دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

ارزش‌گذاری اختیار معامله‌های آمریکایی با استفاده از فرآیندهای $GARCH$

پایان نامه کارشناسی ارشد (آمارریاضی)

نعیمه موحدی نیا

استاد راهنما

دکترامیر نادری

۱۳۹۰

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد (آمارریاضی)خانم نعیمه موحدی نیا

تحت عنوان

ارزش‌گذاری اختیار معامله‌های آمریکایی با استفاده از فرآیندهای $GARCH$

در تاریخ ۱۳۹۰/۳/۷ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱ — استاد راهنمای پایان‌نامه	دکترامیر نادری
۲— استاد مشاور پایان‌نامه	
۳— استاد داور ۱	دکتر افشین پرورده (دانشگاه اصفهان)
۴— استاد داور ۲	دکتر سروش علیمرادی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده دکتر اعظم اعتماد

فهرست مطالب

چکیده:

این پایانامه مدل ارزش‌گذاری برای اختیارمعاملات روی دارایی بنیادینی که بهره مرکب پیوسته آن از فرآیند اتورگرسیو شرطی تلاطم تعمیم یافته (GARCH) پیروی می‌کند را درنظر می‌گیرد.برای بدست آوردن برآوردی با دقت بیشتر لازم است شرایط مسئله به‌گونه‌ای درنظر گرفته شود که بیشترین انطباق را با بازارهای واقعی داشته باشد، لذا یک بسط از مدل بلک شولز را که در آن فرآیند تلاطم به صورت متغیر در زمان است، را مورد توجه قرار می‌دهیم.

با بررسی مدل‌های $(GARCH)$ و شاخص‌های مشابه آن به معرفی یک تکنیک جدید شبیه سازی برای ارزش‌گذاری اختیارمعامله آمریکایی می‌پردازیم. در این روش با استفاده از شبیه‌سازی مونت‌کارلو مسرهایی را در قالب فرآیند $(GARCH)$ تولید می‌کنیم و سپس با استفاده از روش رگرسیون کمترین مربعات معمولی در هر زمان مقدار ارزش اختیارمعامله آمریکایی را برای نگهداری اختیار اختیارمعامله توسط دارنده‌ی آن تخمین می‌زنیم و بدین ترتیب ارزش اختیار معامله آمریکایی را در زمان شروع قرارداد برآورد می‌کنیم.

رده‌بندی موضوعی: ۲۶A۵۱.

کلمات کلیدی: اختیارمعامله آمریکایی ، شبیه‌سازی مونت‌کارلو، مدل‌های $(GARCH)$،روش LSM.

فصل ۱

مقدمه

۱—۱ تاریخچه

مشتقات مالی برای اولین بار در سال ۱۹۷۳ روی ۱۶ دارایی پایه موردمعامله قرارگرفتند. یک مشتق مالی قراردادی بین دو طرف A و B است که تحت آن یک دارایی پایه در یک زمان مشخص با قیمت توافقی K مورد معامله قرار می‌گیرد. چنین قراردادهایی از این جهت مشتق مالی می‌نامند که ارزش آن از طریق دارایی دیگر به نام دارایی پایه کسب می‌شود. اولین دسته از این مشتقات مالی اختیارمعاملات خرید بودند و بعد از آن در سال ۱۹۷۷ اختیار معاملات فروش نیزمورد معامله قرارگرفتند.
یک اختیارمعامله قراردادی است که به دارنده‌ی آن این اختیار و نه اجبار را می‌دهد تا یک دارایی پایه را در زمان مشخص در آینده با قیمت توافقی K بخرد یا بفروشد. از زمان پیدایش این نوع قراردادها تعیین ارزش آنها همواره مورد توجه صادر کنندگان و معامله‌گران آن بوده است. مشهورترین مدلی که تا کنون برای ارزش‌گذاری مشتقات مالی و بویژه‌اختیار معاملات ادامه داده شده است مدل بلک ـشولزـمرتون [۵] که در سال۱۹۷۳ ارایه‌شد و باعث شد که در سال ۱۹۷۷ جایزه نوبل در اقتصاد به شولز و مرتون تعلق گیرد. با وجود این، این مدل همواره مورد انتقاد قرار گرفته است، زیرا فرضی که مدل بر اساس آن ساخته شده است این است که بازدهی دارایی پایه موضوع قرارداد دارای توزیع لگ — نرمال است. حال آنکه این فرض نمی تواند به خوبی ویژگی‌های توزیع بازدهی دارایی پایه را نشان‌دهد. در جهت برازش مدل‌هایی برای توزیع بازدهی دارایی در سال ۱۹۸۲ انگل [۷] فرآیندهای غیرهمسان شرطی خودبازگشت $ARCH$

