بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه شهید مدنی آذربایجان
دانشکده علوم پایه

پایان نامه
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی کاربردی

یک روش عددی برای حل معادله بلک‌شولز با قیمت‌گذاری اختیار آمریکایی

استاد راهنما
دکتـــر مجتبی رنجبر

استاد مشاور
دکتر حسین جباری خامنه‌ای

پژوهشگر
نازی نیلوفری

زمستان ۱۳۹۱
تبریز - ایران

تقدیم به

مادر صبورم و مادربزرگ عزیزتر از جانم،

و همسر مهربانم.

پروردگارا...

پروردگارا، دعایم به درگاه تو این است:

بی نوایی و تنگ چشمی را از دلم ریشه کن ساز و از بیخ و بن بر کن؛

اندکی نیرویم بخش تا بتوانم بار شادی ها و غم ها را تحمل کنم.

نیرویی به من ارزانی فرما تا عشق خود را در خدمت و کمک، ثمربخش سازم.

توانی به من عطا فرما که هیچ گاه چیزی از بی نوایی نستانم و در برابر گستاخ و مغرور، زانوی دنائت خم نکنم. قدرتی به من بخشا تا روح خود را از تعلق به جیفه های ناچیز روزگار بی نیاز کنم و از هر چه رنگ تعلق پذیرد، آزادش سازم.

و نیرویی به من ده تا قدرت و توان خود را از روی کمال عشق و نهایت محبت تسلیم خواسته ها و رضای تو کنم.

وقتی جز خدا هیچ ندارم... همه چیز دارم و

وقتی جز خدا همه چیز دارم... هیچ ندارم.

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوندی را که به من آموخت در لحظه‌های شادی شکرگزار باشم و فراموش نکنم، تمام داشته‌ها و دانسته‌هایم از لطف بی‌منت اوست و آموخت که در لحظه‌های اندوهم صبور باشم که همه‌ی غم‌ها رفتنی است و سربلند کسی است که مطیع تقدیر و حکمت الهی باشد.

اینک به پاس لطف الهی که پایان‌نامه‌ی حاضر، آماده شده است برخود واجب می‌دانم از حمایت‌های بی‌دریغ و مساعدت‌های استاد راهنمایم جناب آقای دکتر **مجتبی رنجبر** سپاس‌گزاری نمایم.

از جناب آقای دکتر **حسین جباری** که مشاوره و مطالعه این پایان‌نامه را به عهده گرفتند، کمال تشکر را دارم. از جناب آقای دکتر **ناصر آقازاده** نیز سپاسگزارم که قبول زحمت فرموده و داوری این تحقیق را برعهده گرفتند.

بوسه می‌زنم بر دستان پرمهر مادر فداکارم و مادربزرگ عزیزم، دو فرشته‌ای که در هیچ لحظه از زندگی‌ام تنهایم نگذاشتند و من توانستم زیر سایه مهربانی و صبوری‌هایشان در راه کسب علم و دانش قدم بردارم و از همسر عزیزم، که همواره امید را به من هدیه می‌کند، به پاس دلگرمی‌های بی‌پایانش تشکر می‌کنم.

نازی نیلوفری

زمستان ۱۳۹۱

چکیده

روش‌های RBF براستی روش محاسباتی بدون شبکه هستند که به تولید شبکه منظم نیاز ندارند. در این پایان‌نامه روش شبه‌درونیابی با روش RBF، برای حل معادله بلک‌شولز جهت قیمت‌گذاری اختیار، ترکیب شده است. همان‌طور که در محاسبات عددی خواهیم دید، این روش برای قیمت‌گذاری اختیار آمریکایی، تقریب بسیار خوبی از جواب می‌دهد. بعلاوه مرز اجرای بهینه آزاد موجود در مسئله قیمت‌گذاری اختیار آمریکایی را نیز می‌توان یافت.

واژه‌های کلیدی: توابع پایه‌ای شعاعی، شبه درونیابی، اختیار معاملات آمریکایی.

