های $R \hookrightarrow Q(R)$، $R \hookrightarrow B(R)$ و $R \hookrightarrow E(R)$ صلب یا شبه صلب هستند.

تابستان ۱۳۹۲

مصطفی راه نورد

فصل ۱
تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل نخست به شرح مقدمات لازم در زمینه جبر تعویض‌پذیر می‌پردازیم. تاکید می‌کنیم که همه حلقه‌های مورد بحث، تعویض‌پذیر و یکدار هستند. برای مشاهده مفاهیم مقدماتی ایدال‌ها و ایدال‌های اول، می‌توان به [۲۲] مراجعه نمود. در آغاز مقدمات جبری، مفاهیمی چون مجموعه ایدال‌های اول مینیمال یک حلقه و حلقه‌های کاهش‌یافته را معرفی کرده، به روابط بین آن‌ها اشاره خواهیم کرد. سپس به تعریف شرط پوچساز و حلقه‌های بئر پرداخته و مطالبی را در مورد خودتوان ها بیان خواهیم نمود. در گام بعدی به معرفی توسیع‌های یک حلقه و شرح مثال‌های مهمی از آن‌ها می‌پردازیم، که از آن جمله می‌توان به حلقه کامل کسرها اشاره نمود. پس از مقدمات جبری اشاره ای به مقدمات عمومی از توپولوژی خواهیم داشت و در ادامه کار، روند تجهیز مجموعه ایدال‌های اول مینیمال حلقه R را به توپولوژی‌های هسته-غلافی و معکوس به‌طور کامل شرح داده، به خواص این فضاها و ارتباط آن‌ها باهم خواهیم پرداخت.

۱.۱ مقدمات از جبر

تعریف ۱.۱.۱. مجموعه همه ایدال‌های اول حلقه R را طیف اول R و گاهی به‌اختصار طیف R می‌نامیم و آن را با نماد $Spec(R)$ نمایش می‌دهیم. مجموعه همه ایدال‌های ماکسیمال R را با نماد $Max(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۱. ایدال اول P از حلقه R را یک ایدال اول مینیمال گوییم، هرگاه هیچ ایدال اول دیگری از R به‌طور سره در P نباشد و مجموعه تمام ایدال‌های اول مینیمال حلقه R را با نماد $Min(R)$ نمایش می‌دهیم.

ملاحظه ۳.۱.۱. *یادآوری می‌کنیم که بنابر لم زورن، هرگاه $(X, \leq)$ یک مجموعه جزئا مرتب ناتهی باشد که هر زنجیر در آن دارای کران بالا (پایین) است، آن‌گاه X دارای عضو ماکسیمال (مینیمال) است.*

گزاره ۴.۱.۱. *هرگاه R یک حلقه و $\{P_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ زنجیری از ایدال‌های اول در R باشد، آن‌گاه $\bigcap_{\alpha\in\Gamma} P_\alpha$ نیز ایدالی اول از R است.*

برهان. گیریم $ab \in \bigcap_{\alpha\in\Gamma} P_\alpha$ و $a \notin \bigcap_{\alpha\in\Gamma} P_\alpha$؛ نشان می‌دهیم که $b \in \bigcap_{\alpha\in\Gamma} P_\alpha$. از آنجا که $a \notin \bigcap_{\alpha\in\Gamma} P_\alpha$، $\alpha_{\circ} \in \Gamma$ وجود دارد که $a \notin P_{\alpha_{\circ}}$. از طرفی $\bigcap_{\alpha\in\Gamma} P_\alpha \subseteq P_{\alpha_{\circ}}$، لذا $ab \in P_{\alpha_{\circ}}$. حال با توجه به اول بودن $P_{\alpha_{\circ}}$ نتیجه می‌گیریم $b \in P_{\alpha_{\circ}}$. اکنون کافی است نشان دهیم برای هر $\alpha \in \Gamma$، $b \in P_\alpha$. از آنجا که $\{P_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ یک زنجیر است، پس $P_{\alpha_{\circ}} \subseteq P_\alpha$ یا $P_\alpha \subseteq P_{\alpha_{\circ}}$. درحالت $P_{\alpha_{\circ}} \subseteq P_\alpha$ واضح است که $b \in P_\alpha$. اما در حالت $P_\alpha \subseteq P_{\alpha_{\circ}}$، اگر $b \notin P_\alpha$، آن‌گاه $a \in P_\alpha$ و لذا $a \in P_{\alpha_{\circ}}$ که تناقض است؛ پس در هر حالت $b \in P_\alpha$. از اینجا نتیجه می‌گیریم که $b \in \bigcap_{\alpha\in\Gamma} P_\alpha$. □

