بسم اللّه الرحمن الرحيم

دانشگاه اراک

دانشکده علوم پایه

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی محض (گرایش جبر)

عنوان :

$p-$ گروههای متناهی با زیرگروههای سره ناآبلی دو مولدی

ا ستاد راهنما:

دکتر رضا عرفی

ا ستاد مشاور:

دکترشیرین فولادی

توسط :

مصطفی ملکی

شهریور ۱۳۹۰

چکیده

هدف اصلی این رسا له رده بند ی $p-$گروههای متنا هی می با شد که کلیه‌ی زیرگروههای واقعی آن دو مولدی است . برای این منظور ابتدا به بررسی خواص اصلی این گروهها و سپس به رده بندی آنها می پردازیم .

در آخر با ارا ئه‌ی مثا لها یی با ا ستفاده ا ز نرم افزا ر GAP به بررسی ا ین رده بند ی و بیان چند مطلب کلی در مورد ۲$-$گروههای متنا هی می پرد ا زیم.

وا ژه های کلید ی : $p-$گروهها، گروههای فرادوری، گروههای ناآبلی مینیمال

پیشگفتار

مطا لعه و رده‌بند ی گروههای متناهی با توجه به برخی خواص به عنوان پیش فرض یکی از مسا ئل جا لب و قد یمی در جبر گروهها می با شد که از ابتدا ی پید ا یش نظریه‌ی گروه (سال ۱۸۸۰) مورد توجه بوده است و رده بندی ها ی فرا و ا نی ارا ئه شد ه ا ست . به عنوان مثال رده بندی گروههای از مرتبه p^n و ارا ئه کلیه‌ی گروهها ی دو به دو غیر یکریخت برای $1 \leq n \leq 7$. رده بندی گروهها ی ناآبلی که کلیه‌ی زیرگروهها ی وا قعی آن آبلی ا ست توسط ردی $(Redei)$ ا نجام شد ه است . به علا وه رده بندی همه‌ی گرو ههایی که زیرگروهها ی وا قعی آن دو مولدی می با شد توسط بلک برن $(Blackburn)$ ا نجام شد ه است و ثا بت کرده ا ست که چنین گروهها یی فرادوری یا ۳−گروه رده ماکزیمال می با شد .

در این رسا له به رده بندی $p-$ گروهها ی متنا هی که زیرگروه وا قعی وناآبلی آن دو مولدی می با شد پرداخته می شود .

ا ین رسا له شا مل سه فصل می با شد .

فصل ا ول به مطا لب مقد ما تی ا ختصاص داده شد ه که در فصل های بعدی از آنها ا ستفاده می کنیم .

در فصل دوم ا بتدا به بیان برخی قضایای اساسی در مورد رده بندی گروهها و بیان برخی خواص گروهها ی متنا هی که شا مل یک زیر گروه ماکزیمال آبلی باشند می پردازیم .

در فصل سوم ا بتدا به تعریف برخی مفا هیم می پردا زیم و سپس به معرفی A_1-گروهها و بررسی خواص آن می پرد ازیم. همچنین به مطا لعه‌ی کلی $D_P(2)-$گروهها و در نها یت رده بندی آنها را ارا ئه می د هیم. ودر ا نتها با ا ستفاده از نرم افزار GAP به بررسی نتایج در مورد ۲−گروهها ی متناهی می پرد ا زیم .

ا ین رسا له شرح تفضیلی مقا لات زیر می با شد :

1) *Finite p−groups all of whose non−abelian proper subgroups are generated*

by two elements by Mingyao Xu, Lijian An, Qinhai Zhang, J.Algebra(2008).

2) *On a special class of p−groups by N, Blackburn* (1958).

فهرست مندرجات

فصل ۱

پیش نیازها

۱.۱ تعاریف ، قضا یا و مفا هیم مقد ما تی

تعریف : فرض کنیم G یک گروه با شد، سری نرمال $G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_r = G$ را یک سری مرکزی گوییم در صورتی که به ازای هر i که $1 \leq i \leq r$ داشته با شیم $G_i/G_{i-1} \leq Z(G/G_{i-1})$.
گروه G را پوچتوان گوییم در صورتی که یک سری مرکزی دا شته با شد. طول کوتاه ترین سری مرکزی G را رده‌ی پوچتوانی G گویند و با علامت $\mathrm{cl}(G)$ نشان می‌د هیم .