را پیشنهادکرد و به دنبال آن در سال ۱۹۸۶ بلرسلف فرایندهای $GARCH$ که تعمیمی از مدل‌های $ARCH$ است را پیشنهاد نمود. این مدلها که نوعی از مدل‌های سری زمانی هستند، می‌توانند به کمک آنچه در گذشته اتفاق افتاده ویژگی‌های سری زمانی مورد بحث را به خوبی توضیح دهند. امین [۱] در سال ۱۹۹۳ مدل ارزش‌گذاری موفقی را در قالب فرآیند $GARCH$ برای اختیار معامله اروپایی ارایه‌داد. در سال ۱۹۹۵ دیون [۱۴] روش متفاوتی را برای ارزش‌گذاری اختیار معاملات آمریکایی ارایه داد. این مدل در واقع بسط مدلی بود که برنان [۱۱] در سال ۱۹۷۹ برای ارزش‌گذاری اختیار معاملات ارایه داده بود. این مدل بر اساس این فرض ساخته‌شده بود که بازدهی دارایی موضوع اختیار معامله از مدل $GARCH$ تبعیت می‌کند. بعدها در سال ۱۹۹۹ دیون این مدل را تعمیم داد و شرایط ضعیف‌تری را برای ساختن مدل جایگزین نمود. ساختن مدل‌های ارزش‌گذاری اختیار معاملات اروپایی در قالب فرآیند های $GARCH$ در سال‌های ۱۹۹۶ و ۱۹۹۹ نیز به ترتیب توسط بلرسلف و مایکلسن دنبال شد. مهمترین مشکلی که در ارتباط با مدل‌های ارزش‌گذاری در قالب فرایندهای $GARCH$ وجود داشت این بود که هیچ فرمول تحلیلی به طور صریح برای آنها ارایه نشده‌بود و تنها در یک حالت خاص در سال ۲۰۰۰ هستون و ناندی [۲۰] توانستند فرم صریحی را ارایه‌دهند. از آنجا که اکثر اختیار معاملاتی که در بازار مورد معامله قرار می‌گیرد از نوع آمریکایی هستند و این نوع قراردادها به علت پیچیدگی ذاتی‌شان مساله‌ی ارزش‌گذاری را دشوار می‌کنند. همواره روشهای عددی برای ارزش‌گذاری این نوع قراردادها مورد استفاده قرار گرفته شده‌است و یکی از مشهورترین روش های عددی برای ارزش‌گذاری اختیار معاملات و به‌ویژه اختیار معاملات آمریکایی روش باکس— راس— رابین استون می‌باشد که در سال ۱۹۷۹ ارایه شد. هرچند که این روش اجرای زودرس اختیارمعامله را در نظرمی‌گیرد ولی از نظر محاسباتی به دلیل حجم بالای محاسبات همواره مورد استفاده قرار گرفته است. در سال ۲۰۰۱ لنگ‌استف و شوارتز [۲۳] ارزش‌گذاری اختیار معاملات آمریکایی را با استفاده از شبیه سازی برای استفاده از مدل‌های $GARCH$ انجام دادند. شبیه‌سازی برای اختیار معاملات اروپایی قبل از معرفی مدل دوجمله‌ای در سال ۱۹۷۷ توسط بویل معرفی شده بود. در این پایان‌نامه هدف ما معرفی شاخص‌های مدل $GARCH$ و بیان ویژگی آنها برای بکارگیری در ارزش‌گذاری اختیار معاملات است. در این راستا، این پایان‌نامه به شرحی که در بخش بعد آمده است تهیه و تنظیم شده است .

