بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی محض

گرایش نظریه‌گروه‌ها

درباره وجود pـگروه‌های متناهی غیر بدیهی که با گروه کامل خودریختی‌های خود یکریخت می‌باشند

استاد راهنما:

دکتر علیرضا عبدالهی

پژوهشگر:

نفیسه رحمانی مورچه‌خورتی

آبان ماه ۱۳۹۱

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان
دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض گرایش جبر خانم نفیسه رحمانی

تحت عنوان:

درباره وجود p-گروههای متناهی غیر بدیهی که با گروه کامل خودریختی های خود یکریخت می باشند

در تاریخ ۹۱/۸/۲۴ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه بسیار خوب به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه　دکتر علیرضا عبدالهی　با مرتبه علمی استاد　امضاء

۲- استاد داور داخل گروه　دکتر مریم خاتمی　با مرتبه علمی استادیار　امضاء

۳- استاد داور خارج گروه　دکتر بیژن طائری　با مرتبه علمی استاد　امضاء

مهر و امضای مدیر گروه ....

سپاس و قدردانی

باسپاس از پروردگار مهربان که هر آن‌چه به عنوان ارزش در وجودم قرار دارد، اوست که آن را ارزشمند نموده است و به من آموخته است که لطف هیچ‌کس را بی‌سپاس نگذارم.

ابتدا بر خود واجب می‌دانم از جناب آقای دکتر علیرضا عبدالهی، استاد راهنمای خویش، تشکر نمایم که همواره از راهنمایی‌هایشان برخوردار بوده‌ام و نیز از سرکار خانم دکتر مریم خاتمی و جناب آقای دکتر بیژن طائری که قبول زحمت نموده‌اند و داوری این پایان‌نامه را بر عهده گرفته‌اند، سپاسگزارم. هم‌چنین از تک‌تک اعضای خانواده‌ام که همواره مشوق من بوده و مرا از الطاف‌شان بی‌نصیب نگذاشته‌اند، سپاسگزارم؛ بویژه، همسر خویش، آقای دکتر سید محسن قریشی، که با حلم و بردباری مرا در پیمودن این مسیر همراهی نموده و همواره با نظراتشان، امید را در وجودم زنده نگه‌داشته‌اند. هم‌چنین از دوستان خود بویژه خانم سمیه صادقی تشکر کرده و از نهایت همراهی‌شان در طول تحصیل سپاسگزارم.

از خدای منان برای این عزیزان، آرزوی سعادتمندی و پیروزی روز افزون را خواستارم.

می‌توان با هیچ ساخت، می‌توان مهربانی را، خدا را، عشق را با لبی خندان‌تر از یک شاخه‌ی گل تفسیر کرد؛ می‌توان، این جمله را در دفتر فردا نوشت: "خوبی از هر چیز دیگر بهتر است."

نفیسه رحمانی مورچه‌خورتی

آبان‌ماه ۱۳۹۱

تقدیم به

پدر و مادرم

چکیده

یک مسأله‌ی قدیمی بیان می‌کند که: " آیا p_گروه متناهی، به جز گروه دو وجهی D_8، وجود دارد که با گروه کامل خودریختی‌هایش یکریخت باشد؟!" این پایان‌نامه به بررسی این مسأله در برخی از حالت‌های خاص از قبیل گروه‌های از رده‌ی پوچتوانی ۲، گروه‌های توانمند، گروه‌های با مرکز از مرتبه عدد اول، گروه‌های با یک زیرگروه آبلی از اندیس عدد اول، گروه‌های از رده پوچتوانی ۳ با مرکز دوری و گروه‌های با همرده حداکثر ۳ پرداخته است.

کلیدواژه‌ها:

p_گروه، خودریختی، خودریختی داخلی، خودریختی مرکزی

فهرست مطالب

نمادها و قراردادها

فرض کنید p یک عدد اول و G یک گروه متناهی باشد.