گزاره ۵.۱.۱. *هر ایدال اول از حلقه R، شامل حداقل یک ایدال اول مینیمال است.*

برهان. فرض کنیم $P \in Spec(R)$ و مجموعه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\Sigma = \{Q \in Spec(R) \mid Q \subseteq P\},$$

واضح است که این مجموعه ناتهی است، زیرا $P \in \Sigma$. حال فرض کنیم $\{Q_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ زنجیری از اعضای Σ باشد؛ دراین‌صورت بنابر ۴.۱.۱، $Q_\circ = \bigcap_{\alpha\in\Gamma} Q_\alpha$، ایدالی اول از R است. علاوه براین چون برای هر $\alpha \in \Gamma$، $Q_\circ \subseteq Q_\alpha \subseteq P$، پس $Q_\circ \in \Sigma$ و یک کران پایین برای زنجیر مورد نظر است. لذا بنابر لم زورن Σ دارای عضو مینیمال است که آن را $P_\circ$ می‌نامیم. حال چنانچه $P_1 \in Spec(R)$ وجود داشته باشد که $P_1 \subsetneq P_\circ$، آن‌گاه مینیمال بودن $P_\circ$ در Σ، نقض خواهد شد. درنتیجه ایدال $P_\circ$ اول مینیمال است. □

قضیه ۶.۱.۱. *هرگاه R حلقه‌ای تعویض‌پذیر و یکدار باشد، آن‌گاه هر ایدال سره از R، درون یک ایدال ماکسیمال و لذا درون یک ایدال اول قرار دارد.*

برهان. برای مشاهده اثبات، فصل ۳ از مرجع [۲۲] را ببینید. □

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد، دراین‌صورت $a \in R$ را پوچ‌توان خوانیم، هرگاه عدد طبیعی n وجود داشته باشد که $a^n = \circ$. مجموعه عناصر پوچ‌توان حلقه R را با نماد $N(R)$ نمایش می‌دهیم و آن را رادیکال پوچ حلقه R می‌نامیم.

گزاره ۸.۱.۱. *$N(R)$ یک ایدال از حلقه R است.*

برهان. برای مشاهده اثبات، صفحه ۵ از مرجع [۱] را ببینید. □

تعریف ۹.۱.۱. حلقه R را کاهش‌یافته گوییم، هرگاه رادیکال پوچ آن صفر باشد.

گزاره ۱۰.۱.۱. *هرگاه R حلقه‌ای تعویض‌پذیر و یکدار باشد، آن‌گاه*

$$N(R) = \bigcap_{P\in Spec(R)} P = \bigcap_{P\in Min(R)} P.$$

برهان. برای مشاهده اثبات، فصل ۳ از مرجع [۲۲] راببینید. □

ملاحظه ۱.۱.۱۱. *هرگاه R یک حلقه تعویض‌پذیر و یکدار و S یک زیرمجموعه بسته ضربی از R باشد، آن‌گاه حلقه کسرهای R نسبت به S را با نماد R_S نشان می‌دهیم. توجه کنید R_S نیز حلقه‌ای تعویض‌پذیر و یکدار است. برای مشاهده تعریف دقیق حلقه کسرهای R و ویژگی‌های آن، به مراجع [۱]، [۱۰] و [۲۲] مراجعه کنید.*