اگرچه روش‌های شبیه سازی برای استفاده از مدلهای $GARCH$ یکی از بهترین انتخابها هستند، پیشنهادات دیگری توسط سیمنتو و دیون [۱۶] برای ارزش‌گذاری اختیار داده شده است .

۱—۲ مروری بر فصل‌ها

همانطورکه در بخش ۱—۱ مشاهده کردیم در فصل اول این پایان‌نامه به تاریخچه‌ای از موضوع پایان نامه پرداخته‌ایم. در فصل دوم مقدمات لازم در خصوص معرفی انتگرالهای تصادفی را ارایه می دهیم. و در ادامه با بیان شاخص‌های $GARCH$ و ویژگی‌های آن، علت به‌کارگیری مدل‌های ارزش‌گذاری در قالب $GARCH$ را توضیح می‌دهیم. سپس در فصل چهارم و پنجم با ارایه چند قضیه و تعریف اساسی مدل‌سازی اختیار معاملات را توضیح می دهیم. در فصل ششم نحوه‌ی انجام شبیه‌سازی و الگوریتم مربوط به اختیار معامله را با جزییات آن بیان می‌کنیم. در فصل هفتم نتایج عملی حاصل از اجرای الگوریتم را ارایه داده در خصوص نتایج به دست آمده و انطباق آنها با داده‌های تجربی به بحث می‌پردازیم. در نهایت با ارایه‌ی پیشنهادهای خود مطالب مربوط به پایان‌نامه را تمام می‌کنیم. این پایان‌نامه شامل یک ضمیمه نیز می‌باشد که در آن اثبات چند قضیه و برنامه‌های کامپیوتری مربوط به شبیه‌سازی های مطرح شده در پایان‌نامه آورده شده است.

فصل ۲

پیش نیازها

۲—۱ مقدمه

در این فصل ابتدا به ارایه تعریفی از اختیار معامله می‌پردازیم و سپس به یادآوری بعضی از تعاریف، نمادها، و قضایای مرتبط با اختیار معاملات در حالتیکه حرکات ارزش بورس به صورت پیوسته در نظر گرفته می شود، می‌پردازیم.

تعریف ۱.۲ اختیار معاملات قراردادهای قابل معامله‌ای هستند که به دارنده آن این اختیار و نه الزام را می‌دهند که یک دارایی را در زمان مشخص T و با قیمت از پیش تعیین شده K بخرد یا بفروشد، و از این لحاظ به دو دسته، اختیار معاملات فروش که به دارندگان حق فروش یک دارایی معین را در زمان معین و با قیمت معین می‌دهد و اختیار معاملات خرید که به دارنده حق خرید یک دارایی معین را در زمان معین و با قیمت معین می‌دهد، تقسیم می‌شوند.

اختیار معاملات از لحاظ زمان اجرا در حالت‌کلی به دو دسته اختیار معاملات آمریکایی، که در آن دارنده‌ی اختیار می‌تواند آن را در هر زمان قبل از زمان سررسید به اجرابگذارد و اختیار معاملات اروپایی که دارنده تنها در زمان انقضای قرارداد می‌تواند آن را به‌اجرا بگذارد.

تعریف ۲.۲ بازده عبارت‌استاز کل عایدی که سرمایه‌گذار در طول یک دوره از سرمایه‌گذاری خود به‌دست‌می آورد. اگر X_t نشان‌دهنده‌ی قیمت دارایی در زمان t باشد، بازده مرکب پیوسته یک‌دوره‌ای

برابراست با

$$R_t = ln(\frac{X_{t+1}}{X_t}).$$

بالاخره، اگر g یک تابع یک متغیره‌ی حقیقی باشد، آنگاه امید $g(X)$، که با نماد $\mathbb{E}[g(X)]$ نمایش داده می‌شود، به شکل

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{\Omega} g(X(\omega))dP(\omega)$$

تعریف می شود.