$\mathbb{N}$	مجموعه اعداد طبیعی
$\mathbb{Z}$	مجموعه اعداد صحیح
$f_{\vert A}$	تحدید تابع f به مجموعه A
$A \leqslant B$	A زیرگروه B است
$A \trianglelefteq B$	A زیرگروه نرمال B است
$A < B$	A زیرگروه سره B است
$A \lessdot B$	A زیرگروه بیشین B است
$A \cong B$	A با B یکریخت است
G/H	مجموعه همه همدست های راست H در G(وقتی که $H \lhd G$)
$\langle X \rangle$	زیرگروه تولید شده با مجموعه X
$G_1 \times \cdots \times G_n$	حاصلضرب مستقیم گروه‌های $G_1, \ldots, G_n$
$A \ltimes B$	حاصلضرب نیم مستقیم A و B
x^g	مزدوج x با g
$[x, y]$	جابجاگر x, y(یعنی $x^{-1}y^{-1}xy$)
$[x_1, \ldots, x_n]$	جابجاگر $x_1, \ldots, x_n$
$[G_1, \ldots, G_n]$	زیرگروه جابجاگر متناظر با زیرگروه‌های $G_1, \ldots, G_n$
G'	زیرگروه مشتق G
$Z(G)$	مرکز G
$C_G(x)$	مرکزساز x در G

$C_G(H)$	مجموعه‌ی $\{x \in G \mid h^x = h,\ \forall\, h \in H\}$ را نشان می‌دهد، وقتی گروه G بر H عمل می‌کند.
$C_G(H,K)$	برابر است با $C_G(H) \cap C_G(K)$.
$N_G(H)$	نرمالساز H در G
$\Phi(G)$	زیرگروه فراتینی G
$S(G)$	ستون G
$\operatorname{Aut} G$	گروه کامل خودریختی‌های G
$\operatorname{Aut}_c G$	گروه خودریختی‌های مرکزی G
$\operatorname{PAut} G$	گروه خودریختی‌های توانی G
$\operatorname{Orb}_G(x)$	مدار شامل x در G
$\operatorname{End} G$	مجموعه همه درونریختی‌های G
$\operatorname{Inn} G$	گروه خودریختی‌های داخلی G
$\operatorname{Hom}(G,A)$	مجموعه‌ی همه‌ی همریختی‌ها از G به A
$d(G)$	کوچکترین عدد طبیعی d که گروه متناهی مولد G با d عضو تولید می‌شود
$rk(G)$	رتبه G
$mk(H)$	رتبه بیشین در میان زیرگروه‌های آبلی H
$mk_G(H)$	رتبه بیشین در میان زیرگروه‌های آبلی H که در G نرمال هستند
$\|G:H\|$	اندیس H در G
$\operatorname{Im}\phi$	تصویر همریختی ϕ
$\ker\phi$	هسته همریختی ϕ
$\gamma_n(G)$	nمین جمله سری مرکزی پایینی G
$Z_n(G)$	$n+۱$مین جمله سری مرکزی بالایی G
G^n	زیرگروه $\langle g^n : g \in G\rangle$

$G[n]$	مجموعه همه $g \in G$ به طوری که $g^n = ۱$
$F(X)$	گروه آزاد بر مجموعه‌ی X
$\langle X \vert R\rangle$	نمایش گروه با مجموعه مولد X و روابط R
$G = A * B$	G حاصل‌ضرب مرکزی زیرگروه‌های A و B است
$\mathrm{Der}\,(G, A)$	مجموعه‌ی همه‌ی همریختی‌های متقاطع به Gـمدول A

پیشگفتار

بیشتر تلاش نظریه گروه‌های متناهی از نیمه دوم قرن بیستم تا به حال معطوف به گروه‌های پوچتوان و بویژه pـ‌گروه‌های متناهی و مسائل و حدس‌های برجسته در این زمینه بوده است که اگر چه به تعدادی از آن‌ها پرداخته شده است، اما هنوز حدس‌های قدیمی وجود دارند که به طور کامل پذیرفته و یا رد نشده‌اند. آنچه در این پایان‌نامه مورد نظر است، بررسی یکی از این حدس‌ها می‌باشد.