گزاره ۱.۱.۱۲. *هرگاه R یک حلقه کاهش‌یافته و S یک زیرمجموعه بسته ضربی از R باشد، آن‌گاه حلقه R_S نیز کاهش‌یافته است.*

برهان. برای مشاهده اثبات، صفحه ۴۲ از مرجع [۱] را ببینید. □

ملاحظه ۱.۱.۱۳. *هرگاه P یک ایدال اول از حلقه R باشد، $R\backslash P$ یک زیرمجموعه بسته ضربی از R است و حلقه کسرهای R نسبت به این مجموعه بسته ضربی را، با نماد R_P نشان می‌دهیم.*

قضیه ۱.۱.۱۴. *فرض کنید R یک حلقه و S یک مجموعه بسته ضربی در R باشد؛ دراین‌صورت تناظر دوسویی حافظ شمول، بین $Spec(R_S)$ و مجموعه زیر برقرار است:*

$$\Sigma_S = \{P \in Spec(R) \mid P \cap S = \emptyset\}.$$

در واقع ایدال‌های اول حلقه R_S، دقیقا به فرم P_S هستند که P یک ایدال اول از حلقه R است و $P \cap S = \emptyset$.

برهان. برای مشاهده اثبات، فصل ۵ از مرجع [۲۲] را ببینید. □

نتیجه ۱.۱.۱۵. $Spec(R_P) = \{Q_P \mid Q \in Spec(R)\,,\ Q \subseteq P\}$ و $Max(R_P) = \{P_P\}$.

لم ۱.۱.۱۶. *فرض کنید R یک حلقه کاهش‌یافته باشد و نیز $P \in Spec(R)$، آن‌گاه $P \in Min(R)$، اگر و تنها اگر برای هر $x \in P$، $r \in R\backslash P$ وجود داشته باشد که $xr = 0$.*

برهان. هرگاه P اول مینیمال باشد بنابر ۱.۱.۱۵، $Spec(R_P) = \{P_P\}$. از طرفی با توجه به ۱.۱.۱۰، $N(R_P) = P_P$. حال چون بنابر فرض، R کاهش‌یافته است، با استناد به ۱.۱.۱۲، R_P نیز کاهش‌یافته است. پس بنابر تعریف، $N(R_P) = \circ$ و لذا $P_P = \circ$. اکنون فرض کنیم $x \in P$؛ لذا با استفاده از خواص حلقه R_P و ایدال‌های این حلقه، $\frac{x}{1} \in P_P$، درنتیجه $\frac{x}{1} = \frac{\circ}{1}$. حال بازهم بنابر تعریف و خواص حلقه R_P، $r \in R\backslash P$ وجود دارد که $r(x1 - \circ 1) = \circ$؛ ولذا $rx = \circ$.

برعکس، فرض کنیم برای هر $x \in P$، $r \in R\backslash P$ وجود داشته باشد که $xr = \circ$؛ لذا اگر $\frac{x}{y}$ عضو دلخواهی از ایدال P_P باشد، باتوجه به خواص حلقه کسرها می‌توان نتیجه گرفت که

$$\frac{x}{y} = \frac{xr}{yr} = \frac{\circ}{1} = \circ_{R_P};$$

درنتیجه $P_P = \circ$. اما بنابر ۱.۱.۱۵، P_P یگانه ایدال ماکسیمال R_P است؛ بنابراین R_P میدان است و درنتیجه ایدال اولی غیر از $\{\circ\}$ ندارد. لذا باتوجه به ۱.۱.۱۴، P در R اول مینیمال است. □

تعریف ۱.۱.۱۷. هرگاه X یک زیرمجموعه از حلقه R باشد، پوچساز X در R را با نماد $Ann_R(X)$ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$Ann_R(X) = \{a \in R \mid ax = \circ, \ \forall x \in X\}.$$

به‌ویژه هرگاه I یک ایدال از R باشد، پوچساز I در R را با نماد $Ann_R(I)$ نمایش می‌دهیم.