تعریف ۳.۲ گیریم $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک فضای احتمال است و $T \subseteq \mathbb{R}$. یک فرآیند تصادفی روی این فضا خانواده‌ای است چون $\mathbb{X} = \{X_t\}_{t\in T}$ که در آن هر X_t یک متغیر تصادفی روی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ است.

در کاربردها، معمولاً T را فواصلی مثل $[a, b]$، $[a, b)$، یا $[a, \infty)$، که در آنها $a < b$، در نظر می گیرند.

۲—۲ حرکت براونی

حرکت براونی نقش اساسی در نظریه احتمال، نظریه فرآیندهای تصادفی، فیزیک، علوم مالی و غیره دارد. با وجود این، مطالب این بخش را تنها به آن دسته از خواص این حرکت محدود می کنیم که در بخش های بعد به آنها نیاز پیدا می‌شود.

تعریف ۴.۲ فرض‌کنید $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک فضای احتمال است و $T = [0, +\infty)$. فرآیند تصادفی $B = \{B_t\}_{t\in T}$ را حرکت براونی (استاندارد) می‌نامند هرگاه شرایط زیر در مورد آن بر قرار باشد:

- این حرکت از صفر شروع شود، یعنی $B_0 = 0$.
- نموهای آن ایستا و مستقل از یکدیگر باشند، یعنی

$$B_t - B_s \overset{\mathrm{d}}{=} B_{t+h} - B_{s+h},$$

برای هر $s,t \in T$، وهر $h \in \mathbb{R}$ به طوریکه $t+h, s+h \in T$، و اینکه برای هر انتخاب $\{t_i\}_{i=1}^{n}$ از T با $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ و $n \geq 1$، متغیرهای تصادفی

$$B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_3} - B_{t_2}, \cdots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$$

مستقل از یکدیگر باشند.

- برای هر $t > 0$، B_t دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس t است، یعنی $B_t \sim N(0,t)$.
- برای هر $\omega \in \Omega$، $B_t(\omega)$ در سرتاسر T پیوسته است.

از حرکت براونی فرآیندهای دیگری ساخته می شوند که هر کدام علاوه بر کاربردهای وسیعی که در نظریه‌ی فرآیندهای تصادفی دارند، در مدل‌سازی‌های مشتقات مالی نیز مورد استفاده قرار می گیرند. از جمله ی این فرآیندها می توان به دو فرآیندی که ذیلاً معرفی می‌شوند اشاره نمود.

۱.(**حرکت براونی توأم با رانش**) گیریم $B = \{B_t\}_{t\in T}$ یک حرکت براونی استاندارد است. در این صورت فرآیند X_t با تعریف

$$X_t = \mu t + \sigma B_t, \qquad t \geq 0,$$

که در آن $\mu \in \mathbb{R}$ و $\sigma \in \mathbb{R}^+$ ثابت هستند، را حرکت براونی توأم با رانش می‌نامند.

۲.(**حرکت براونی هندسی**) گیریم $B = \{B_t\}_{t\in T}$ یک حرکت براونی استاندارد است. در این صورت فرآیند X_t با تعریف

$$X_t = e^{\mu t + \sigma B_t}, \qquad t \geq 0,$$

که در آن $\mu \in \mathbb{R}$ و $\sigma \in \mathbb{R}^+$ ثابت هستند، را حرکت براونی هندسی می‌نامند.