فرض کنید G یک گروه متناهی باشد. گروه کامل خودریختی‌های G را با $\operatorname{Aut} G$ نشان می‌دهیم. اگر $g \in G$، آنگاه خودریختی داخلی القاشده توسط g را با θ_g $(\theta_g : x \mapsto x^g)$ و گروه همه خودریختی‌های داخلی G را با $\operatorname{Inn} G$ نشان می‌دهیم. *برج خودریختی* G، دنباله G_i به صورت زیر می‌باشد:

$$G_1 \longrightarrow G_2 \longrightarrow G_3 \longrightarrow \cdots$$

جایی که $G_1 = G$ ، $G_{i+1} = \operatorname{Aut} G_i$ و نگاشت بین جملات دنباله θ $(\theta : g \mapsto \theta_g)$ است.

قضیه‌ای مشهور از ویلانت[1] به طور عموم این اطمینان را حاصل می‌کند که اگر G گروهی بدون مرکز باشد، آنگاه برج خودریختی G در تعدادی متناهی گام متوقف می‌شود. اما به طور خاص این شناخت درباره برج خودریختی pـ‌گروه‌ها بسیار محدود است و این مسأله قدیمی که:

" آیا جز گروه دووجهی D_8، pـ‌گروهی متناهی و غیربدیهی دیگری که با گروه کامل خودریختی‌های خود یکریخت باشد، موجود است؟ "

همچنان بدون جواب مانده است [۱۱، مسأله ۱۵.۲۹]. تحقیقات انجام شده در این راستا حالت‌های خاص را در بر می‌گیرند و هنوز گام بلندی در این زمینه برداشته نشده است.

فصل اول مشتمل بر چهار بخش می‌باشد. در سه بخش اول به بیان برخی تعاریف و قضایای مورد نیاز از نظریه گروه‌ها پرداخته‌ایم و در بخش چهارم چند نتیجه درباره خودریختی گروه‌ها بیان می‌کنیم.

[1] Wielandt

فصل دوم به تعریف همریختی‌های متقاطع و بررسی رتبه گروه همریختی‌های متقاطع اختصاص دارد.

در فصل سوم به طور عمده به هدف اصلی این پایان‌نامه پرداخته‌ایم به طوری که جواب معادله $G \cong \operatorname{Aut} G$ را در حالت‌هایی خاص، شامل pـ‌گروه‌های از رده پوچتوانی ۲، با یک زیرگروه بیشین آبلی، با مرکز دوری از مرتبه‌ی p، از همرده‌ی حداکثر ۳، با مرکز دوری و از رده‌ی پوچتوانی ۳، از مرتبه‌ی حداکثر p^7 و توانمند مورد بررسی قرار داده‌ایم. لازم به ذکر است، مرجع اصلی این فصل، مقاله [۴] می‌باشد.

اکثر نمادهای بکار رفته یا در جای خود تعریف شده‌اند و یا نمادهای متداول و آشنا هستند؛ با این وجود، تمامی نمادها در فهرستی گنجانده شده‌اند که در صورت نیاز می‌توان به آن مراجعه کرد.

فصل ۱

پیش‌نیازها

در این فصل برخی تعاریف و قضایای بنیادی مورد نیاز از نظریه گروه‌ها را بیان می‌کنیم. خواننده می‌تواند اثبات اکثر این قضایا را در کتاب‌های نظریه گروه‌ها از قبیل مراجع [۱، ۱۳] پیدا کند.

در سرتاسر این پایان‌نامه p عددی اول و G گروهی متناهی در نظر گرفته شده است.

۱.۱ مفاهیم و نتایجی بنیادی از نظریه‌ی گروه‌ها

تعریف ۱.۱. فرض کنید G یک گروه و $x \in G$ باشد، در این صورت مجموعه‌ی

$$\{g \in G \mid gx = xg\},$$

یک زیرگروه G است که *مرکزساز* x در G نامیده و آن‌را با $C_G(x)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۱. برای هر گروه دلخواه G، مرکز G را با $Z(G)$ نمایش می‌دهیم و آن‌را به صورت $Z(G) = \{g \in G \mid gx = xg, \forall x \in G\}$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۳.۱. فرض کنید G یک گروه و n عددی طبیعی باشد. در این صورت زیرگروه G^n از G را به صورت $\langle g^n : g \in G \rangle$ تعریف می‌کنیم.