فهرست مطالب

پیشگفتار

فعالان بازارهای اقتصادی و سرمایه‌گذاری به دلیل شرایط حاکم بر بازارها، نوسانات و عدم اطمینان از وضعیت آتی بازار همواره با ریسک‌هایی مواجه هستند که ممکن است آن‌ها را در معرض زیان قرار دهد. به این منظور همواره تلاش بر این بوده است که راهکارهای مناسبی برای پوشش این ریسک‌ها اتخاذ شود و به عبارتی ریسک‌های پیش روی فعالان بازار سرمایه مدیریت شوند. یکی از ابزارهایی که در راستای این هدف ایجاد شده، اوراق مشتقه است.

اوراق مشتقه در قالب چهار نوع قرارداد مشتقه اصلی شامل: قراردادهای آتی، قراردادهای سلف، قراردادهای اختیار معامله، قراردادهای معاوضه، با توجه به موقعیت و شرایط بازار مورد معامله قرار می‌گیرند.

قراردادهای مشتقه به نوعی از قراردادهای مالی اطلاق می‌شود که ارزش خود را از دارایی پایه می‌گیرند.

در این پایان‌نامه قراردادهای اختیار معامله معرفی می‌شوند و روشی عددی برای قیمت‌گذاری آن‌ها ارائه می‌شود.

در سال‌های اخیر، بازارهای آتی و اوراق اختیار معامله، در دنیای مالی و سرمایه‌گذاری، اهمیت روزافزونی پیدا کرده است.

در اوایل دهه ۱۹۷۰ آقایان «فیشر بلک»، «میرن شولز» و «رابرت مرتون»، گام بزرگی در قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله برداشتند. نتیجه‌ی کار آن‌ها ارائه مدلی بود که تحت عنوان «مدل بلک - شولز» معروف گشت.

این مدل تاثیر زیادی در نحوه قیمت‌گذاری و پوشش خطر اختیار معامله داشته است.

همچنین این مدل نقش اساسی و محوری در موفقیت مهندسی مالی در دهه‌های ۱۹۸۰ و ۱۹۹۰ داشته است.

میرن شولز و رابرت مرتون در سال ۱۹۹۷ به خاطر اهمیت مدل فوق، موفق به دریافت جایزه نوبل اقتصادی شدند.

بلک و شولز فرمول صریحی برای قیمت‌گذاری اختیارات خرید اروپایی بدون سود سهام، ارائه دادند. آن‌ها نشان دادند که قیمت اختیارات از یک معادله دیفرانسیل جزئی پیروی می‌کند که به معادله بلک‌شولز مشهور شد.

معادلات با مشتقات جزئی معادلاتی مهم می‌باشند که اغلب در مسائل فیزیکی و محاسبات مهندسی به وجود می‌آیند و حل تحلیلی اکثر این معادلات مشکل می‌باشد. بنابراین محققین به دنبال حل عددی این معادلات هستند و روش‌های عددی گوناگون برای حل این معادلات ارائه کرده‌اند.

روش بدون شبکه‌بندی برای حل مسائل مذکور یک روش جدید و کارا می‌باشد که بر پایه توابع پایه شعاعی($RBFs$) طرح‌ریزی شده و انواع مختلف این توابع را برای هدف خود مورد بررسی قرار داده است.

در این پایان‌نامه، معادله بلک‌شولز با روش شبه توابع پایه‌ای شعاعی حل می‌شود.

چارچوب کلی این پایان‌نامه به صورت زیر می‌باشد:

در فصل اول تعاریف و مقدمات لازم بیان شده است. در فصل دوم درونیابی شبه RBF توضیح داده شده است. در فصل سوم اختیار معامله و مسائل مربوط به آن‌را بررسی و معادله بلک شولز برای قیمت‌گذاری اختیار مطرح شده است و در فصل چهارم معادله بلک شولز با روش شبه RBF حل و نتایج عددی بیان شده است.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم پیش نیاز

در این فصل تعاریف و مفاهیمی ارائه می‌شوند که دانستن آن‌ها برای مطالعه فصل‌های بعدی لازم است.

۱.۱ مفاهیم و اصطلاحات مالی

تعریف ۱.۱.۱. توافق نامه‌ای مبتنی بر خرید یا فروش دارایی با قیمت مشخص را **قرارداد** گویند.