حرکت براونی هندسی در ساختن مدل **بلک ـشولز**، که مدلی برای ارزش گذاری اختیار معامله در حالت پیوسته است، نقش اساسی را داراست. با استفاده از خواص تابع e^{-x^2} و به کمک تعریف انتگرالهای نامتناهی می‌توان تحقیق کرد که

$$\mu_X(t) = e^{(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)t}, \qquad t \geq 0, \tag{۲}$$

و

$$c_X(t,s) = e^{(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)(t+s)}\Big(e^{\sigma^2 s} - 1\Big), \qquad t,s \geq 0, \tag{۳}$$

به ویژه ،

$$\sigma_X^2(t) = e^{(2\mu+\sigma^2)t}\Big(e^{\sigma^2 t} - 1\Big), \qquad t \geq 0, \tag{۴}$$

که درآن $\mu_X(t)$ میانگین حرکت براونی و $c_X(t,s)$ تابع مولد گشتاور فرآیند است.

تعریف ۵.۲ فرض کنید $Y = \{Y_t\}_{t\in T}$ یک فرآیند تصادفی است. در این صورت σ−جبر $\sigma(Y)$ کوچکترین σ−جبری است که مجموعه هایی به شکل

$$A_S = \{\omega \in \Omega \ : \ (Y_t(\omega), t \in T) \in S\},$$

که در آن S هر مجموعه‌ی مناسبی از توابع به روی T است، را در بر دارد.

برای آنکه تعریف فوق تا اندازه ای درک شود به مثال زیر توجه کنید.

گیریم $B = \{B_s | s \leq t\}$ یک حرکت براونی روی $[0,t]$ است. در این صورت $\mathcal{F}_t = \sigma(B) = \sigma(\{B_s | s \leq t\})$ کوچکترین σ−جبری است که حاوی اطلاعات اصلی در مورد ساختار فرآیند B است. می‌توان نشان داد که این σ−جبر توسط مجموعه‌هایی به شکل

$$A_{t_1,\dots,t_n}(\mathcal{B}) = \{\omega \in \Omega \ : \ (B_{t_1}(\omega), B_{t_2}(\omega), \cdots, B_{t_n}(\omega)) \in \mathcal{B}\}$$

که درآن $\mathcal{B}$ هر زیر مجموعه‌ی برلی از $\mathbb{R}^n$ است، بوجود می آید.

۲−۳ امید شرطی

مفهوم امید شرطی یکی از مهمترین مفاهیمی است که در درک موضوعاتی چون مارتینگلها و انتگرالهای تصادفی نقشی اساسی دارد. قبل از هر چیز، به تعریف زیر توجه کنید.

تعریف ۶.۲ یک متغیر تصادفی مثل Z را امید به شرط معلوم بودن σ−جبر $\mathcal{F}$ می‌نامند هرگاه

- Z بیش از آنچه که در درون $\mathcal{F}$ وجود دارد دارای اطلاعات نباشد، یعنی $\sigma(Z) \subset \mathcal{F}$، و
- Z در شرط

$$E(XI_A) = E(ZI_A) \qquad \forall A \in \mathcal{F}, \tag{۵}$$

صدق کند.

متغیر تصادفی Z را امید X به شرط $\mathcal{F}$ می‌نامند و آنرا با $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ نمایش می‌دهند.

در حالاتی که Y یک متغیر تصادفی، یا یک بردار تصادفی، یا یک فرآیند تصادفی است، منظور از $\mathbb{E}[X|Y]$ امید شرطی $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ است، که در آن $\mathcal{F} = \sigma(Y)$. به عبارت دیگر $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) = \mathbb{E}[X|\sigma(Y)]$.

امید شرطی دارای خواصی است که به کمک آنها می‌توان محاسبات مربوط به آن را ساده‌تر نمود. در اینجا آشنایی با این خواص را دانسته شده فرض می‌کنیم.