تعریف: فرض کنیم G یک گروه با شد، د نباله $\{\Gamma_n(G)\}$ از زیر گروههای G را به استقراء چنین تعریف می‌کنیم :

$$\Gamma_1(G) = G, \quad \Gamma_n(G) = [G, \Gamma_{n-1}(G)] \quad (n > 1)$$

به آسا نی د یده می شود که هر $\Gamma_n(G)$ یک زیر گروه مشخص G ا ست.
سری $\Gamma_1(G) \geq \Gamma_2(G) \geq \cdots$ را سری مرکزی پا یینی G می نا میم .
تعریف: فرض کنیم G یک گروه با شد، د نبا له $\{\mathrm{Z}_n(G)\}$ از زیر گروههای G را به استقراء چنین تعریف می‌کنیم :

$$\mathrm{Z}_0(G) = 1, \quad \mathrm{Z}_i(G)/\mathrm{Z}_{i-1}(G) = \mathrm{Z}(G/\mathrm{Z}_{i-1}(G)) \quad (i > 0)$$

به آسانی دیده می‌شود که هر $\mathrm{Z}_n(G)$ یک زیرگروه مشخص G است. سری $\mathrm{Z}_1(G) \leq \mathrm{Z}_2(G) \leq \cdots$ را سری مرکزی بالایی G می نامیم .

قضیه ۱.۱.۱

فرض کنیم G یک گروه باشد، در این صورت

(i) G پوچتوان است اگر و تنها اگر عدد صحیح نامنفی مانند r موجود باشد به طوری که $\Gamma_{r+1}(G) = 1$.

(ii) G پوچتوان است اگر و تنها اگر عدد صحیح نامنفی مانند s موجود باشد به طوری که $\mathrm{Z}_s(G) = G$.

(iii) $\mathrm{cl}(G) = r$ اگر و تنها اگر $\Gamma_{r+1}(G) = 1$، $\Gamma_r(G) \neq 1$.

(iv) $\mathrm{cl}(G) = r$ اگر و تنها اگر $\mathrm{Z}_r(G) = G$، $\mathrm{Z}_{r-1}(G) < G$.

لم ۲.۱.۱

فرض کنیم G یک گروه باشد و $x, y, z \in G$ ، در این صورت

(i) $[xy, z] = [x, z]^y[y, z] = [x, z][x, z, y][y, z]$.

(ii) $[x, yz] = [x, z][x, y]^z = [x, z][x, y][x, y, z]$.

(iii) $[x^{-1}, y] = ([x, y])^{-1})x^{-1} = [x, y]^{-1}[[x, y]^{-1}, x^{-1}]$.

(iv) اگر $[[x, y], y] = 1$، آن‌گاه $[x, y^n] = [x, y]^n$ برای هر عدد صحیح n.

همچنین اگر G از کلاس پوچتوانی ۲ باشد، آنگاه

(v) $[xy, z] = [x, y][y, z]$.

(vi) $[x, yz] = [x, z][x, y]$.

(vii) $[x^i, y^j] = [x, y]^{ij}$.

قضیه ۳.۱.۱

فرض کنیم G یک گروه باشد و $A, B, C \lhd G$، آنگاه

(i) $[A,BC]=[A,B][A,C]$.

(ii) $[AB,C]=[A,C][B,C]$.

نتیجه ۴.۱.۱

اگر G پوچتوان باشد و $N \lhd G$، آنگاه $\frac{G}{N}$ نیز پوچتوان است.

گزاره ۵.۱.۱

فرض کنیم G یک گروه با شد که در آن $N \leq Z\left(G\right)$، در ا ین صورت اگر $\frac{G}{N}$ دوری با شد، آنگاه G آبلی است.

