دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

گروه آمار

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
آمار، گرایش ریاضی

عنوان

توزیع بتای تعمیم‌یافته وایبل

استاد راهنما

دکتر احمد نزاکتی

استاد مشاور

دکتر محمد آرشی

دانشجو

سحر جلالی

بهمن ۱۳۹۲

به‌نام آن‌که جان را فکرت آموخت

پروردگارا...

نه می‌توانم مویشان را که در راه عزّت من سفید شد، سیاه کنم و نه برای دست‌های پینه بسته‌شان که ثمره تلاش برای افتخار من است، مرهمی دارم. پس توفیقم ده که هر لحظه شکرگزارشان باشم و ثانیه‌های عمرم را در عصای دست بودنشان بگذارم.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

دانشگاه صنعتی شاهرود
مدیریت تحصیلات تکمیلی
فرم شماره

باسمه تعالی

شماره:
تاریخ:
ویرایش:

فرم صورت جلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) نتیجه ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم **سحر جلالی** رشته آمار گرایش آمار ریاضی تحت عنوان **توزیع بتای تعمیم یافته وایبل**

که در تاریخ ۹۲/۱۱/۳۰ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه : بسیار خوب امتیاز ۱۸/۵) ☑ دفاع مجدد ☐ مردود ☐

۱ـ عالی (۲۰ ـ ۱۹) ۲ـ بسیار خوب (۱۸/۹۹ ـ ۱۸)

۳ـ خوب (۱۷/۹۹ ـ۱۶) ۴ـ قابل قبول (۱۵/۹۹ ـ ۱۴)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استاد راهنما	دکتر احمد نزاکتی	دانشیار	
۲-استاد مشاور	دکتر محمد آرشی	دانشیار	
۳ـ نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر داود شاهسونی	استادیار	
۴ـ استاد ممتحن	دکتر حسین باغیشنی	استادیار	
۵ـ استاد ممتحن	دکتر محمد رضا ربیعی	استادیار	

رئیس دانشکده: دکتر احمد زیره امضاء

تقدیم به خانواده عزیزم

همسر مهربانم

و خواهرزاده عزیزم، صبا کوچولو

سپاس گزاری

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر احمد نزاکتی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر محمد آرشی که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از برادر و خواهران عزیزم و همین‌طور همسر بزرگوارم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

سحر جلالی

بهمن ۱۳۹۲

تعهدنامه

اینجانب **سحر جلالی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **آمار** **دانشکده علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **توزیع بتای تعمیم‌یافته وایبل** ، تحت راهنمایی **دکتر احمد نزاکتی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تاکنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود ” یا “ Shahrood University ” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

سحر جلالی
بهمن ۱۳۹۲

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

برای مدل‌بندی نرخ شکست‌های سهمی شکل یا سهمی وارونه، برخی از نسخه‌های توزیع وایبل، مانند توزیع تعمیم وایبل تعدیل‌یافته و توزیع بتا وایبل تعمیم‌یافته را معرفی می‌کنیم و با توجه به این دو توزیع، توزیع شش پارامتری جدید بتا وایبل تعدیل‌یافته تعمیم‌یافته را ارائه می‌دهیم. اهمیت این توزیع‌ها، در مدل‌بندی نرخ شکست‌های غیریکنوا، به‌خوبی نرخ شکست‌های یکنوا است که در تحلیل بقا و قابلیت اطمینان بسیار رایج است. این توزیع‌ها هم‌چنین، برخی از توزیع‌های شناخته‌شده را به‌عنوان زیرمدل‌های خود دربر دارند. پس از معرفی توزیع بتا وایبل تعدیل‌یافته تعمیم‌یافته، در ادامه، تابع توزیع و تابع چگالی آن‌را به‌صورت مجموع وزنی توزیع تعمیم وایبل تعدیل‌یافته بیان می‌کنیم. گشتاور مرتبه kام را به‌صورت مجموع نامتناهی به دو فرم متفاوت محاسبه کرده و معادلات غیرخطی را برای برآورد درستنمایی ماکسیمم نتیجه می‌گیریم. درنهایت، با بررسی این توزیع جدید روی یک مجموعه داده واقعی، برتری این توزیع را نسبت به زیرمدل‌هایش نشان می‌دهیم.