تعریف ۲.۱.۱. دارایی مورد نظر در قرارداد را **دارائی پایه** گویند، که در این پایان نامه سهام فرض شده است.

تعریف ۳.۱.۱. اختیار معامله قراردادی است بین خریدار و فروشنده، به نحوی که خریدار از فروشنده اختیار معامله، حق خرید یا فروش یک دارایی را در یک قیمت معین، خریداری می‌کند. به عبارت دیگر حق اختیار معامله به دارنده آن، این حق (نه الزام) را می‌دهد که معامله‌ای را در آینده انجام دهد. در حقیقت اختیار معاملات، ریسک کاهش قیمت دارایی پایه را بیمه می‌کند.

اختیار معاملات از نظر نوع قرارداد، به اختیار خرید و اختیار فروش تقسیم بندی می‌شوند.

تعریف ۴.۱.۱. قرارداد اختیار خرید [۱] به دارنده آن، این حق را می‌دهد تا دارایی موضوع قرارداد (مثلا سهام) را در تاریخ معینی (و یا قبل از آن) و با قیمت مشخصی خریداری نماید.

[۱] Call option

تعریف ۱.۱.۵. قرارداد اختیار فروش [۲] به دارنده آن، حق فروش دارایی موضوع قرارداد را در تاریخ معین (و یا قبل از آن) و با قیمت مشخص می‌دهد.

تعریف ۱.۱.۶. خرید اختیار معامله نیاز به یک مبلغ حق شرط دارد،که این مبلغ را **قیمت اختیار** گویند. به بیانی دیگر در اختیار معامله همانند تمام قراردادها، هر طرف امتیازی را به طرف مقابل اعطاء می‌کند، خریدار اختیار به فروشنده مبلغی تحت عنوان حق شرط پرداخت می‌کند که در واقع همان قیمت اختیار معامله می‌باشد. فروشنده نیز حق خرید یا فروش دارایی مذکور را در یک قیمت معین به خریدار اعطاء می‌نماید.

تعریف ۱.۱.۷. ارزش فعلی دارائی پایه در بازار را **قیمت جاری**[۳](S) گویند.

تعریف ۱.۱.۸. قیمت تعیین شده در قرارداد را قیمت توافقی یا **قیمت اعمال** [۴](K) گویند.

تعریف ۱.۱.۹. تاریخ ذکر شده در قرارداد را اصطلاحاً تاریخ اعمال، تاریخ انقضا، تاریخ توافقی، یا **سررسید**[۵](τ) گویند.

تعریف ۱.۱.۱۰. عایدی یا بازده[۶] یک اختیار معامله خرید در سررسید بصورت

$$\max(S_\tau - K, \circ)$$

و برای اختیار معامله فروش بصورت

$$\max(K - S_\tau, \circ)$$

می‌باشد.

اختیار معاملات از نظر نحوه‌ی اعمال، آمریکایی و اروپایی می‌باشند. تفاوت این دو نوع اختیار معامله ربطی به منطقه جغرافیایی ندارد.

[۲] Put option

[۳] Stock price

[۴] Strike price

[۵] The time of maturity

[۶] Payoff

تعریف ۱.۱.۱۱. اختیار معامله **آمریکایی**[۷] در هر زمان از طول دوره عمر قرارداد تا سررسید و یا در تاریخ سررسید قابل اعمال است، یعنی لازم نیست سرمایه گذار تا مدت زمان سررسید اختیار معامله صبر کند.

تعریف ۱.۱.۱۲. اختیار معامله **اروپایی**[۸] تنها در تاریخ سر رسید آن قابل اعمال است.

تذکر ۱.۱.۱۳. بیشتر اختیار معامله‌هایی که در بازارهای بورس مبادله می‌شوند، از نوع آمریکایی هستند، ولی تجزیه و تحلیل اختیار معامله‌های اروپایی عموماً آسانتر از اختیار معامله‌های نوع آمریکایی است و برخی خواص و فرمول‌های اختیار معامله‌های آمریکایی از اختیار معامله‌های اروپایی نظیر آن‌ها استنتاج می‌گردد.

