دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

دانشکده علوم

پایان نامه کارشناسی ارشد

آمار ریاضی

موضوع:

آزمون‌های فرض در مدل‌های مخاطره‌های رقابتی

نگارش:

علی انصاری

اساتید راهنما:

دکتر سید مقتدی هاشمی پرست

دکتر سید رضا هاشمی

شهریور ماه ۹۰

اظهار نامه دانشجو

موضوع پایان‌نامه: آزمون‌های فرض در مدل‌های مخاطره‌های رقابتی

اساتید راهنما: دکتر سید مقتدی هاشمی پرست

دکتر سید رضا هاشمی

نام دانشجو: علی انصاری

شماره دانشجویی: ۸۸۰۴۰۳۴

اینجانب علی انصاری دانشجوی کارشناسی ارشد آمار ریاضی گرایش محض دانشکده علوم دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی گواهی می‌نمایم که تحقیقات ارائه شده در این پایان‌نامه توسط شخص اینجانب انجام شده و صحت و اصالت مطالب نگارش شده مورد تأیید می‌باشد و در مورد استفاده از کار دیگر محققان به مرجع مورد استفاده اشاره شده است. همچنین گواهی می‌نمایم که مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی توسط اینجانب یا فرد دیگر در هیچ جا ارائه نشده است و در تدوین متن پایان‌نامه آئین‌نامه مصوب دانشگاه را به طور کامل رعایت کرده‌ام.

امضاء دانشجو:

تاریخ:

فرم حق طبع و نشر و مالکیت نتا یج

۱ – حق چاپ و تکثیر این پایان‌نامه متعلق به نویسنده آن می‌باشد. هرگونه کپی برداری به‌صورت کل پایان نامه یا بخشی از آن تنها با موافقت نویسنده یا کتابخانه دانشکده علوم پایه دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی مجاز است.

۲ – کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی می‌باشد و بدون اجازه کتبی دانشگاه به شخص ثالث قابل واگذاری نیست.

همچنین استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

تقدیم به

روح بزرگوار پدرم،

قلب مهربان مادرم

چکیده

در مطالعات پزشکی یا تحلیل داده‌های قابلیت اعتماد، اغلب وقوع شکست برای یک پدیده از علل مختلفی صورت می‌گیرد که این عوامل برای به وجود آوردن شکست برای آن پدیده با هم رقابت می‌کنند. بررسی این علل توام و تعیین ساختارهای آماری کلی و جزیی آنها به عنوان تحلیل مخاطره رقابتی با اهمیت است. هدف از مساله مخاطره رقابتی تعیین توابع بقا و نرخ خطر متناظر با هریک از عوامل وقوع شکست، یعنی توابع زیر – بقا و زیر– خطر می‌باشد. به منظور برآورد تابع بقا، از روش‌های ناپارامتری استفاده کرده و ابتدا برآورد کاپلان – مه‌یر را در حالت یک نمونه‌ای بیان کرده و برآورد تحت داده‌های سانسور شده، فرمول گرین وود و برآورد نلسن – آلن را مورد مطالعه قرار داده و سپس برای حالت k نمونه‌ای برآورد منتل – هاینزل را معرفی می‌کنیم. در ادامه، هنگامیکه k عامل ریسک وجود داشته باشد، به معرفی انواع آزمون‌های متداول آماری برای نشان دادن برابری توابع نرخ خطر و توابع وقوع تجمعی برای هریک از عوامل ریسک می‌پردازیم. آماره‌ی آزمون وزنی شده‌ی لگ – رتبه برای نشان دادن وجود اختلاف در توابع مخاطره طراحی شده است. همچنین، آزمون لگ – رتبه به دلیل سادگی و کاربرد فراوان آن، در نرم‌افزارهای آماری موجود است. در زمینه مخاطره رقابتی چندین آزمون برای مقایسه‌ی برابری توابع وقوع تجمعی توسط افراد متعددی پیشنهاد شده‌اند، که اولین و مهمترین آنها توسط گری (۱۹۸۸) و بر اساس تابع زیر – خطر کلی از توابع وقوع تجمعی ساخته می‌شود. همچنین، به منظور مقایسه احتمالات رد آزمون‌های لگ – رتبه و گری با استفاده از نرم افزار R به شبیه سازی می‌پردازیم. سرانجام بر اساس تابع چندک، با استفاده از روش‌های ناپارامتری، برابری توابع وقوع تجمعی برای عوامل مختلف ریسک در مدل‌های مخاطره رقابتی را بررسی می‌کنیم.