لم ۴.۱. *فرض کنید که G یک گروه باشد و $K \leqslant Z(G)$. در این صورت اگر G/K دوری باشد، آن‌گاه G آبلی است.*

قضیه ۵.۱. *فرض کنید G و H دو گروه باشند و $N \lhd G$. اگر ϕ یک بروریختی از G به H باشد، آن‌گاه $\bar{\phi} : G/N \longrightarrow H/N^{\phi}$ نیز یک بروریختی است.*

قضیه ۶.۱ (قانون مدولی ددکیند)**.** *فرض کنید H, K و L زیرگروه‌هایی از گروه G باشند، به طوری‌که $K \subseteq L$ در این صورت $(HK) \cap L = (H \cap L)K$.*

تعریف ۷.۱. فرض کنید G یک گروه باشد و $x, y \in G$. **جابجاگر** x و y را با $[x, y]$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[x, y] = x^{-۱}y^{-۱}xy = x^{-۱}x^{y}$$

هم‌چنین به طور مشابه اگر $x_۱, x_۲, \ldots, x_n \in G$، آن‌گاه جابجاگر $[x_۱, x_۲, \ldots, x_n]$ را به طور بازگشتی چنین تعریف می‌کنیم:

$$[x_۱, x_۲, \ldots, x_n] = [[x_۱, x_۲, \ldots, x_{n-۱}], x_n]$$

قضیه ۸.۱ (اتحادهای جابجاگر[۱])**.** *فرض کنید $x, y, z \in G$، در این صورت اتحادهای زیر برقرارند:*

- $y^{x} = y[y, x]$؛
- $[y, x] = [x, y]^{-۱}$؛
- $[xy, z] = [x, z]^{y}[y, z]$ و $[x, yz] = [x, z][x, y]^{z}$؛
- $[x, y^{-۱}] = [y, x]^{y^{-۱}}$ و $[x^{-۱}, y] = [y, x]^{x^{-۱}}$؛

[۱] commutator identities

- *اتحاد هال ـ ویت*[۱]: $[x, y^{-1}, z]^y [y, z^{-1}, x]^z [z, x^{-1}, y]^x = 1$.

تعریف ۹.۱. فرض کنید G یک گروه و A, B زیرگروه‌هایی از آن باشند. جابجاگر A و B را با $[A, B]$ نشان می‌دهیم و آن‌را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$[A, B] = \langle [a, b] \mid a \in A, b \in B \rangle$$

هم‌چنین اگر $H_1, H_2, \ldots, H_n \leqslant G$، آن‌گاه جابجاگر $[H_1, H_2, \ldots, H_n]$ را به طور بازگشتی چنین تعریف می‌کنیم:

$$[H_1, H_2, \ldots, H_n] = [[H_1, H_2, \ldots, H_{n-1}], H_n]$$

لم ۱۰.۱. *فرض کنید $A, B \leqslant G$، که در آن G یک گروه دلخواه است. در این صورت:*

- $[A, B] = [B, A]$؛
- *اگر $A_1 \leqslant A$ و $B_1 \leqslant B$، آن‌گاه $[A_1, B_1] \leqslant [A, B]$،*
- *اگر $A \trianglelefteq G$، آن‌گاه $[A, B] \leqslant A$،*
- *اگر $H, K, L \trianglelefteq G$، آن‌گاه $[HK, L] = [H, L][K, L]$*

قضیه ۱۱.۱. *مرکز هر pـگروه متناهی غیربدیهی، غیر بدیهی است.*

برای هر گروه متناهی G، کوچک‌ترین مضرب مشترک مرتبه‌های عناصر G را *نمای* G می‌نامیم و آن‌را با $\exp(G)$ نمایش می‌دهیم.