لم ۶.۱.۱

فرض کنیم G گروهی پوچتوان با شد، در ا ین صورت G را می توان به صورت حاصل ضرب مستقیم زیر گروههای سیلویش نوشت، یعنی

$$G = P_1 \times P_2 \times P_3 \times .... \times P_n$$

بنا برا ین دا ریم:

$$Aut(G) = Aut(P_1) \times Aut(P_2) \times .... \times Aut(P_n)$$
$$Aut_c(G) = Aut_c(P_1) \times Aut_c(P_2) \times .... \times Aut_c(P_n)$$

گزاره ۷.۱.۱

فرض کنیم G یک گروه پوچتوان از کلاس ۲ با شد، در ا ین صورت $G' \leq Z\left(G\right)$.

تعریف : فرض کنیم G یک گروه با شد، مقطع تمام زیر گروههای ماکزیمال G را زیر گروه فراتینی G گوییم و با علامت $\Phi(G)$ نشان می دهیم . هرگاه G فا قد زیر گروه ماکزیمال با شد طبق قرا رداد می‌نویسیم $\Phi(G) = G$.

لم ۸.۱.۱

فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد، در ا ین صورت:

(i) G پوچتوان ا ست اگر و تنها اگر $G' \subseteq \Phi(G)$.

(ii) اگر G یک $p-$گروه متناهی با شد، آنگاه $\Phi(G) = G'G^p$ که در آن $G^p = \langle g^p \mid g \in G \rangle$.

لم ۹.۱.۱

اگر G یک $p-$گروه و $|G| = p^n$، آنگاه $cl\ (G) \leq n-1$.

قضیه ۱۰.۱.۱

فرض کنیم G یک گروه باشد که $cl(G) = c$ ، آنگاه $c(G/Z) = c-1$.

تعریف : فرض کنیم G یک $p-$گروه و $|G| = p^n$. اگر $cl\ (G) = n-1$، آنگاهG را از رده‌ی ماکسیمال گوییم .

تعریف : فرض کنیم G یک $p-$گروه با شد و $|G| = p^n$، در ا ین‌صورت اگر $cl\ (G) = r$ ، آنگاه عدد $n-r$ را هم رده‌ی گروه G گوییم .

در نتیجه گروههای رده‌ی ماکسیمال، هم رده‌ی یک هستند.

قضیه ۱۱.۱.۱

فرض کنیم G یک گروه پوچتوان از رده‌ی r با شد. در ا ین صورت

(i) هر زیر گروه G از رده‌ی حد اکثر r است.

(ii) هر تصویر همریخت G پوچتوان از رده‌ی حد اکثر r ا ست.

قضیه ۱۲.۱.۱

فرض کنیم G یک گروه پوچتوان با شد و H زیر گروهی واقعی از آن ، در ا ین صورت: $H \neq N(H)$. $(H < N_G(H))$.

قضیه ۱۳.۱.۱

اگر گروه پوچتوان G زیر گروه ماکسیمالی ما نند M د ا شته با شد،آنگاه $M \lhd G$ و $\dfrac{G}{M}$ یک گروه دوری از مرتبه یک عدد اول ا ست.

قضیه ۱۴.۱.۱

فرض کنیم G یک گروه غیر بد یهی متناهی با شد، در ا ین صورت گز اره های زیر دو به دو معاد لند:

(i) G پوچتوان ا ست.

(ii) هر زیر گروه ماکسیمال G نرمال ا ست.

(iii) هر $p-$ زیر گروه سیلوی G نرمال است.

(iv) هر دو عضو G که مرتبه‌ی آنها نسبت به هم اول ا ست ، تعویضپذ یرند.

(v) G حاصلضرب مستقیم زیرگروههای سیلوی خودش ا ست.

قضیه ۱۵.۱.۱

زیر گروه هر گروه پوچتوان ، پوچتوان است.

لم ۱۶.۱.۱

هرگاه G یک $p-$ گروه متنا هی با شد ، آنگاه G گروهی پوچتوان است.

قضیه ۱۷.۱.۱

هرگاه G گروهی پوچتوان با شد و $H \leq G$ درصورتی که شاخص H در G عددی اول با شد، آنگاه $H \lhd G$.