تعریف ۱.۱.۱۴. در هر قرارداد اختیار معامله، دو طرف **معامله‌گر** وجود دارد:
یک طرف معامله‌کننده، سرمایه‌گذاری است که موقعیت خرید اتخاذ کرده است و اختیار معامله را خریده است و در طرف دوم قرارداد، سرمایه‌گذار موقعیت فروش اتخاذ کرده است، یعنی اختیار معامله را صادر کرده یا فروخته است.

نکته ۱.۱.۱۵. خریدار یا دارنده اختیار معامله، هیچ‌گونه تعهدی در قبال قرارداد ندارد، در حالی‌که فروش یا صدور اختیار معامله برای فروشنده تعهدآور است. بدین معنی که فروشنده، مبلغ قیمت اختیار را دریافت می کند و در مقابل متعهد می شود که در صورت اعمال اختیار معامله توسط خریدار، به مفاد قرارداد عمل کند.

تعریف ۱.۱.۱۶. به طور کلی چهار موقعیت برای یك اختیار معامله وجود دارد:

۱. موقعیت خرید در قرارداد اختیار خرید

۲. موقعیت فروش در قرارداد اختیار خرید

۳. موقعیت خرید در قرارداد اختیار فروش

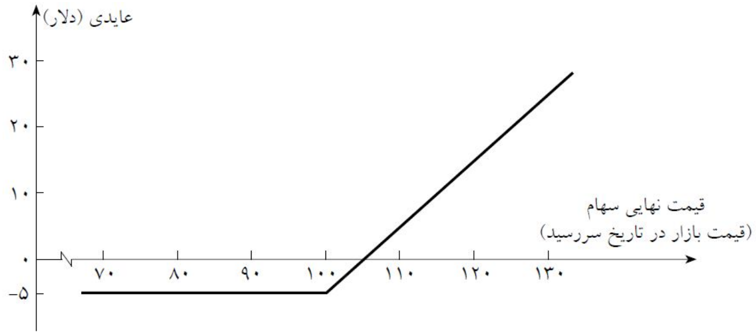
۴. موقعیت فروش در قرارداد اختیار فروش

برای درک بهتر مفهوم اختیار معامله، مثال‌هایی را آورده‌ایم.

---

[۷] American option

[۸] European option



شکل ۱.۱: سود و زیان خرید اختیار خرید اروپایی با قیمت اختیار = ۵ و قیمت اعمال = ۱۰۰

قرارداد اختیار خرید

مثال ۱۷.۱.۱. موقعیت سرمایه‌گذاری را در نظر بگیرید که یك اختیار خرید اروپایی با قیمت اعمال ۱۰۰ دلار برای خرید ۱۰۰ سهم مایکروسافت را در اختیار دارد .

فرض کنید قیمت سهم در حال حاضر ۹۸ دلار و عمر اختیار معامله چهار ماهه و قیمت اختیار معامله، بابت خرید یك سهم ۵ دلار می‌باشد.

با این اطلاعات، مبلغ سرمایه‌گذاری اولیه ۵۰۰ دلار است. از آنجایی‌که اختیار معامله مذکور از نوع اروپایی می‌باشد لذا فقط در سررسید آن قابل اعمال است.

اگر در طول عمر اختیار معامله (چهار ماه) قیمت سهام به کمتر از ۱۰۰ دلار کاهش یابد، به نفع خریدار است که اختیار خرید را به اجرا نگذارد (دلیلی وجود ندارد سهامی را که می‌توان با قیمت کمتر از ۱۰۰ دلار در بازار خریداری نمود با استفاده از حق اختیار معامله، به ۱۰۰ دلار بخریم.) بنابراین در این حالت، سرمایه‌گذار مبلغ ۵۰۰ دلار سرمایه اولیه را از دست می‌دهد.