لم ۱۲.۱. *فرض کنید A یک گروه آبلی و $B \leqslant A$ باشد، در این صورت*

$$\exp A \leq |B| \exp A/B.$$

اثبات. به ازای هر $a \in A$، در نظربگیرید $\exp A/B = m$ و $|B| = k$. از این‌که $(aB)^m = B$، داریم $a^m \in B$ و در نتیجه $a^{mk} = 1$ و چون $o(a) \leq mk$ نتیجه می‌شود $\exp A \leqslant mk$. $\square$

[۱] Hall-Witt identity

تعریف ۱۳.۱. pـ‌گروه آبلی متناهی G را *آبلی مقدماتی* گوییم، در صورتی که مرتبه‌ی هر عضو غیربدیهی G عدد اول p باشد.

قضیه ۱۴.۱. *فرض کنید G یک pـ‌گروه آبلی مقدماتی از مرتبه‌ی p^n باشد. در این صورت یک فضای برداری مانند V روی میدان $\mathbb{Z}_p$ از بعد n وجود دارد به طوری‌که $G \cong V^+$. (V^+ گروه جمعی فضای برداری V است)*

تعریف ۱۵.۱. فرض کنید G_1، ...و G_n ، n گروه باشند. بر مجموعه‌ی $G_1 \times \cdots \times G_n$ عمل دوتایی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$(g_1, g_2, \ldots, g_n)(g'_1, g'_2, \ldots, g'_n) = (g_1g'_1, g_2g'_2, \ldots, g_ng'_n)$$

که در آن به ازای هر $1 \leq i \leq n$، $g_i, g'_i \in G_i$. به آسانی ملاحظه می‌شود که مجموعه‌ی $G_1 \times \cdots \times G_n$ با عمل فوق گروه است. این گروه را *حاصل‌ضرب مستقیم (خارجی)* گروه‌های G_1، ...و G_n نامیم و آن‌را با علامت $G_1 \times \cdots \times G_n$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱۶.۱. *فرض کنید $G_1, G_2, \ldots, G_n$ گروه باشند و $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$ در این صورت G زیرگروه‌هایی مانند $H_1, H_2, \ldots, H_n$ دارد به طوری‌که به ازای هر $1 \leq i \leq n$ $H_i \cong G_i$، و*

۱. *به ازای هر $1 \leq i \leq n$، $H_i \trianglelefteq G$،*

۲. $G = H_1H_2 \ldots H_n$،

۳. *به ازای هر $1 \leq i \leq n$، $H_i \cap H_1 \ldots H_{i-1}H_{i+1} \ldots H_n = 1$؛*

به‌ویژه، G آبلی است اگر و تنها اگر هر G_i آبلی باشد.

قضیه ۱۷.۱. *فرض کنید G یک pـ‌گروه متناهی آبلی از مرتبه‌ی p^n باشد و $a \in G$. اگر مرتبه‌ی a ناکمتر از مرتبه‌ی هر عضو دیگر G باشد، آن‌گاه زیرگروه B از G موجود است به طوری‌که $G = \langle a \rangle \times B$.*

لم ۱۸.۱. *فرض کنید G یک pـ‌گروه و $A, B, C \leq G$، به طوری‌که C دوری، $A \cap B = ۱$ و $A \times B \leq G$. در این صورت یا $C \cap A = ۱$ یا $C \cap B = ۱$.*

اثبات. چون C یک pـ‌گروه دوری است، پس یا $C \cap A \leq C \cap B$ یا $C \cap B \leq C \cap A$. از طرفی $A \cap B = ۱$، لذا حکم نتیجه می‌شود. □

قضیه ۱۹.۱ (قضیه‌ی اساسی گروه‌های آبلی متناهی مولد)**.** *هر گروه آبلی با تولید متناهی با حاصل ضرب مستقیمی از گروه‌های دوری یکریخت است.*

تعریف ۲۰.۱. گروه G *حاصل‌ضرب مرکزی دو زیرگروه* H و K نامیده می‌شود، هرگاه

۱) $[H, K] = ۱$،

۲) $G = HK$،

تعریف ۲۱.۱. فرض کنید G یک گروه باشد. یک *سری نرمال* G زنجیری متناهی به صورت $۱ = G_۰ \leqslant G_۱ \leqslant \cdots \leqslant G_n = G$ است به طوری‌که برای هر $۰ \leq i \leq n$، $G_i \trianglelefteq G$.