مثال ۷.۲ گیریم $B = \{B_t|T \geq ۰\}$ حرکت براونی است و $\mathcal{F}_s = \sigma(\{B_t|t \leq s\})$.
اگر $t \geq s$، آنگاه $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$، و در نتیجه

$$\mathbb{E}[B_t|\mathcal{F}_s] = B_t.$$

حال فرض کنید $s < t$. در این صورت

$$\mathbb{E}[B_t|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(B_t - B_s) + B_s|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(B_t - B_s)|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[B_s|\mathcal{F}_s].$$

چون $B_t - B_s$ مستقل از $\mathcal{F}_s$ است، پس

$$\mathbb{E}[(B_t - B_s) + |\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[B_t - B_s] = ۰.$$

به علاوه، $\sigma(B_s) \subset \sigma((\{B_x|\ x \leq s\}) = \mathcal{F}_s$. بنابراین، $\mathbb{E}[B_t|\mathcal{F}_s] = B_s$ و در نتیجه

$$\mathbb{E}[B_t|\mathcal{F}_s] = B_{\min\{s,t\}}.$$

مثال ۸.۲ در اینجا نیز فرض کنید $B = \{B_t|t \geq ۰\}$ حرکت براونی است و $\mathcal{F}_s = \sigma(\{B_t|t \leq s\})$. برای فرآیند تصادفی $X_t = B_t^۲ - t$، $t \geq ۰$، داریم که اگر $t \geq s$، آنگاه $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$، و در نتیجه

$$\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_t.$$

حال فرض کنید $s < t$. در این صورت

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}[(B_t - B_s)^۲ + B_s^۲ + ۲B_s(B_t - B_s) - t|\mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[(B_t - B_s)^۲|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[B_s^۲|\mathcal{F}_s] + ۲\mathbb{E}[B_s(B_t - B_s)|\mathcal{F}_s] - t.\end{aligned}$$

حال چون $B_t - B_s$ و $(B_t - B_s)^۲$ مستقل از $\mathcal{F}_s$ می‌باشند و چون $\sigma(B_s^۲) \subset \sigma(B_s) \subset \mathcal{F}_s$، پس

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] &= (B_t - B_s)^۲ + B_s^۲ + ۲B_s\mathbb{E}[B_t - B_s] - t \\ &= (t - s) + B_s^۲ + ۰ - t = X_s.\end{aligned}$$

بنابراین،

$$\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_{\min\{s,t\}}.$$

۲−۴ مارتینگلها

دانستن مفهوم مارتینگل در درک انتگرال تصادفی ایتو اساسی است. در حقیقت انتگرالهای تصادفی ایتو به گونه‌ای ساخته می‌شوند که در نهایت به یک مارتینگل تبدیل شوند.

تعریف ۹.۲ گیریم $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک فضای احتمال است و $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq \circ}$ خانواده از $\sigma-$جبرهایی است که همگی در $\mathcal{F}$ قرار دارند. در این صورت $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq \circ}$ را یک پالایش برای $\mathcal{F}$ گویند هرگاه

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \qquad \forall \circ \leq s \leq t.$$

در حقیقت هرپالایش زنجیره‌ای صعودی از اطلاعات است. هرگاه $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\{\circ,۱,۲,\dots\}}$ دنباله‌ای صعودی از $\sigma-$جبرهای روی Ω باشد، آنگاه این دنباله را نیز یک پالایش می‌نامند.

تعریف ۱۰.۲ گیریم $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک فضای احتمال، $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq \circ}$ یک پالایش برای این فضا، و $Y = \{Y_t\}_{t\geq \circ}$ یک فرآیند تصادفی روی این فضا است. در این صورت فرآیند Y را نسبت به پالایش $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq \circ}$ سازگار گویند، هرگاه

$$\sigma(Y_t) \subset \mathcal{F}_t \qquad \forall t \geq \circ.$$

هر فرآیند تصادفی مثل $Y = \{Y_t\}_{t\geq \circ}$ همواره نسبت به‌پالایش طبیعی تولید شده توسط Y یعنی

$$\mathcal{F}_t = \sigma(Y_s, s \leq T),$$

سازگار است.

در حقیقت معنای سازگاری با پالایش $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq \circ}$ این است که Y_t ها بیش از آنچه که در $\mathcal{F}_t$ است حاوی اطلاعات نیستند.