لم ۱۸.۱.۱

فرض کنیم گروه G پوچتوان با شد در ا ین صورت اگر $1 = G_0 \leq G_1 \leq ... \leq G_r = G$ یک سری مرکزی برای G با شد آنگاه

(i) به ازای هر n طبیعی که $n \leq r+1$ ، $\Gamma_n \leq G_{[r-n+1]}$.

(ii) به ازای هر n صحیح نامنفی که $n \leq r$، $G_n \leq Z_n$

قضیه ۱۹.۱.۱

فرض کنیم G یک گروه پوچتوان با شد و $N \lhd G$ اگر $N \neq 1$ آنگاه

الف) $N \cap Z(G) \neq 1$

ب) $[G,N] \leq N$

قضیه ۲۰.۱.۱

فرض کنیم M,N دو زیر گروه نرمال گروه G با شند در ا ین صورت اگر M,N پوچتوان به ترتیب از رده های پوچتوانی c,d با شند آنگاه MN پوچتوان از رده‌ی پوچتوانی حداکثر $c+d$ ا ست .

قضیه ۲۱.۱.۱

(قضیه‌ی پایه برنساید) فرض کنیم G یک $p-$ گروه متناهی با شند و $|(G/\phi(G)| = p^r$ د را ین صورت $d(G) = r$ که در آن $d(G)$ تعد اد مولد مینیمال G ا ست .

لم ۲۲.۱.۱

فرض کنیم G یک گروه با شد و $N \lhd G$ ، در ا ین صورت اگر $N \leq \phi(G)$ آنگاه $\phi(G/N) = \phi(G)/N$.

لم ۲۳.۱.۱ به ا زای هر دو عدد طبیعی i و j ،

(i) $[\Gamma_i, \Gamma_j] \leq \Gamma_{i+j}$ ،

(ii) $i \geq j$ ، $[Z_i, \Gamma_J] \leq Z_{i-j}$ ،

(iii) $\Gamma_i(\Gamma_j) \leq \Gamma_{ij}(G)$.

لم ۲۴.۱.۱

فرض کنیم G یک $p-$ گروه متنا هی با شد ، در ا ین صورت اگر $p||\phi(G)|$ آنگاه $p|| \ G/\phi(G)|$.

لم ۲۵.۱.۱

اگر G یک $p-$ گروه ناآبلی با شد آنگاه G/G' دوری نیست .

برهان :اگر $G/G' =< G', g >$ پس $G =< G', g >$ چون $G' \leq \phi(G)$ لذا $G =< g >$ که تنا قض است .

لم ۲۶.۱.۱

اگر G یک گروه و N زیرگروه نرمالی ا ز آن با شد آنگاه:

$\Gamma_i(G/N) = \Gamma_i(G)N/N$.

لم ۲۷.۱.۱

اگر G یک $p-$ گروه با شد و $\phi(G) = 1$ آنگاه G آبلی مقد ماتی ا ست .

قضیه ۲۸.۱.۱

اگر G یک گروه باشد برای هر $i \leq j$ ، $\Gamma_i(G/\Gamma_j) = \Gamma_i(G)/\Gamma_j(G)$.

لم ۲۹.۱.۱

فرض کنیم G یک $p-$ گروه متنا هی با شد آنگاه $G/\phi(G)$ آبلی مقد ما تی ا ست .

لم ۳۰.۱.۱

اگر G یک گروه متناهی و دارای یک زیرگروه ماکزیمال آبلی با شد ، آنگاه $|G| = p|G'||Z(G)|$.

برهان. : به مرجع [2] لم ۱.۱ صفحه‌ی ۲۲ مراجعه شود.

قضیه ۳۱.۱.۱

فرض کنیم G یک گروه با شد که در آن $N \leq Z(G)$ در ا ین صورت اگر G/N د وری با شد آنگاه G آبلی ا ست.

تعریف: اگر G یک گروه متنا هی و G' زیرگروه مشتق آن با شد، آنگاه رتبه‌ی G راکه با $rank(G)$ نشان می‌دهیم برا بر با تعداد مولد های مینیمال $\frac{G}{G'}$ می‌باشد، یعنی

$.rank\,(G) = d\left(\frac{G}{G'}\right)$

تعریف: گروه ناآبلی G را یک گروه ناآبلی محض گوییم، هرگاه عامل مستقیم غیر بدیهی و آبلی ندا شته با شد.