کلمات کلیدی: نرخ شکست سهمی شکل، تابع W لامبرت، توزیع تعمیم وایبل تعدیل‌یافته، توزیع بتا وایبل تعمیم‌یافته، توزیع بتا وایبل تعدیل‌یافته تعمیم‌یافته

پیش‌گفتار یکی از اهداف مهم در بررسی‌های آماری، تعیین مدل براساس شکل نرخ شکست داده‌ها می‌باشد. با توجه به این‌که توزیع وایبل دارای نرخ شکست یکنوا است، برای داده‌های با چنین نرخ شکستی، در اکثر موارد از توزیع وایبل استفاده می‌شود.
از آنجایی‌که در تحلیل بقا و قابلیت اطمینان، نرخ شکست‌های غیریکنوا متداول هستند، ازجمله، مرگ ومیر نوزادان و سیستم‌های مکانیکی و الکتریکی پیچیده، توزیع وایبل مناسب نمی‌باشد. از این‌رو، به معرفی توزیع‌هایی با نرخ شکست غیریکنوا می‌پردازیم.
هدف ما در این پایان‌نامه، معرفی توزیعی به‌نام بتا وایبل تعمیم‌یافته با نرخ شکست غیریکنوا است.
در راستای مطالب بیان‌شده، پایان‌نامه را به‌صورت زیر تنظیم نموده‌ایم:

- در فصل اول، تعاریف و قضایای مورد نیاز در این پایان‌نامه را مطرح می‌کنیم.
- در فصل دوم، توزیع چهار پارامتری تعمیم وایبل تعدیل‌یافته را معرفی کرده و به بیان زیرمدل‌ها و محاسبه گشتاورها و آماره ترتیبی پرداخته‌ایم.
- در فصل سوم، پس از معرفی توزیع بتا وایبل تعمیم‌یافته و زیرمدل‌هایش، گشتاورهای آن‌را به‌دست آورده و با استفاده از شبیه‌سازی به مطالعه مدل پرداخته‌ایم و در نهایت با دو مثال کاربردی، برتری این توزیع را نسبت به زیرمدل‌هایش نشان می‌دهیم.
- در فصل چهارم، با توجه به فصل‌های دوم و سوم، توزیع شش پارامتری جدیدی را با نام توزیع بتا وایبل تعدیل‌یافته تعمیم‌یافته معرفی می‌کنیم. در ادامه به بیان زیرمدل‌های آن می‌پردازیم و ویژگی‌های توزیع را بیان می‌کنیم. سپس به مطالعه شبیه‌سازی پرداخته و به مقایسه این توزیع و زیرمدل‌هایش با استفاده از یک مثال کاربردی می‌پردازیم.
- پیوست این پایان‌نامه نیز شامل ماتریس اطلاع فیشر توزیع بتا وایبل تعمیم‌یافته، معرفی الگوریتم ژنتیک و کدهای نوشته‌شده در محیط R است.

لازم به‌ذکر است که برای سادگی عنوان توزیع بتای تعمیم‌یافته وایبل، به‌صورت بتا وایبل تعمیم‌یافته در طول پایان‌نامه، تغییر یافته است.