مثال ۱۱.۲ گیریم $\{B_t\}_{t\geq \circ}$ یک حرکت براونی و $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq \circ}$ فیلتراسیون طبیعی مربوط به آن است. در این صورت، کلیه فرآیندهای تصادفی به شکل

$$X_t = f(t, B_t), \qquad t \geq \circ,$$

که در آن f تابعی دو متغیره است، نسبت به پالایش $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq \circ}$ سازگار هستند. به عنوان مثال، فرآیندهای

$$X_t = B_t, \quad Y_t = B_t^۲, \quad Z_t = B_t^۲ - t, \quad U_t = B_t^۳, \quad V_t = \max_{\circ\leq s\leq t} B_s, \quad W_t = \min_{\circ\leq s\leq t} B_s,$$

همگی نسبت به پالایش $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ سازگار هستند.

از فرآیندهایی که نسبت به پالایش $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ سازگار نیستند می‌توان به فرآیندهایی چون

$$K_t = B_{t+1}, \quad L_t = B_T - B_t, \quad M_t = B_t + B_T,$$

اشاره نمود. در حقیقت هر یک از فرآیندهای K_t، L_t، و M_t به اطلاعاتی از حرکت براونی در بعد از لحظه‌ی t نیاز دارند و بنابراین نمی‌توانند نسبت به پالایش $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ سازگار باشند.

تعریف ۱۲.۲ گیریم $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک فضای احتمال، $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ یک پالایش برای این فضا، و $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ یک فرآیند تصادفی روی این فضا است. در این صورت X را نسبت به پالایش $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ یک مارتینگل می نامند هرگاه

- برای هر $t > 0$ داشته باشیم $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$.
- نسبت به پالایش $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ سازگار باشد.
- برای هر $s, t \in \mathbb{R}$ با $0 \leq s < t$ داشته باشیم

$$\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s.$$

یعنی X_s بهترین تقریب برای X_t به شرط معلوم بودن $\mathcal{F}_s$ باشد.

۲–۵ انتگرال تصادفی ایتو

با توجه به آنچه که در بخش قبل گفته شد، در این بخش فیلتراسیون $\{\mathcal{F}_t : a \leq t \leq b\}$ و حرکت براونی $\{B_t\}_{t\in[a,b]}$ را، که در شرایط

(الف) برای هر t، B_t $\mathcal{F}_t$-اندازه پذیر است، و

(ب) برای هر $s \leq t$، متغیر تصادفی $B_t - B_s$ مستقل از σ-جبر $\mathcal{F}_s$ است،

صدق می‌کنند، انتخاب و ثابت نگه می‌داریم.

نماد ۱۳.۲ برای سهولت در بیان، از نماد $L^2_{ad}([a,b]\times\Omega)$ برای نمایش مجموعه‌ی کلیه‌ی فرآیندهای تصادفی $f(t,\omega)$، که در آنها $a \leq t \leq b$ و $\omega \in \Omega$، و در شرایط

۱) $f(t,\omega)$ نسبت به فیلتراسیون $\{\mathcal{F}_t\}$ سازگار است، و

۲) $\int_a^b \mathbb{E}\left[|f(t)|^{۲}\right] < \infty$

صدق می‌کنند استفاده می‌کنیم.

اکنون این آمادگی را داریم تا تعریف انتگرال تصادفی ایتو را طی سه مرحله ارائه دهیم. در طول این مراحل نیاز به اثبات این ادعاها یا لم‌هایی داریم که در اینجا از ارایه‌ی اثبات آنها صرفنظر کرده و صحت آنها را می‌پذیریم.

مرحله ۱. تعریف انتگرال ایتو برای فرآیندهای تصادفی پلکانی.