کلمات کلیدی : مدل‌های مخاطره‌های رقابتی، تابع نرخ شکست، تابع وقوع تجمعی، سانسور،

آزمون‌های وزنی شده، تابع چندک.

فهرست مندرجات

مقدمه ٦

١ تعاریف و مفاهیم اولیه ٦

١.١ **مقدمه** ٦

٢.١ مفاهیم پایه‌ای در تحلیل داده‌های بقا ٨

٣.١ مفروضات بقا ٩

۴.١ توابع زمان بقا ١٠

۵.١ معرفی توابع زیر- توزیع و زیر- بقا ١٣

٦.١ زیر- خطر و خطر کلی ١۵

۱.٦.۱ خطر کلی ۱۵
۲.٦.۱ زیر- خطر ۱۵

۷.۱ نمونه‌های بریده ۱٦
۱.۷.۱ نمونه‌های چپ بریده ۱۷
۲.۷.۱ نمونه‌های راست بریده ۱۷

۸.۱ انواع سانسور ۱۸
۱.۸.۱ سانسور نوع I ۱۸
۲.۸.۱ سانسور نوع II ۱۹
۳.۸.۱ سانسور تصادفی ۲۰
۴.۸.۱ سانسور چپ ۲۱
۵.۸.۱ سانسور راست ۲۱

۹.۱ درستنمایی برای مخاطره‌های رقابتی ۲۲
۱.۹.۱ فرم تابع درستنمایی ۲۲
۲.۹.۱ رویکرد زمان‌های شکست پنهان و مقدمه‌ای بر طول عمرهای پنهان . ۲۳
۳.۹.۱ تابع درستنمایی برای انواع سانسور ۲۴

۲ برآورد ناپارامتری در مدل های بقا ۲٦

۱.۲ **مقدمه** ۲٦

۲.۲ روش پارامتری ۲۷

۳.۲ روش ناپارامتری ۲۹

۴.۲ حالت یک نمونه‌ای: برآورد کاپلان—مه یر ۲۹

۱.۴.۲ برآورد بقا با استفاده از داده‌های سانسور شده ۳۰

۲.۴.۲ برآورد ماکسیمم درستنمایی ناپارامتری ۳۱

۳.۴.۲ روش بدست آوردن برآورد ماکسیمم درستنمایی ناپارامتری برای
داده های سانسور شده از راست ۳۵

۴.۴.۲ فرمول گرین وود ۳۹

۵.۴.۲ برآوردگر نلسن — آلن ۴۱

۶.۴.۲ امید ریاضی طول عمر ۴۳

۵.۲ حالت K نمونه‌ای: برآوردگر منتل — هاینزل ۴۳

۳ آزمون‌های فرض در مدل‌های مخاطره‌های رقابتی ۴۷

۱.۳ مقدمه ۴۷

۲.۳ آزمون‌های وزنی شده ۴۸

۳.۳ آزمون پپ و فلمینگ ۵۲

۴.۳ آزمون گری ۵۳

۱.۴.۳ تعریف CIF و برآورد آن ۵۴

۵.۳ آزمون پپ ۵۸

۶.۳ اساس کار آزمون گری و ویژگی‌های آن ۵۹

۷.۳ شبیه سازی با نرم افزار R برای آزمون‌های گری و لگ – رتبه ۶۲

۸.۳ معرفی برخی آزمون‌ها بر اساس مقایسه‌ی توابع وقوع تجمعی و نرخ شکست،

تحت عنوان آزمون‌های سوپریمم ۶۶

۱.۸.۳ آماره‌ی آزمون برای داده‌های غیر سانسور شده ۶۹

۲.۸.۳ آماره‌ی آزمون برای داده‌های سانسور شده ۷۱

۳.۸.۳ بررسی آزمون‌های مخاطره‌ی رقابتی برای بیش از دو فاکتور ریسک ۷۳

۴.۸.۳ مقایسه‌ی توابع وقوع تجمعی و نرخ شکست بر اساس زیر – فاصله‌ها ۷۴

۵.۸.۳ بررسی شبیه‌سازی با ذکر یک مثال کاربردی ۷۵

۶.۸.۳ نتایج بدست آمده از مطالعات شبیه‌سازی شده ۷۵

۹.۳ تعمیم آزمون‌های سوپریمم برای مقایسه‌ی برابری تابع نرخ شکست عوامل مختلف ریسک ۷۷