فهرست علائم اختصاری

بتا وایبل تعدیل‌یافته تعمیم‌یافته	BGMW
تعمیم وایبل تعدیل‌یافته	GMW
بتا وایبل تعمیم‌یافته	BGW
وایبل تعدیل‌یافته	MW
وایبل تعمیم‌یافته	GW
بتا نمایی تعمیم‌یافته	BGE
ریلی تعمیم‌یافته	GR
نمایی تعمیم‌یافته	GE
نرخ شکست صعودی	IFR
نرخ شکست نزولی	DFR
شکل سهمی تعدیل‌یافته	MBT
سهمی شکل	BT
وارونه سهمی شکل	UBT
نمودار زمان کل آزمون	TTT-plot

فهرست توزیع‌ها

نام خانواده پارامتری توزیع‌ها	تابع چگالی	فضای پارامتر
تعمیم وایبل تعدیل‌یافته	$f(t)=\alpha\lambda^{\beta}t^{\beta-1}(\beta+\gamma t)\exp\{\gamma t-(\lambda t)^{\beta}\exp(\gamma t)\}$ $\times[1-\exp\{-(\lambda t)^{\beta}\exp(\gamma t)\}]^{\alpha-1}, \quad t>0$	$\lambda>0,\beta\geq 0,$ $\gamma>0,\alpha>0$
وایبل	$f(t)=\beta\lambda^{\beta}t^{\beta-1}\exp\{-(\lambda t)^{\beta}\}, \quad t>0$	$\lambda>0,\beta\geq 0$
مقادیر فرین	$f(t)=\gamma\ \exp\{\gamma t-\exp(\gamma t)\}, \quad t>0$	$\gamma>0$
وایبل تعمیم‌یافته	$f(t)=\alpha\beta\lambda^{\beta}t^{\beta-1}\exp\{-(\lambda t)^{\beta}\}$ $\times[1-\exp\{-(\lambda t)^{\beta}\}]^{\alpha-1}, \quad t>0$	$\lambda>0,\beta\geq 0,\alpha>0$
وایبل تعدیل‌یافته	$f(t)=\lambda^{\beta}t^{\beta-1}(\beta+\gamma t)\exp\{\gamma t-(\lambda t)^{\beta}\exp(\gamma t)\}$	$\lambda>0,\beta\geq 0,\gamma>0$
بتا وایبل تعمیم یافته	$f(t)=\frac{\alpha\beta\lambda^{\beta}t^{\beta-1}}{B(a,b)}\left(1-\mathrm{e}^{-(\lambda t)^{\beta}}\right)^{a\alpha-1}$ $\times\left\{1-\left(1-\mathrm{e}^{-(\lambda t)^{\beta}}\right)^{\alpha}\right\}^{b-1}\mathrm{e}^{-(\lambda t)^{\beta}},\ t>0$	$a>0,b>0,$ $\lambda>0,\beta\geq 0,\alpha>0$
نمایی	$f(t)=\lambda\mathrm{e}^{-(\lambda t)}, \quad t>0$	$\lambda>0$
ریلی	$f(t)=2\lambda^{2}t\mathrm{e}^{-(\lambda t)^{2}}, \quad t>0$	$\lambda>0$
نمایی تعمیم‌یافته	$f(t)=\alpha\lambda\mathrm{e}^{-(\lambda t)}(1-\mathrm{e}^{-(\lambda t)})^{\alpha-1}, \quad t>0$	$\lambda>0,\alpha>0$
ریلی تعمیم‌یافته	$f(t)=2\alpha\lambda^{2}t\mathrm{e}^{-(\lambda t)^{2}}(1-\mathrm{e}^{-(\lambda t)^{2}})^{\alpha-1}, \quad t>0$	$\lambda>0,\alpha>0$
بتا نمایی تعمیم‌یافته	$f(t)=\frac{\alpha\lambda}{B(a,b)}\left(1-\mathrm{e}^{-(\lambda t)}\right)^{a\alpha-1}$ $\times\left\{1-\left(1-\mathrm{e}^{-(\lambda t)}\right)^{\alpha}\right\}^{b-1}\mathrm{e}^{-(\lambda t)},\ t>0$	$a>0,b>0,$ $\lambda>0,\alpha>0$
بتا وایبل	$f(t)=\frac{\beta\lambda^{\beta}t^{\beta-1}}{B(a,b)}\left(1-\mathrm{e}^{-(\lambda t)^{\beta}}\right)^{a-1}\mathrm{e}^{-b(\lambda t)^{\beta}},\ t>0$	$a>0,b>0,$ $\lambda>0,\beta\geq 0$
بتا نمایی	$f(t)=\frac{\lambda}{B(a,b)}\left(1-\mathrm{e}^{-(\lambda t)}\right)^{a-1}\mathrm{e}^{-b(\lambda t)},\ t>0$	$a>0,b>0,\lambda>0$