تعریف: اگر G یک گروه متنا هی با شد نمای گروه را کوچکترین مضرب مشترک مرتبه‌ی اعضای گروه تعریف می کنیم و آن را با نماد $exp(G)$ نشان می‌د هیم.

گزاره ۳۲.۱.۱

فرض کنیم G یک گروه متنا هی غیر بد یهی و ناآبلی از مرتبه p^3 با شد، در ا ین صورت $Z\,(G) = G' = \phi\,(G) \cong C_p$. پس $\frac{G}{Z(G)} \cong C_p \times C_p$. همچنین گروههای ناآبلی از مرتبه p^3 ناآبلی محض هستند.

برهان :

ابتدا نشان می دهیم $Z\,(G) = G'$. چون $Z\,(G)$ زیرگروه G است لذا $|Z\,(G)|\,|p^3$. در نتیجه $|Z\,(G)|$ برابر ۱، p، p^2 و یا p^3 ا ست. $|Z\,(G)| \neq 1$ چون هر گروه از مرتبه p^n د ا رای مرکز غیر بد یهی ا ست. $|Z\,(G)| \neq p^3$، چون در غیر ا ین صورت $Z\,(G) = G$ و G آبلی خوا هد بود که ا ین خلاف فرض است. $|Z\,(G)| \neq p^2$، زیرا در غیر ا ین صورت $|\frac{G}{Z(G)}| = p$ و $\frac{G}{Z(G)}$ دوری و در نتیجه G آبلی خواهد بود که خلاف فرض ا ست. بنابرا ین $|Z\,(G)| = p$، در این صورت $|\frac{G}{Z(G)}| = p^2$ و در نتیجه $\frac{G}{Z(G)}$ آبلی است.در نتیجه $G' \subseteq Z\,(G)$. حال چون $|G'|\,||Z\,(G)|$ و $|G'| \neq 1$، نتیجه می‌شود $|G'| = p$. پس چون $|Z\,(G)| = p$ و $G' \subseteq Z\,(G)$ لذا $.G' = Z\,(G) \cong C_p$

اکنون فرض کنیم G گروهی ناآبلی از مرتبه p^3 باشد که ناآبلی محض نیست، در ا ین صورت می‌توان G رابه شکل $G = A \times B$ نوشت که در آن B ناآبلی محض و A آبلی نا بد یهی ا ست. بنا برا ین $|B|$ عدد p^2 را می شما رد. چون G از رده‌ی پوچتوا نی ۲ است، دا ریم $\Gamma_2\,(G) \neq 1$ و $\Gamma_3\,(G) = 1$. بنا برا ین

$$1 \neq \Gamma_2\,(G) = \Gamma_2\,(A) \times \Gamma_2\,(B) = \Gamma_2\,(B)$$

$$1 = \Gamma_3\,(G) = \Gamma_3\,(A) \times \Gamma_3\,(B) = \Gamma_3\,(B)$$

پس B نیز از رده‌ی پوچتوا نی ۲ است که ا ین با مرتبه‌ی B در تنا قض است.
می‌توان ا ثبات را برای حا لت کلی به ا ین شکل بیان کرد: با توجه به ا ینکه گروههای از مرتبه حداکثر p^2 آبلی اند نتیجه می‌شود گروههای از مرتبه p^3 تجزیه نا پذ یرند.

تعریف : گروه ناآبلی G را فرا آبلی گو ییم هرگاه G' آبلی با شد.

تعریف : G را ناآبلی مینیمال گو ییم هرگاه G آبلی نبا شد ولی هر زیرگروه واقعی آن آبلی با شد.

لم ۳۳.۱.۱

اگر G یک گروه متنا هی با شد و $G' \subseteq \phi(G)$ آنگاه G پوچتوان ا ست .

قضیه ۳۴.۱.۱

(قضیه‌ی وجود تجزیه درگروههای آبلی متناهی) هر گروه آبلی متناهی غیر بد یهی را می توان به صورت حاصلضرب مستقیم تعد ادی از زیر گروههای دوری اش که مرتبه‌ی هر یک از آنها توان مثبتی از یک عدد اول است، تجزیه کرد.