اگر قیمت سهام در تاریخ سررسید، به بالاتر از ۱۰۰ دلار افزایش یابد، به نفع خریدار است که اختیار خرید را به اجرا بگذارد. به عنوان مثال فرض کنید که قیمت سهام به ۱۱۵ دلار افزایش یابد. با اعمال اختیار خرید، سرمایه‌گذار می‌تواند صد سهم را به قیمت هر سهم ۱۰۰ دلار بخرد. اگر سرمایه‌گذار فوق، بلافاصله سهام خریداری شده با استفاده از حق اختیار معامله را در بازار بفروشد، به ازای هرسهم، ۱۵ دلار و در مجموع ۱۵۰۰ دلار با صرف نظر از هزینه معاملات، درآمد نصیب سرمایه‌گذار می‌شود. برای محاسبه سود خالص، باید قیمت خرید اختیار معامله (هزینه اولیه) را از درآمد حاصله کسر نماییم که در اینصورت، سود خالص سرمایه‌گذار معادل ۱،۰۰۰ دلار می‌شود. نمودار شکل ۱.۱ ، خالص سود یا زیان دارنده‌ی اختیار خرید سهام را با تغییرات قیمت سهام در زمان سررسید اختیار معامله، برای این مثال نشان می‌دهد.

نکته ۱.۱.۱۸. گاهی اوقات، سرمایه‌گذار با وجود اینکه در مجموع متحمل زیان می‌شود ولی اختیار معامله را اجرا می‌کند.

مثال ۱.۱.۱۹. فرض کنید که در همان مثال بالا، قیمت هر سهم در پایان مدت زمان اختیار معامله به ۱۰۲ دلار برسد. سرمایه‌گذار با اجرای اختیار معامله، درآمدی معادل ۲۰۰ دلار نصیب خود می‌سازد (دلار ۲۰۰ = ۱۰۰ ×(۱۰۰ − ۱۰۲)). برای محاسبه سود یا زیان خالص، هزینه خرید اختیار معامله را از درآمد فوق کسر می‌کنیم. در این صورت سرمایه‌گذار متحمل زیان خالصی معادل ۳۰۰ دلار می‌گردد. در حالی که عدم اجرای اختیار معامله، باعث ایجاد زیان ۵۰۰ دلاری برای سرمایه‌گذار می‌شود. مقایسه این دو نشان می‌دهد که در این حالت اجرای اختیار معامله حتی با وجود زیان خالص بهتر از عدم اجرای آن است.

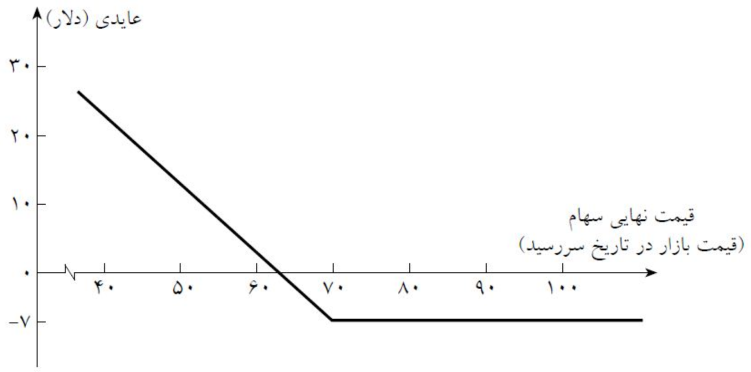
قرار داد اختیار فروش

مثال ۱.۱.۲۰. فرض کنید سرمایه‌گذاری، یک اختیار فروش اروپایی برای فروش صد سهم را با قیمت اعمال ۷۰ دلار می‌خرد. اگر قیمت جاری سهم را ۶۵ دلار، مهلت انقضای اختیار معامله را سه ماهه و قیمت اختیار معامله برای فروش یک سهم را ۷ دلار فرض کنیم، سرمایه‌گذاری اولیه این شخص، بابت خرید اختیار فروش سهام مذکور ۷۰۰ دلار می‌شود.