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فصل ۱

تعاریف مقدماتی

۱.۱ مقدمه

در سیستم‌های مکانیکی و الکتریکی پیچیده، نرخ شکست[۱]اغلب به‌صورت غیر یکنوا (سهمی شکل [۲] یا سهمی واونه[۳]، تک مدی[۴]) نمایش داده می‌شود. توزیع‌هایی با چنین نرخ شکستی، توجه قابل ملاحظه‌ای در مهندسی قابلیت اطمینان به خود جلب کرده‌اند. برای آگاهی بیشتر لای و خی (۲۰۰۶) را ببینید.

توزیع وایبل با زیرمدل‌های نمایی و ریلی، در سال ۱۹۵۱ توسط وایبل[۵]، برای مدل‌بندی داده‌های طول عمر و بلایای طبیعی با نرخ شکست یکنوا معرفی شد. به‌دلیل چولگی مثبت و منفی تابع چگالی این توزیع، آن‌را به‌عنوان مدل اصلی مورد بررسی، برای داده‌های با نرخ شکست یکنوا، در این پایان‌نامه، درنظر می‌گیریم. با این وجود، این توزیع برازش مناسبی را برای داده‌های با نرخ شکست غیریکنوا که در قابلیت اطمینان و تحلیل بقا بسیار متداول است، فراهم نمی‌کند.

نمودار نرخ شکست سهمی شکل دارای سه قسمت است. در قسمت اول، نرخ شکست کاهش می‌یابد، بخش میانی نسبتا هموار است و چگالی منطبق بر آن دارای یک پاد مد مثبت است و در بخش آخر نرخ شکست افزایش می‌یابد. به‌عنوان مثالی شهودی از این رفتار می‌توان فرایند مرگ و میر نوزادان را نام برد که در مرحله اول مرگ و میر نوزادان به‌علت نقص ارثی بالاست که به سرعت کاهش می‌یابد، مرحله میانی که ثابت است و مرگ بر اثر یک ضربه ناگهانی مثل تصادف رخ می‌دهد (مرحله شکست تصادفی)، و مرحله نهایی که مرگ حاصل از انباشتگی اثرات منفی طبیعی است (مرحله فرسودگی) و مجدد افزایش می‌یابد. نقطه مقابل نرخ شکست سهمی شکل، نرخ شکست تک مدی یا سهمی وارونه است که در ابتدا صعودی است، در بخش میانی ثابت می‌ماند و مجددا کاهش می‌یابد. برای مثال می‌توان

---

[۱] Failure rate

[۲] Bathtube

[۳] Upside-down bathtube

[۴] Unimodal

[۵] Weibull

مواردی از بیماری را که مرگ و میر پس از یک دوره محدود به اوج خود می‌رسد و سپس به‌تدریج کاهش می‌یابد را بیان کرد.