نتیجه ۳۵.۱.۱

اگر G یک $p-$ گروه آبلی و متنا هی با شد، آن را می توان به صورت حاصلضرب مستقیم تعدادی ا ز زیر گروههای دوری غیر بد یهی اش تجزیه کرد یعنی اعضای غیر بد یهی از G ما نند $a_1, a_2, ..., a_n$ وجود دارند که $G =< a_1 > \times < a_2 > \times ... \times < a_n >$.

لم ۳۶.۱.۱

فرض کنیم G یک $p-$ گروه متنا هی با شد ، در ا ین صورت اگر $|G : G'| \leq p^2$ آنگاه G' آبلی ا ست .

لم ۳۷.۱.۱

فرض کنیم G یک $p-$ گروه متنا هی با شد ، در ا ین صورت اگر $|G|>p$ آنگاه $|G:G'|\geq p^2$

قضیه ۳۸.۱.۱

(پوا نکا ره) مقطع تعدادی متناهی از زیر گروههای یک گروه که د ا رای ا ند یس متناهی در گروه اند ، از ا ند یس متناهی ا ست .

لم ۳۹.۱.۱

فرض کنیم ا ند یس زیرگروههای H و K در گروه G متنا هی ونسبت به هم ا ول با شند، در ا ین صورت $|G:H\bigcap K|=|G:H||G:K|$ و در نتیجه $G=HK$.

قضیه ۴۰.۱.۱

(قانون مد ولی ددکیند) فرض کنیم H ، K و L زیرگروههایی از گروه G با شند به طوری که $K\leq L$. د ر ا ین صورت $(H\bigcap L)K=(HK)\bigcap L$.

بالاخص اگر $HK\leq G$ آنگاه $<H\bigcap L,K>=<H,K>\bigcap L$.

لم ۴۱.۱.۱

فرض کنیم H,K زیرگروههای گروهی ما نند G با شند به طوری که ا ند یس K در G متنا هی باشد ، د ر ا ین صورت :

(i) ا ند یس $H\bigcap K$ در H متنا هی ا ست ،و $|H:H\bigcap K|\leq|G:K|$ ، و تساوی برقرا ر ا ست اگر و تنها اگر $G=HK$.

(ii) هرگاه ا ند یس H در G نیز متنا هی با شد آنگاه $|G:H\bigcap K|\leq|G:H||G:K|$ وتساوی برقرا ر ا ست اگر و تنها اگر $G=HK$.

قضیه ۴۲.۱.۱

فرض کنیم G یک $p-$ گروه متناهی غیربدیهی و $a \in G$. در این صورت اگر مرتبه‌ی a از مرتبه‌ی هر عضو G ناکمتر باشد آنگاه G زیرگروهی مانند H دارد به طوری که $G = < a > \times H$.

قضیه ۴۳.۱.۱

اگر G یک گروه متناهی و ناآبلی مینیمال باشد ، آنگاه $|G'| = p$.

۲.۱ نمایش گروهها و گروههای منظم

تعریف . فرض کنیم F یک گروه , X مجموعه ای و $\theta : X \to F$ تابعی باشد. در این صورت (F, θ) را بر X آزاد گوییم هرگاه به ازای هر گروه مانند G و هر تابع مانند $\alpha : X \to G$ یک همریختی منحصر به فرد مانند $\beta : F \to G$ موجود باشد به طوری که $\alpha = \theta\beta$.

لم ۱.۲.۱ هر گروه تصویر همریخت یک گروه آزاد است .

برهان :

به مرجع [20] صفحه‌ی ۱۶۰ مراجعه شود . **تعریف .** فرض کنیم X مجموعه ای و $R \subseteq F(X)$. در این صورت گروه خارج قسمتی $F(X)/\bar{R}$ را با علامت $< X|R >$ نشان می دهیم و آن را یک نمایش آزاد $F(X)/\bar{R}$ می گوییم ($\bar{R}$ یعنی بستار نرمال R در $F(X)$).