ملاحظه ۱.۱.۱۸. *هرگاه X یک زیرمجموعه از حلقه R باشد، $Ann_R(X)$ یک ایدال از R است.*

ملاحظه ۱.۱.۱۹. *هرگاه X مجموعه‌ای متناهی به‌صورت $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ باشد، برای نمایش پوچساز آن از نماد $Ann_R(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ بهره می‌گیریم.*

ملاحظه ۱.۱.۲۰. *هرگاه X یک زیرمجموعه از حلقه R باشد، ایدال تولید شده توسط X برابر است با اشتراک تمام ایدال‌های شامل X و آن را با نماد $< X >$ نمایش می‌دهیم. به‌علاوه هرگاه X مجموعه‌ای متناهی به‌صورت $\{a_1, ..., a_n\}$ باشد، برای نمایش ایدال تولید شده توسط X، یکی از دو*

نماد $< a_1, ..., a_n >$ *یا* $a_1 R + ... + a_n R$ *را به کار می‌بریم و آن را یک ایدال متناهی مولد گوییم.*
توجه کنید که هرگاه X *یک زیرمجموعه از* R *باشد، آن‌گاه :*

$$Ann_R(< X >) = Ann_R(X).$$

قضیه ۲۱.۱.۱. *هرگاه* X *یک زیرمجموعه ناتهی از حلقه* R *باشد، آن‌گاه :*

$$< X >= \{\sum_{i=1}^{n} r_i x_i | r_i \in R, x_i \in X, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

برهان. برای مشاهده اثبات، فصل ۲ از مرجع [۲۲] را ببینید. □

لم ۲۲.۱.۱. *فرض کنیم* R *یک حلقه کاهش‌یافته،* $P \in Min(R)$ *و* I *یک ایدال متناهی مولد از* R *باشد. دراین‌صورت* $I \subseteq P$*، اگر و تنها اگر* $Ann_R(I) \nsubseteq P$ *.*

برهان. فرض کنیم $I \subseteq P$؛ نشان می‌دهیم که $Ann_R(I) \nsubseteq P$. از آنجاکه I متناهی مولد است، می‌توان نوشت $I =< a_1, ..., a_n >$. لذا $a_1, ..., a_n \in P$. اما $P \in Min(R)$ و R کاهش‌یافته است؛ درنتیجه بنابر ۱۶.۱.۱، $r_1, ..., r_n \in R \backslash P$ وجود دارند که $a_1 r_1 = \cdots = a_n r_n = 0$؛ لذا $r_1 r_2 \cdots r_n a_i = 0$، که در آن $i = 1, 2, 3, ..., n$. بنابراین $r_1 \cdots r_n \in Ann_R(I)$؛ ولی $r_1 r_2 \cdots r_n \notin P$ زیرا در غیر این صورت با توجه به اول بودن P، $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ وجود خواهد داشت که $r_j \in P$، که تناقض است، پس $Ann_R(I) \nsubseteq P$.
برعکس، فرض کنیم $Ann_R(I) \nsubseteq P$؛ نشان می‌دهیم که $I \subseteq P$. بنابر تعریف، $I Ann_R(I) = 0$؛ درنتیجه $I Ann_R(I) \subseteq P$. حال با توجه به اینکه P اول است، $I \subseteq P$. □

تعریف ۲۳.۱.۱. عنصر e از حلقه R را خودتوان گوییم هرگاه $e^2 = e$.

گزاره ۲۴.۱.۱. *هرگاه* R *یک حلقه و* $e \in R$*، آن‌گاه:*

۱) e *خودتوان است، اگر و تنها اگر* $1 - e$ *خودتوان باشد.*

۲) *حاصلضرب دو خودتوان، خودتوان است.*

برهان. به‌راحتی و با استفاده از تعریف می‌توان به نتیجه رسید. $\square$

گزاره ۲۵.۱.۱. *هرگاه e یک خودتوان از حلقه R باشد، آن‌گاه* $Ann_R(e) =< 1 - e >$.