به دلیل ناتوانی توزیع وایبل در مدل‌بندی داده‌های با چنین نرخ شکست‌هایی، از برخی از نسخه‌های تعمیم‌یافته توزیع وایبل برای این منظور استفاده شده است. در سال ۱۹۹۵ خی و لای مدل وایبل جمعی[۶] را با افزودن دو تابع بقا (تابع قابلیت اطمینان) وایبل به‌دست آوردند. آن‌ها نشان دادند که نرخ شکست مدل مورد نظر به‌صورت مجموع دو نرخ شکست وایبل قابل بیان می‌باشد. این مدل برای تابع نرخ شکست‌های سهمی شکل کاربرد زیادی دارد. خی و همکاران[۷] (۲۰۰۲) تعمیمی از توزیع وایبل، با عنوان توسیع وایبل تعدیل‌یافته[۸]، به‌منظور مدل‌بندی سیستم‌ها با نرخ شکست سهمی شکل را مورد مطالعه قرار دادند. در سال ۲۰۰۳ ژیانگ[۹] و همکارانش ویژگی طول عمر[۱۰] مدل‌های با نرخ شکست تک مدی را مورد مطالعه قرار دادند. بوکار[۱۱] و همکاران (۲۰۰۴)ثابت کردند که قابلیت اطمینان یک سیستم دلخواه را به خوبی می‌توان توسط آمیخته‌ای متناهی از توزیع‌های وایبل[۱۲] با وزن‌های مثبت، تقریب زد. فام و لای[۱۳] (۲۰۰۷) مقاله‌ای در زمینه وایبل تعدیل‌یافته یا تعمیم‌یافته، ارائه کردند. در همان سال ببینگتون[۱۴] و همکارانش توزیع جدیدی را تحت عنوان توزیع وایبل انعطاف پذیر[۱۵] که در مدل‌بندی نرخ شکست صعودی[۱۶] (IFR) و متوسط نرخ شکست صعودی[۱۷] $(IFRA)$ و نرخ شکست سهمی تعدیل‌یافته[۱۸] (MBT)، کاملا انعطاف پذیر است، مطرح کردند. برخی دیگر از مشتقات توزیع وایبل عبارت است از وایبل تعمیم‌یافته یا نمایی شده[۱۹] (مودهولکار[۲۰] و همکاران، ۱۹۹۳ و ۱۹۹۶)، توزیع وایبل تعدیل‌یافته[۲۱] (لای و همکاران، ۲۰۰۳) و تعمیم وایبل تعدیل‌یافته[۲۲] (کاراسکو[۲۳] و همکاران، ۲۰۰۸)، که در فصل‌های بعدی به بیان آن‌ها خواهیم پرداخت.

در این فصل، برخی تعاریف و مفاهیم اولیه که در طول این پایان‌نامه مورد استفاده قرار می‌گیرند را بیان

[۶] Additive Weibull model
[۷] Xie
[۸] Modified Weibull extention
[۹] Jiang
[۱۰] Ageing
[۱۱] Bucar
[۱۲] Finite Weibull mixture
[۱۳] Pham and Lai
[۱۴] Bebbington
[۱۵] Flexible Weibull distribution
[۱۶] Increasing failure rate
[۱۷] Increasing failure rate average
[۱۸] Modified bathtub
[۱۹] Generalized or exponentiated Weibull distribution
[۲۰] Mudholkar
[۲۱] Modified Weibull distribution
[۲۲] Generalized modified Weibull distribution
[۲۳] Carrasco

کرده و برخی از قضایای مورد نیاز را نیز مطرح خواهیم کرد.

۲.۱ نرخ شکست و اشکال مختلف آن

تعریف ۱.۲.۱. قابلیت اطمینان[۲۴]

فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع توزیع $F(\cdot)$ است. قابلیت اطمینان X را با $R(\cdot)$ نشان داده و عبارت است از احتمال آن‌که X بتواند در طول عمر تعیین‌شده‌اش، تحت شرایط محیطی از قبل مشخص‌شده، اهداف تعیین‌شده از ساخت خود را تامین نماید و در زمان t به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$R(t) = ۱ - F(t).$$

از آنجایی‌که قطعات مختلف یک کالا، در زمان‌های مختلف و به‌صورت ظاهرا تصادفی خراب می‌شوند، قابلیت اطمینان کمیتی احتمالی است. با پیچیده‌تر شدن محصولات (سیستم) احتمال خرابی آن‌ها نیز افزایش می‌یابد. چگونگی قرار دادن قطعات در محصول بر قابلیت اطمینان کل سیستم تاثیر می‌گذارد. قطعات را می‌توان به‌صورت سری، موازی یا ترکیبی از این دو در سیستم قرار داد. قابلیت اطمینان برای سیستم‌های مختلف به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