تعریف ۲۲.۱. سری نرمال $۱ = G_۰ \leqslant G_۱ \leqslant \cdots \leqslant G_n = G$ را یک *سری مرکزی* گوییم، در صورتی که برای هر $۱ \leq i \leq n$، $G_i/G_{i-۱} \leqslant Z(G/G_{i-۱})$.

تعریف ۲۳.۱. فرض کنید G یک گروه باشد. قرار می‌دهیم $\gamma_۱(G) = G$، $Z_۰(G) = ۱$ و به ازای هر $n > ۰$، $\gamma_{n+۱}(G) = [\gamma_n(G), G]$ و $Z_n(G)/Z_{n-۱}(G) = Z(G/Z_{n-۱}(G))$. در این صورت

$$G = \gamma_۱(G) \geqslant \gamma_۲(G) \geqslant \gamma_۳(G) \geqslant \cdots \qquad (۱)$$

$$۱ = Z_۰(G) \leqslant Z_۱(G) \leqslant Z_۲(G) \leqslant \cdots \qquad (۲)$$

سری (۱) *سری مرکزی پایینی* و سری (۲) *سری مرکزی بالایی* نامیده می‌شود. جملات سری (۱) و (۲) زیرگروه‌های مشخصه G می‌باشند. $\gamma_۲(G)$ *زیرگروه مشتق* G نامیده و با G' نشان داده می‌شود. واضح است که $Z(G) = Z_۱(G)$.

تعریف ۲۴.۱. فرض کنید G یک pـگروه متناهی باشد، در این صورت $S(G)$، *ستون* G، به این گونه تعریف می‌شود. چنان‌چه $G \neq 1$ باشد، $S(G)$ را حاصل‌ضرب زیرگروه‌های نرمال کمین G و اگر $G = 1$ باشد، آن‌گاه $S(G)$ را برابر ۱ در نظر می‌گیریم. $S(G)$ در گروه G مشخصه است.

تعریف ۲۵.۱. گروه G را *پوچتوان* نامیم، در صورتی که یک سری مرکزی داشته باشد. طول کوتاه ترین سری مرکزی G را *رده‌ی پوچتوانی* G گوییم.

- هر گروه آبلی غیربدیهی یک گروه پوچتوان از رده‌ی پوچتوانی ۱ است.
- هر p-گروه متناهی پوچتوان است.

قضیه ۲۶.۱. *برای هر گروه* G:

۱. G *پوچتوان است اگر و تنها اگر به ازای عدد صحیحی چون* $r \geq 0$، $\gamma_{r+1}(G) = 1$.

۲. G *پوچتوان است اگر و تنها اگر به ازای عدد صحیحی چون* $s \geq 0$، $Z_s(G) = G$.

قضیه ۲۷.۱. *فرض کنید* G *یک* pـ*گروه متناهی و* N *یک زیرگروه نرمال غیربدیهی از* G *باشد، در این صورت* $N \cap Z(G) \neq 1$.

قضیه ۲۸.۱. *فرض کنید* G *یک* p- *گروه متناهی از مرتبه‌ی* $p^n \geq p^2$ *باشد. بنابراین*

۱. *اگر* G *از رده پوچتوانی* c *باشد، آن‌گاه* $|G : Z_{c-1}(G)| \geq p^2$،

۲. *رده پوچتوانی* G *حداکثر* $n - 1$ *می‌باشد.*

تعریف ۲۹.۱. فرض کنید G یک p-گروه از مرتبه‌ی p^n باشد که در آن $n \geq 2$. گوییم G از *همرده‌ی* c است، هرگاه رده‌ی پوچتوانی آن برابر $n - c$ باشد. گروه‌های از همرده‌ی ۱ را *گروه‌های از رده‌ی بیشین* می‌نامند.