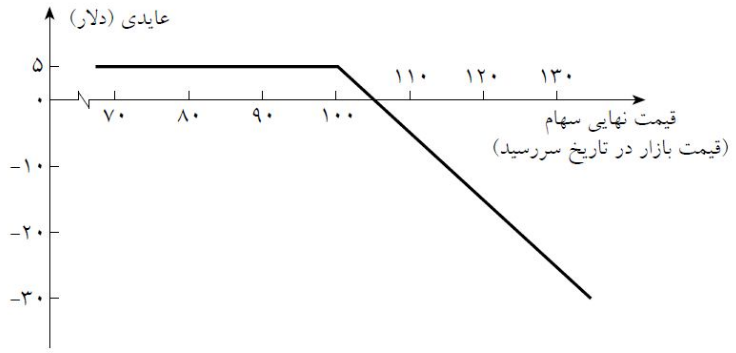
از آنجا که اختیار معامله مزبور از نوع اروپایی است، لذا فقط در صورتی اجرا می‌شود که در تاریخ سررسید اختیار معامله، قیمت سهام کمتر از ۷۰ دلار باشد.

فرض نمایید که در تاریخ سررسید اختیار معامله، قیمت سهام به ۵۵ دلار کاهش یابد در آن صورت با اجرای اختیار معامله، سرمایه‌گذار می‌تواند هر سهم را به قیمت ۵۵ دلار از بازار خریداری نموده و تحت اختیار معامله به قیمت ۷۰دلار بفروشد و عایدی معادل ۱۵ دلار بابت هر سهم و در مجموع ۱۵۰۰ دلار نصیب خود سازد (مجددا فرض می‌کنیم که هزینه معاملات صفر است). با کسر ۷۰۰ دلار هزینه اولیه بابت خرید اختیار فروش سهام، سود خالص این سرمایه‌گذار معادل ۸۰۰ دلار می‌شود.

اما در صورتی که قیمت سهام به بالاتر از ۷۰ دلار افزایش یابد، اختیار معامله خریداری شده فاقد ارزش می‌شود و سرمایه‌گذار مبلغ ۷۰۰ دلار سرمایه‌گذاری اولیه را از دست می‌دهد. نمودار شکل



شکل ۲.۱: سود و زیان خرید اختیار فروش اروپایی با قیمت اختیار = ۷ و قیمت اعمال = ۷۰



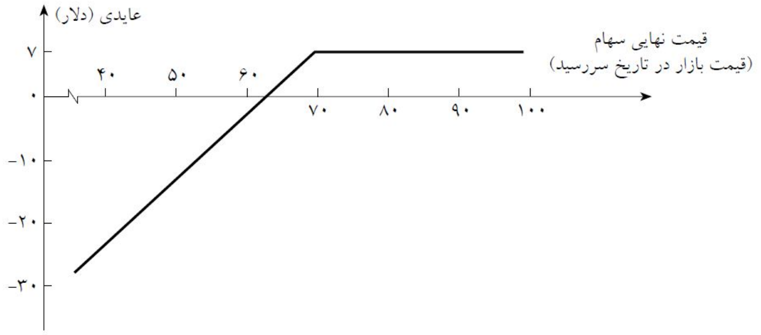
شکل ۳.۱: سود و زیان فروش اختیار خرید اروپایی با قیمت اختیار = ۵ و قیمت اعمال =۱۰۰

۲.۱ ، خالص سود یا زیان دارنده‌ی اختیار فروش معامله را با توجه به قیمتهای مختلف احتمالی سهام در تاریخ سررسید اختیار معامله، برای این مثال نشان می‌دهد.

خریدار اختیار خرید امیدوار است که قیمت سهم افزایش یابد، در حالی‌که خریدار اختیار فروش انتظار دارد که قیمت سهام کاهش یابد. سود و زیان فروشنده اختیار، درست عکس سود و زیان خریدار اختیار می‌باشد نمودارهای ۳.۱ و ۴.۱ تغییرات سود و زیان صادرکننده اختیار را در مقایسه با سود و زیان دارنده‌ی اختیار در نمودارهای شکل ۱.۱ و۲.۱ نشان می‌دهد.

تعریف ۲۱.۱.۱. نوسان‌پذیری قیمت [۹] (σ)، نشاندهتده‌ی میزان تغییرپذیری قیمت دارائی پایه است که در ریاضیات مالی **تلاطم** نیز می‌نامند. به بیانی دیگر نوسان‌پذیری یک سهم، معیاری برای اندازه‌گیری عدم اطمینان در مورد بازده‌های آن سهم می‌باشد.