- **سیستم سری:**
وقتی قطعات به‌صورت سری چیده می‌شوند، قابلیت اطمینان کل سیستم به‌صورت حاصل‌ضرب قابلیت اطمینان تک تک قطعات است. اگر قابلیت اطمینان سیستم i را، مثلا برای $(i = ۱, ۲, ۳)$، با R_i نشان داده و قابلیت اطمینان ترکیب آن‌ها را با R_s، آنگاه،
$$R_s = (R_۱)(R_۲)(R_۳).$$
در این حالت با اضافه کردن قطعات بیشتر قابلیت اطمینان کل سیستم کاهش می‌یابد و همیشه کوچکتر از کمترین قابلیت اطمینان قطعات می‌باشد. قابل ذکر است در حالت سری از کار افتادن یک قطعه باعث از کار افتادن کل سیستم می‌شود.

- **سیستم موازی:**
در حالتی که قطعات به‌صورت موازی چیده می‌شوند، وقتی قطعه‌ای خراب شد، سیستم با استفاده از قطعه دیگری که به‌صورت موازی با قطعه خراب چیده شده، به کار خود ادامه می‌دهد. در این صورت قابلیت اطمینان سیستم به‌صورت زیر محاسبه می‌شود
$$R_s = ۱ - (۱ - R_۱)(۱ - R_۲).$$
با افزایش تعداد قطعات موازی، قابلیت اطمینان کل سیستم افزایش می‌یابد. قابلیت اطمینان سیستمی که قطعات آن به‌صورت موازی چیده شده‌اند، از ماکسیمم قابلیت اطمینان تک تک

[۲۴] Reliability

قطعات بیشتر است. قطعات در بیشتر سیستم‌های پیچیده به‌صورت ترکیب سری و موازی قرار می‌گیرند.

تعریف ۲.۲.۱. نرخ شکست

فرض کنید متغیر تصادفی X دارای تابع توزیع $F(\cdot)$ است. نرخ شکست متغیر تصادفی X را با $h(.)$ نشان داده و عبارت است از احتمال خرابی محصول X در فاصله زمانی یا یک دوره مشخص، و در زمان t به‌صورت زیر محاسبه می‌شود

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)},$$

که $f(t)$ بیانگر تابع چگالی احتمال و $R(t)$ بیانگر تابع قابلیت اطمینان می‌باشد.

تعریف ۳.۲.۱. شکل تابع نرخ شکست

فرض کنید تابع نرخ شکست $h(t)$، یک تابع حقیقی‌مقدار مشتق‌پذیر به‌صورت $h(t) : R^+ \to R^+$ با مشتق اول به‌صورت $h'(t) = \frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}$ باشد. آنگاه $h(t)$:

۱. اکیدا صعودی است و با IFR نشان داده می‌شود، اگر به ازای تمام tها، $h'(t) > ۰$.

۲. اکیدا نزولی است و با DFR نشان داده می‌شود، اگر به ازای تمام tها، $h'(t) < ۰$.

۳. سهمی شکل است و با BT نشان داده می‌شود، اگر برای $t \in (۰, t_۰)$، $h'(t) < ۰$، $h'(t_۰) = ۰$ و برای $t > t_۰$، $h'(t) > ۰$.

۴. به شکل سهمی وارونه است و با UBT نشان داده می‌شود، اگر برای $t \in (۰, t_۰)$، $h'(t) > ۰$، $h'(t_۰) = ۰$ و برای $t > t_۰$، $h'(t) < ۰$.

۵. شکل سهمی تعدیل‌یافته است و با MBT نشان داده می‌شود، اگر $h(t)$ ابتدا صعودی و سپس سهمی شکل باشد.