برهان. هرگاه $r \in Ann_R(e)$، بنابر تعریف، $re = 0$، لذا: $r = r - re = r(1 - e)$؛ در نتیجه، $r \in< 1 - e >$.

برعکس، هرگاه $r \in< 1 - e >$، عضو $s \in R$ وجود دارد که $r = s(1 - e)$؛ لذا $r = s - se$، از اینجا نتیجه می‌گیریم:

$$re = se - se^2 = se - se = 0,$$

پس بنابر تعریف $r \in Ann_R(e)$. $\square$

گزاره ۲۶.۱.۱. *هرگاه x و y دو خودتوان از حلقه R باشند، آن‌گاه* $< x > \cap < y >=< xy >$.

برهان. بنابر ۲۱.۱.۱، $< xy >\subseteq< x >$ و $< xy >\subseteq< y >$. لذا $< xy >\subseteq< x > \cap < y >$.

برعکس اگر $r \in< x > \cap < y >$، آن‌گاه $r_1, r_2 \in R$ وجود دارند که $r = r_1x$ و $r = r_2y$. لذا $r_1x = r = r_2y$ و درنتیجه، $r_1xy = r_2y^2$. اما از آنجا که y خودتوان است، پس $r_1xy = r_2y = r$؛ بنابراین مطابق ۲۱.۱.۱، $r \in< xy >$. $\square$

تعریف ۲۷.۱.۱. گوییم حلقه R در شرط پوچساز صدق می‌کند، هرگاه برای هر $a, b \in R$، عضو $c \in R$ وجود داشته باشد که $Ann_R(a, b) = Ann_R(c)$. روشن است که خاصیت ذکر شده در بالا برای دو عضو a و b را می‌توان برای هر تعداد متناهی تعمیم داد. برای یک کاردینال ثابت مانند κ، گوییم حلقه R در شرط $\kappa-$ پوچساز صادق است، هرگاه برای هر زیرمجموعه X از R با کاردینال کمتر از κ، $r_X \in R$ وجود داشته باشد که $Ann_R(X) = Ann_R(r_X)$. از این دیدگاه شرط پوچساز با شرط $\aleph_0$- پوچساز معادل است. هرگاه برای هر κ، R در شرط $\kappa-$ پوچسازصدق کند، گوییم R در شرط ابرپوچساز صادق است.

تعریف ۲۸.۱.۱. حلقه R را یک حلقه بئر خوانیم، هرگاه برای هر زیرمجموعه X از R، خودتوان $e_X \in R$، وجود داشته باشد که $Ann_R(X) =< e_X >$.

ملاحظه ۲۹.۱.۱. *هرگاه R یک حلقه بئر باشد، آن‌گاه در شرط ابرپوچساز صدق می‌کند؛ زیرا بنابر تعریف، برای هر زیرمجموعه X از حلقه R، عنصر خودتوان e وجود دارد که $Ann_R(X) =< e >$ و از طرفی بنابر ۲۵.۱.۱، $< e >= Ann_R(1-e)$. لذا $Ann_R(X) = Ann_R(1-e)$؛ پس طبق تعریف، R در شرط ابرپوچساز و به‌ویژه در شرط پوچساز صدق می‌کند.*

تعریف ۳۰.۱.۱. حلقه R را بئر ضعیف می‌نامیم، هرگاه برای هر $a \in R$، عنصر خودتوان e از R وجود داشته باشد که $Ann_R(a) = Ann_R(e)$.

نتیجه ۳۱.۱.۱. *هر حلقه بئر، یک حلقه بئر ضعیف است؛ و هر حلقه بئر ضعیف در شرط پوچساز صدق می‌کند.*

برهان. هرگاه در تعریف حلقه بئر R، قرار دهیم $X = \{a\}$، بنابر ۲۹.۱.۱، خودتوان $e \in R$ وجود دارد که $Ann_R(a) =< e >$، لذا مطابق ۲۵.۱.۱، $Ann_R(a) = Ann_R(1-e)$ و از آنجا که $1-e$ خودتوان است، پس R بئر ضعیف است.