برای افراز $\Delta_n = \{t_\circ, t_۱, \ldots, t_n\}$ از $[a,b]$، که در آن $a = t_\circ < t_۱ < \ldots < t_n = b$، فرآیند تصادفی پلکانی f به شکل

$$f(t,\omega) = \sum_{i=۱}^{n} \mathcal{E}_{i-۱}(\omega)\chi_{[t_{i-۱},t_i)},$$

که در آن هر $\mathcal{E}_{i-۱}$ $\mathcal{F}_{t_{i-۱}}$—اندازه پذیر است و $\mathbb{E}[\mathcal{E}_{i-۱}^{۲}] < \infty$، در نظر بگیرید. برای چنین فرآیندی، انتگرال تصادفی ایتو را به صورت

$$I(f) = \sum_{i=۱}^{n} \mathcal{E}_{i-۱}\left(B_{t_i} - B_{t_{i-۱}}\right) \tag{٦}$$

تعریف می‌کنیم. ثابت می‌شود که:

لم ۱۴.۲ در مورد تعریف فوق گزاره‌های زیر صادقند:

(الف) متغیر تصادفی $I(f)$ خوش تعریف است.

(ب) برای هر دو عدد حقیقی a و b و هر دو فرآیند تصادفی پلکانی f و g داریم

$$I(af+bg) = aI(f) + bI(g).$$

(ج) $\mathbb{E}[I(f)] = \circ$.

(د)برای هر فرایند پلکانی

$$\mathbb{E}\left[|I(f)|^{۲}\right] = \int_a^b \mathbb{E}\left[|f(t)|^{۲}\right] dt. \tag{۷}$$

مرحله ۲. تقریب هر $f \in L^{۲}_{ad}([a,b] \times \Omega)$ به فرآیندهای تصادفی پلکانی.

برای تعمیم تعریف ارائه شده در مرحله‌ی ۱ به قضیه‌ی زیر که در آن شیوه‌ی تقریب زدن هر $f \in L^{۲}_{ad}([a,b] \times \Omega)$ به فرآیندهای تصادفی پلکانی ارایه می‌شود، نیاز داریم.

قضیه ۱۵.۲ گیریم $f \in L^{۲}_{ad}([a,b] \times \Omega)$. در این صورت دنباله‌ای مثل $\{f_n(t,\omega) : n \geq ۱\}$ از فرآیندهای تصادفی پلکانی در $L^{۲}_{ad}([a,b] \times \Omega)$ وجود دارد به طوریکه

$$\lim_{n\to} \int_a^b \mathbb{E}\left[|f(t) - f_n(t)|^{۲}\right] dt = ۰. \tag{۸}$$

مرحله ۳. تعریف انتگرال تصادفی ایتو در حالت کلی.

اکنون از آنچه که در مراحل ۱ و ۲ اثبات شدند استفاده می‌کنیم تا انتگرال تصادفی

$$\int_a^b f(t) dB_t, \qquad f \in L^{۲}_{ad}([a,b] \times \Omega)$$

را تعریف کنیم.

ابتدا با استفاده از قضیه‌ی قبل دنباله‌ی $\{f_n(t,\omega) : n \geq ۱\}$ از فرآیندهای تصادفی پلکانی را در $L^{۲}_{ad}([a,b] \times \Omega)$ پیدا کنید که

$$\lim_{n\to} \int_a^b \mathbb{E}\left[|f(t) - f_n(t)|^{۲}\right] dt = ۰.$$

برای هر f_n، انتگرال تصادفی $I(f_n)$ را به شیوه‌ای که در مرحله‌ی ۱ ارایه شد تعریف کنید. در این صورت بر طبق لم قبل قسمت (د) داریم

$$\mathbb{E}\left[|I(f_n) - I(f_m)|^{۲}\right] = \int_a^b \mathbb{E}\left[|f_n(t) - f_m(t)|^{۲}\right] dt.$$

پس،

$$\lim_{n,m\to\infty} \mathbb{E}\left[|I(f_n) - I(f_m)|^{۲}\right] = ۰$$

یعنی دنباله‌ی $\{I(f_n)\}$ یک دنباله‌ی کشی در $L^{۲}(\mathcal{F})$ است، و در نتیجه در $L^{۲}(\mathcal{F})$ به متغیر تصادفی $I(f)$ همگرا است.