۶. نوسانی غلتکی شکل[۲۵] است، اگر n نقطه تغییر[۲۶] متوالی $۰ < t_۱ < t_۲ < \cdots < t_n < \infty$ را داشته باشیم به‌طوری‌که در هر بازه $[t_{j-۱}, t_j]$، برای $۱ \leq j \leq n+۱$، $t_۰ = ۰$، $t_{n+۱} = \infty$، $h(t)$ اکیدا یکنوا باشد و یکنوایی مخالف در دو بازه مجاور داشته باشد. جهت بررسی بیشتر اساس فیزیکی تابع نرخ شکست غلتکی شکل، به ونگ[۲۷] (۱۹۸۸، ۱۹۸۹، ۱۹۹۱) مراجعه شود.

نکته ۴.۲.۱. منظور از نقطه تغییر در تعریف ؟؟، نقطه‌ای است که مشتق تابع نرخ شکست $h(t)$، تغییر علامت می‌دهد.

نکته ۵.۲.۱. برخی از افراد در تعریف تابع نرخ شکست BT و UBT، تابع نرخ شکست $h(t)$ را در بازه میانی برابر با یک مقدار ثابت بیان می‌کنند.

[۲۵] Roller-coster shaped

[۲۶] Change point

[۲۷] Wong

۱.۲.۱ تعیین شکل تابع نرخ شکست با استفاده از قضیه گلاسر

بسیاری از توابع نرخ شکست به‌دلیل وجود انتگرال در مخرج آن، شکل پیچیده‌ای دارند. در نتیجه تعیین شکل تابع نرخ شکست، به‌طور مستقیم، امکان‌پذیر نمی‌باشد. از این رو گلاسر[۲۸] در سال ۱۹۸۰ روشی برای تعیین شکل تابع نرخ شکست بیان کرد. وی در این روش از تابع چگالی به‌جای نرخ شکست استفاده کرد که به‌صورت قضیه‌ای در ادامه بیان می‌شود.

ابتدا، فرض کنید که تابع چگالی زمان شکست روی بازه $(0,\infty)$ مثبت باشد، یعنی، به ازای $t>0$، $f(t)>0$ و $\int_0^\infty f(t)\mathrm{d}t=1$. همچنین فرض کنید $f(t)$ روی بازه $(0,\infty)$ پیوسته و دو بار مشتق‌پذیر باشد. تابع $g(t)$، یعنی معکوس نرخ شکست، به‌صورت زیر است

$$g(t)=\frac{1}{h(t)}=\frac{R(t)}{f(t)}. \tag{۱.۱}$$

بنابراین $g(t)$ روی بازه $(0,\infty)$ مثبت و دو بار مشتق‌پذیر است. در حقیقت، داریم

$$g'(t)=g(t)\eta(t)-1, \tag{۲.۱}$$

که در آن

$$\eta(t)=-\frac{f'(t)}{f(t)}. \tag{۳.۱}$$

صورت دیگر نمایش $g'(t)$ در اثبات قضیه مفید خواهد بود. بنابراین با توجه به (؟؟) و (؟؟)، داریم

$$\begin{aligned}g'(t)&=\int_t^\infty\frac{f(y)}{f(t)}\eta(t)\mathrm{d}y-1\\&=\int_t^\infty\frac{f(y)}{f(t)}[\eta(t)-\eta(y)]\mathrm{d}y\\&\quad+\int_t^\infty\frac{f(y)}{f(t)}\eta(y)\mathrm{d}y-1,\end{aligned}$$

هم‌چنین

$$\int_t^\infty\frac{f(y)}{f(t)}\eta(y)\mathrm{d}y=-\int_t^\infty f'(y)\frac{\mathrm{d}y}{f(t)}$$

و

$$\begin{aligned}\int_t^\infty f'(y)\mathrm{d}y=\int_0^\infty f'(w+t)\mathrm{d}w&=(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\int_0^\infty f(w+t)\mathrm{d}w\\&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_t^\infty f(y)\mathrm{d}y\\&=-f(t).\end{aligned}$$

در نتیجه،

$$g'(t)=\int_t^\infty\frac{f(y)}{f(t)}[\eta(t)-\eta(y)]\mathrm{d}y. \tag{۴.۱}$$

حال با توجه به موارد اشاره‌شده در بالا، قضیه ای که پیش‌تر به آن اشاره شد را بیان می‌داریم.