حال نشان می‌دهیم حلقه بئر ضعیف R، در شرط پوچساز صدق می‌کند. فرض کنیم $a, b \in R$؛ بنابر تعریف، خودتوان‌های $e_1, e_2 \in R$ وجود دارند که

$$Ann_R(a) = Ann_R(e_1) \text{ و } Ann_R(b) = Ann_R(e_2),$$

حال بنابر ۲۵.۱.۱، داریم: $Ann_R(a) =< 1-e_1 >$ و $Ann_R(b) =< 1-e_2 >$. اکنون با توجه به ۲۱.۱.۱، $Ann_R(a,b) = Ann_R(a) \cap Ann_R(b)$؛ درنتیجه:

$$Ann_R(a,b) =< 1-e_1 > \cap < 1-e_2 >,$$

لذا مطابق ۲۶.۱.۱؛ نتیجه می‌گیریم که:

$$Ann_R(a,b) =< (۱ - e_۱)(۱ - e_۲) > .$$

اما از آنجا که طبق (۲) از ۲۴.۱.۱، عنصر $(۱ - e_۱)(۱ - e_۲)$ خودتوان است؛ آن را $e_۳$ می‌نامیم و نتیجه می‌گیریم که $Ann_R(a,b) =< e_۳ >= Ann_R(۱ - e_۳)$. پس در نهایت حلقه مورد نظر در شرط پوچساز صدق می‌کند. □

ملاحظه ۳۲.۱.۱. *حلقه‌های بئر ضعیف، به حلقه‌های ریکارت و نیز به $P.P$- حلقه‌ها شهرت دارند. زیرا هر ایدال اصلی از این حلقه‌ها، پروژکتیو است(به عنوان R- مدول). برای اثبات این مطلب، فرض کنیم R یک حلقه بئر ضعیف باشد و ایدال اصلی aR از این حلقه را در نظر می‌گیریم. دراین صورت دنباله*

$$۰ \longrightarrow Ann_R(a) \hookrightarrow R \longrightarrow aR \longrightarrow ۰$$

از R- مدول همریختی‌ها، یک دنباله دقیق کوتاه است. بنابر تعریف، عنصر خودتوان e از حلقه R، وجود دارد که $Ann_R(a) = eR$. لذا دنباله بالا را می‌توان به‌صورت

$$۰ \longrightarrow eR \hookrightarrow R \longrightarrow aR \longrightarrow ۰$$

نوشت. از آنجا که این دنباله شکافته می‌شود، نتیجه می‌گیریم $R \simeq aR \oplus Ann_R(a)$ و چون R، یک R- مدول آزاد است؛ پس aR جمعوند مستقیم یک R- مدول آزاد و لذا پروژکتیو است.

تعریف ۳۳.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد؛ $a \in R$ را یک مقسوم علیه صفر از R می‌نامیم، هرگاه عنصر $۰ \neq b \in R$ وجود داشته باشد که $ab = ۰$. مجموعه تمام مقسوم علیه‌های صفر حلقه R را با نماد $Z(R)$ نمایش می‌دهیم و هر عضو R را که مقسوم علیه صفر نباشد، یک نامقسوم علیه صفر می‌نامیم.

تعریف ۳۴.۱.۱. هرگاه R یک حلقه باشد، آن‌گاه حلقه کسرهای R نسبت به $R \backslash Z(R)$، حلقه کلاسیک کسرهای R نامیده می‌شود و آن را با نماد $q(R)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳۵.۱.۱. ایدال D از حلقه R را یک ایدال چگال گوییم، هرگاه $Ann_R(D) = ۰$.