قضیه ۲.۲.۱ هر گروه متناهی، متناهی نمایش است .

قضیه ۳.۲.۱ فرض کنید $G =< X|R >$ و همچنین $C = \{[x,y] | x, y \in X, x \neq y\}$. در این صورت $G/G' \cong< X|R \cup C >$.

برهان :

به مرجع [20] صفحه‌ی ۱٦۵ مرا جعه شود .

قضیه ۴.۲.۱ (قضیه جایگذ اری). فرض کنید $G =< X|R >$، H یک گروه و $\theta : X \to H$ نگاشتی مفروض باشد. در این صورت اگر به ازای هر x از X و هر r از R حاصل جایگذ اری x^θ به جای x در r عضو همانی H باشد آنگاه یک همریختی مانند $\gamma : G \to H$ وجود دارد به طوری که به ازای هر x از X، $(\bar{R}x)^\gamma = x^\theta$. بعلاوه هرگاه $H =< X^\theta >$ آنگاه γ بروریختی است .

برهان :

به مرجع [20] صفحه‌ی ۱٦۵ مرا جعه شود .

قضیه ۵.۲.۱ فرض کنید $G =< X|R >$ و $H =< Y|S >$. در ا ین صورت $G \times H \cong< X \cup S \cup [X,Y] >$ که در آن $[X,Y] = \{[x,y] | x \in X, y \in Y\}$.

برهان :

به مرجع [20] صفحه‌ی ۱٦٦ مرا جعه شود .

لم ٦.۲.۱ فرض کنید H و K زیر گروههای نرمال G باشند و بعلاوه $H =< X >$ و $K =< Y >$. در این صورت $[H,K] =< [x,y]^g | x \in X, y \in Y, g \in G\}$.

لم ۷.۲.۱ اگر G یک گروه از کلاس پوچتوانی ۲ باشد آنگاه $\exp(G/Z(G)) = \exp(G')$

برهان. : به مرجع [18] مراجعه شود.

قضیه ۸.۲.۱ اگر G یک گروه و $Z_2(G)$ د وری با شد آنگاه G دوری است .

برهان. به مرجع [19] نتیجه‌ی ۴.۴ مراجعه شود.

تعریف . فرض کنیم G یک p–گروه متنا هی با شد. در ا ین صورت به ازای هر عدد طبیعی n دو زیر گروه $\Omega_n(G)$ و $\mho_n(G)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\Omega_n(G) = \langle x | x \in G, x^{p^n} = 1 \rangle,$$

$$\mho_n(G) = \langle y^{p^n} | y \in G \rangle.$$

به وضوح $\Omega_n(G)$ و $\mho_n(G)$ زیر گروههای مشخص G هستند همچنین $\mho_n(G) \leq \Phi(G)$.

تعریف . فرض کنیم G یک p–گروه با شد. در ا ین صورت G را منظم گویند هرگاه به ازای هر x و y از G عضوی مانند c از $\mho_1(H')$ موجود با شد بطوری که $x^p y^p = (xy)^p c$ که در آن $H = \langle x, y \rangle$.

واضح است هر p–گروه آبلی منظم ا ست .

لم ۹.۲.۱ فرض کنید G یک p–گروه با شد. در ا ین صورت

(i) اگر G منظم باشد آنگاه هر زیر گروه (هر خارج قسمت) آن منظم است .

(ii) اگر G' دوری و $p > 2$ آنگاه G منظم است . بنابراین هر p–گروه فرادوری که $p > 2$ منظم است .

(iii) اگر رده‌ی پوچتوانی G کمتر از p باشد آنگاه G منظم است .

(iv) اگر $|G| \leq p^p$ آنگاه G منظم است .

برهان : به مرجع [19] صفحه‌ی ۴۶ مراجعه شود.

قضیه ۱۰.۲.۱ فرض کنید G یک p–گروه منظم باشد و $x, y \in G$. در این صورت $x^{p^n} = y^{p^n}$ اگر و تنها اگر $(x^{-1}y)^{p^n} = 1$.

برهان : به مرجع [19] صفحه‌ی ۴۷ مراجعه شود.