[۲۸] Glaser

قضیه ۶.۲.۱. الف) اگر به ازای همه $t > \circ$، $\eta'(t) > \circ$ باشد، آنگاه تابع نرخ شکست صعودی (IFR) است.

ب) اگر به ازای همه $t > \circ$، $\eta'(t) < \circ$ باشد، آنگاه تابع نرخ شکست نزولی (DFR) است.

پ) فرض می‌کنیم $t_\circ > \circ$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\forall t \in (\circ, t_\circ) \quad \eta'(t) < \circ, \quad \eta'(t_\circ) = \circ, \quad \forall t > t_\circ \quad \eta'(t) > \circ. \qquad (۵.۱)$$

۱) اگر $y_\circ > \circ$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $g'(y_\circ) = \circ$، آنگاه BT شکل است.

۲) اگر $y_\circ > \circ$ وجود نداشته باشد به‌طوری‌که $g'(y_\circ) = \circ$، آنگاه IFR است.

ت) فرض می‌کنیم $t_\circ > \circ$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\forall t \in (\circ, t_\circ) \quad \eta'(t) > \circ, \quad \eta'(t_\circ) = \circ, \quad \forall t > t_\circ \quad \eta'(t) < \circ. \qquad (۶.۱)$$

۱) اگر $y_\circ > \circ$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $g'(y_\circ) = \circ$، آنگاه UBT شکل است.

۲) اگر $y_\circ > \circ$ وجود نداشته باشد به‌طوری‌که $g'(y_\circ) = \circ$، آنگاه DFR است.

برهان. الف) با فرض $\eta'(t) > \circ$ به ازای $t > \circ$ و با توجه به رابطه (؟؟)، نتیجه می‌شود به ازای تمام $t > \circ$ داریم $g'(t) < \circ$. پس با توجه به رابطه (؟؟)، تابع نرخ شکست صعودی (IFR) است.

ب) با فرض‌های موجود و با توجه به رابطه (؟؟) و (؟؟) نزولی بودن تابع $h(t)$ نتیجه می‌شود.

پ) فرض می‌کنیم $t_\circ$ نقطه تغییر باشد.

۱) چنین ادعا می‌کنیم که $g''(y_\circ) > \circ$. طبق فرض داریم $g'(y_\circ) = \circ$. با توجه به (؟؟)

$$g''(t) = g'(t)\eta(t) + \eta'(t)g(t).$$

بنابراین $g''(y_\circ) = g(y_\circ)\eta'(y_\circ)$. در نتیجه از آنجاکه $g(t)$ روی بازه $(\circ, \infty)$ مثبت می‌باشد، آنگاه با توجه به فرض قضیه

$g''(y_\circ) < \circ$ اگر و تنها اگر $\eta'(y_\circ) < \circ$

و

$\eta'(y_\circ) < \circ$ اگر و تنها اگر $y_\circ < t_\circ$.

فرض می‌کنیم $y_\circ \geq t_\circ$. آنگاه با در نظر گرفتن رابطه (؟؟) و (؟؟) واضح است که به ازای همه $t \geq t_\circ$، $g'(t) < \circ$. بنابراین با فرض $g'(y_\circ) = \circ$ تناقض دارد. از این‌رو $y_\circ < t_\circ$ و $g''(y_\circ) < \circ$. با توجه به فرضیات واضح است که روی بازه $(\circ, \infty)$، تنها یک ریشه برای $g'(y) = \circ$ به‌نام $y = y_\circ$ داریم که g در این نقطه دارای ماکسیمم می‌باشد. درنتیجه $h(t)$ سهمی شکل در $t_\circ = y_\circ$، می‌باشد.