[۹] Volatility of the stock price



شکل ۴.۱: سود و زیان فروش اختیار فروش اروپایی با قیمت اختیار = ۷ و قیمت اعمال = ۷۰

سه اصطلاح رایج در مورد اختیار معامله‌ها عبارتند از: باقیمت[۱۰] یا سودمند، بی‌قیمت[۱۱] یا بی‌ارزش، به‌قیمت[۱۲] یا بی‌تفاوت.

تعریف ۲۲.۱.۱. یك اختیار معامله **سودمند**، اختیاری است که برای دارنده آن در صورت اعمال فوری این حق، جریان نقدی مثبتی به ارمغان می‌آورد.

تعریف ۲۳.۱.۱. یك اختیار معامله **بی‌تفاوت**، اختیار معامله‌ای است که در صورت اجرای فوری آن، هیچ جریان نقدی مثبت یا منفی برای دارنده این ورقه به همراه ندارد.

تعریف ۲۴.۱.۱. یك اختیار معامله **بی‌ارزش**، در صورت اعمال فوری آن، جریان نقدی منفی برای دارنده اوراق اختیار معامله نتیجه می‌دهد.

تعریف ۲۵.۱.۱. **ارزش ذاتی** [۱۳] یك اختیار معامله عبارت است از حداکثر مقدار بین صفر و ارزش اختیار معامله در صورتی که بلافاصله اعمال شود.

[۱۰] In the money

[۱۱] Out of the money

[۱۲] At the money

[۱۳] Intrinsic value

۲.۱ مفاهیم آنالیزی و احتمالی

تعریف ۱.۲.۱. نگاشت $\|.\| : V \to \mathbb{R}^+$ یک **نرم برداری** است اگر:

۱. برای هر $v \in V$، $\|v\| \geq 0$ و $\|v\| = 0$ اگر وتنها اگر $v = 0$

۲. برای هر $c \in R, v \in V$، $\|cv\| = |c|\|v\|$

۳. برای هر $v, w \in V$، $\|v + w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$.

نرم‌های برداری متعددی وجود دارد که چند نمونه از آن‌ها در زیر آمده‌اند.

تعریف ۲.۲.۱. برای $v \in V$ داریم:

$$\|v\|_2 = (\sum_{i=1}^{n} v_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

که آن‌را **نرم اقلیدسی** می‌نامند.

$$\|v\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$$

که آن‌را **نرم یک** می‌نامند.

$$\|v\|_\infty = \max |v_i| \quad i = 1, \ldots, n$$

که آن‌را **نرم بی‌نهایت** می‌نامند.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنیم s مقدار تقریبی f باشد نقاط x_j را **هم‌محلی** گویند، هرگاه مقدار تقریبی در این نقاط با مقدار تحلیلی برابر باشد یعنی داشته باشیم $s(x_j) = f(x_j)$ به ازای $j = 1, \ldots, N$، به عبارت دیگر خطا در این نقاط صفر است.

تعریف ۴.۲.۱. **محمل** [۱۴] یک تابع عبارت است از بستار مجموعه نقاطی از دامنه‌ی تابع که مقدار تابع در آن نقاط، غیرصفر باشد. به عبارت دیگر، اگر محمل تابع f را با $supp(f)$ نشان دهیم، آنگاه

$$supp(f) = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$$

[۱۴] Support

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید $f(x)$ تابعی باشد به طوری که $\lim_{x\to 0} f(x) = l$ و $g(x)$ تابع دیگری باشد به طوری که به ازای kی مثبتی و برای همه‌ی مقادیر به قدر کافی کوچک xکه $0 <| x |$ داشته باشیم

$$\frac{|f(x)-l|}{g(x)} \leqslant k$$

در اینصورت می‌نویسیم $f(x) - l = O(g(x))$ وگفته می شود که $f(x) - l$ از **مرتبه‌ی** $g(x)$ است .

در حالت خاصی که $l = 0$ و $g(x) = x^p$ می‌نویسیم $f(x) = O(x^p)$ وگوییم $f(x)$از مرتبه x^p است .