گزاره ۳۶.۱.۱. *هرگاه R یک حلقه و $D_۱$ و $D_۲$ ایدال‌هایی از R باشند، دراین‌صورت ویژگی‌های زیر برقرارند:*

۱) *R چگال است.*

۲) *هرگاه $D_۱ \subset D_۲$ و $D_۱$ چگال باشد، آن‌گاه $D_۲$ نیز چگال است.*

۳) *هرگاه $D_۱$ و $D_۲$ چگال باشند، آن‌گاه $D_۱D_۲$ و $D_۱ \cap D_۲$ نیز چگالند.*

برهان. برای مشاهده اثبات، صفحه ۳۷ از مرجع [۱۳] را ببینید. □

تعریف ۳۷.۱.۱. فرض کنیم Γ خانواده همه ایدال‌های چگال حلقه R باشد؛ تعریف می‌کنیم:

$$F = \{f \mid f \in Hom_R(D, R)\ ,\ \exists D \in \Gamma\}.$$

گزاره ۳۸.۱.۱. *هرگاه $f, g \in F$، آن‌گاه:*

۱) $f + g \in F$.

۲) $fog \in F$.

برهان. فرض کنیم $f \in Hom_R(D_۱, R)$ و $g \in Hom_R(D_۲, R)$، دراین‌صورت بنابر (۳) از ۳۶.۱.۱، $D_۱ \cap D_۲$ نیز چگال است؛ بنابراین، $f + g \in Hom_R(D_۱ \cap D_۲, R)$. همچنین از آنجا که $D_۱D_۲ \subseteq g^{-۱}(D_۱)$، طبق (۲) و (۳) از ۳۶.۱.۱، $g^{-۱}(D_۱)$ نیز چگال است؛ درنتیجه، $fog \in Hom_R(g^{-۱}(D_۱), R)$. □

گزاره ۳۹.۱.۱. *R- مدول همریختی‌های $۰ : R \to R$ و $۱ : R \to R$، به ترتیب با ضابطه‌های $۰(r) = ۰$ برای هر $r \in R$ و $۱(r) = r$ برای هر $r \in R$، عضو مجموعه F هستند.*

برهان. بنابر (۱) از ۳۶.۱.۱، نتیجه برقرار است.

□

تعریف ۴۰.۱.۱. فرض کنیم f با دامنه $D_۱$ و g با دامنه $D_۲$ دو عضو دلخواه از مجموعه F باشند. تعریف می‌کنیم $f\Theta g$، اگر و تنها اگر برای هر $d \in D_۱ \cap D_۲$، $f(d) = g(d)$؛ به عبارت دیگر f و g روی اشتراک دامنه‌هایشان باهم مساوی باشند.

لم ۴۱.۱.۱. *$f\Theta g$، اگر و تنها اگر ایدال چگال D از حلقه R وجود داشته باشد که f و g روی D مساوی باشند.*

برهان. صفحه ۳۸ از مرجع [۱۳] را ببینید. □

لم ۴۲.۱.۱. *رابطه Θ در تعریف ۴۰.۱.۱، یک رابطه هم‌ارزی، روی مجموعه F است.*

برهان. صفحه ۳۸ از مرجع [۱۳] را ببینید. □

گزاره ۴۳.۱.۱. *هرگاه R یک حلقه تعویض‌پذیر و یکدار باشد، آن‌گاه $Q(R) = \{[f] \mid f \in F\}$ با اعمال جمع و ضرب زیر، یک حلقه تعویض‌پذیر و یکدار است:*

$$[f].[g] = [fog] \quad \text{و} \quad [f] + [g] = [f + g];$$

علاوه براین،

$$۰_{Q(R)} = [۰] \quad \text{و} \quad ۱_{Q(R)} = [۱]$$

که $۰ : R \to R$ و $۱ : R \to R$، به‌ترتیب همریختی‌های صفر و همانی روی R هستند.

برهان. صفحه ۳۸ از مرجع [۱۳] را ببینید. □

تعریف ۴۴.۱.۱. $Q(R)$ را حلقه کامل کسرهای R می‌نامیم.