تعریف ۶.۲.۱. تابع $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ را **تابع محدب** گویند، هر گاه به ازای هر $a < x, y < b$ و $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ نامساوی زیر برقرار باشد.

$$f\left((1 - \lambda)x + \lambda y\right) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

قضیه ۷.۲.۱. *اگر $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ محدب باشد و $a < s < t < u < b$، آنگاه:*

$$\frac{f(t) - f(s)}{t - s} \leqslant \frac{f(u) - f(s)}{u - s} \leqslant \frac{f(u) - f(t)}{u - t} \qquad (1.1)$$

برهان. با توجه به این که $0 < t - s < u - s$، پس $1 < \frac{t-s}{u-s} < 0$. با فرض $\lambda = \frac{t-s}{u-s}$ داریم $1 - \lambda = \frac{u-t}{u-s}$ و $\lambda u + (1 - \lambda)s = t$. از تعریف محدب بودن تابع f داریم:

$$f(t) = f\left(\lambda u + (1 - \lambda)s\right) \leqslant \lambda f(u) + (1 - \lambda)f(s) = \frac{t - s}{u - s}f(u) + \frac{u - t}{u - s}f(s)$$

لذا می‌توان نوشت:

$$f(t) - f(s) \leqslant \frac{t - s}{u - s}f(u) - \frac{t - s}{u - s}f(s)$$

و چون $t - s > 0$، پس

$$\frac{f(t) - f(s)}{t - s} \leqslant \frac{f(u) - f(s)}{u - s} \qquad (2.1)$$

به طور مشابه داریم $0 < u - t < u - s$، پس $1 < \frac{u-t}{u-s} < 0$. با فرض $\lambda = \frac{u-t}{u-s}$ داریم $1 - \lambda = \frac{t-s}{u-s}$ و $t = \lambda s + (1 - \lambda)us$. و لذا

$$f(u) - f(t) \geqslant f(u)\frac{u - t}{u - s} - \frac{u - t}{u - s}f(s)$$

و چون $u - t > 0$، پس

$$\frac{f(u)-f(t)}{u-t} \geqslant \frac{f(u)-f(s)}{u-s} \qquad (۳.۱)$$

از (۲.۱) و (۳.۱) نامساوی (۱.۱) نتیجه می‌شود. □

قضیه ۸.۲.۱. تابع $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ که دوبار مشتقپذیر است؛ تابعی محدب است اگر و تنها اگر به ازای هر $x\in(a,b)$، $f''(x)$ نامنفی باشد.

تعریف ۹.۲.۱. به ازای متغیر مستقل t و متغیرهای وابسته ی $x_۱(t)$،$x_۲(t)$،...،$x_n(t)$و مشتقات آن‌ها، دستگاه زیر را **دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول** گویند.

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t,x_۱,x_۲,\dots,x_n) \quad , \quad i=۱,۲,\dots,n$$

تعریف ۱۰.۲.۱. هر دستگاه بصورت زیر را **دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی** می گویند.

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=۱}^{n}a_{ij}(t)x_j+f_i(t) \quad i=۱,۲,\dots,n$$

هر گاه $a_{ij}(t)$ اعداد ثابت باشد، دستگاه معادلات خطی با **ضرایب ثابت** را خواهیم داشت و هر گاه $f_i(t)=۰$ باشد، دستگاه را **همگن** گویند.

تعریف ۱۱.۲.۱. **عدد حالت** ماتریس $A_{m\times n}$ برابر با

$$cond(A)=\|A\|\|A^{-۱}\|$$

تعریف ۱۲.۲.۱. ماتریس A **متقارن** است اگر و تنها اگر $A=A^T$. بعبارت دیگر درایه های ماتریس متقارن نسبت به قطر اصلی آن، متقارن هستند.

تعریف ۱۳.۲.۱. **ماتریس تنک** [۱۵] ماتریسی است که شامل تعداد زیادی درایه صفر می‌باشد.

تعریف ۱۴.۲.۱. **ماتریس پر** [۱۶] ماتریسی است که بیشتر درایه‌های آن غیر صفر می‌باشد.

تعریف ۱۵.۲.۱. **ماتریس نواری** [۱۷] یک ماتریس تنک است که درایه‌های خارج از یک نوار نسبتا

[۱۵] Sparse matrix

[۱۶] Full matrix

[۱۷] Banded matrix