۱.۹.۳ شبیه سازی و مقایسه‌ی توان آزمون‌های سوپریمم تعمیم یافته ۸۰

۴ آزمون چندک به منظور مقایسه‌ی توابع وقوع تجمعی در مدل‌های مخاطره‌ی رقابتی ۹۰

۱.۴ **مقدمه** ۹۰

۲.۴ توابع چندکی ۹۱

۳.۴ آماره‌ی آزمون ۹۳

۴.۴ بررسی آماره ی آزمون با استفاده از شبیه سازی ۹۹

۵.۴ مثالی برای مقایسه آماره آزمون بر اساس تابع چندک و آماره آزمون‌های سوپریمم ۱۰۱

A **برنامه نویسی** ۱۰۷

مراجع ۱۱۹

واژه نامه فارسی به انگلیسی ۱۲۱

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ مقدمه

در اکثر مواقع، در مطالعات پزشکی یا تحلیل در مورد داده‌های قابلیت اعتماد، ممکن است چند عامل در خرابی یک مؤلفه یا در آسیب دیدن افراد به طور همزمان دخالت داشته باشند. به این عوامل شکست، عوامل مخاطره و یا فاکتورهای ریسک گفته می‌شود. در بعضی حالات، عوامل مخاطره برای از بین بردن افراد و یا قطعات سیستم با هم رقابت می‌کنند در این مورد تحلیل بقا به صورت پیچیده‌تری تحت عنوان مخاطره‌ی رقابتی معرفی می‌شود. مخاطره‌ی رقابتی هنگامی رخ می‌دهد که حداقل دو عامل از بین برنده‌ی ممکن برای یک مؤلفه وجود داشته باشد، اما در عمل تنها یکی از این عوامل شکست اتفاق می‌افتد و سیستم بر اثر آن عامل از کار می‌افتد. در مورد داده‌های بقای استاندارد تجزیه و تحلیل مرسوم به این نحو است که محقق توزیع طول عمر داده‌ها را تحت یک عامل خاص از شکست، مثلاً سرطان مورد بررسی قرار می‌دهد و سایر عوامل شکست را در نظر نمی‌گیرد. بنابراین در این حالت طول عمر تمام داده‌ها مشخص است اما داده‌هایی که علت شکست آنها مشخص نمی‌باشد(عاملی غیر از سرطان است) به عنوان داده‌های سانسور شده در نظر گرفته می‌شوند. اما در

سالهای اخیر مدل‌ها گسترش یافته و طول عمرها را با توجه به تمام عوامل شکست در نظر می‌گیرند.

مخاطره‌های رقابتی اولین بار توسط دنیل برنولی[۱] (۱۷۶۰) برای جدا کردن خطر مرگ به وسیله آبله از سایر عوامل مرگ مورد بررسی قرار گرفت. به عنوان مثال، وقتی که اشخاص در معرض عوامل چندگانه مرگ قرار می‌گیرند، با مسأله مخاطره رقابتی مواجه می‌شوند. داده‌ها در مدل مخاطره‌ی رقابتی، شامل زمان‌های شکست T ومتغیرهای نشانگر C هستند که در آن زمان شکست یک متغیر تصادفی پیوسته و متغیر نشانگر یک متغیر تصادفی گسسته می‌باشد. بنابراین برای مدل مخاطره‌های رقابتی پیشامد بقا شامل یک توزیع دو متغیره با یک جز پیوسته و یک جز گسسته است. به عنوان مثال در پزشکی C ممکن است عامل مرگ وT سن در زمان مرگ باشد.

عوامل شکست ممکن است مستقل و یا وابسته باشند هر چند در عمل عوامل شکست وابسته، طبیعی‌تر و واقع گرایانه‌تر است ولی ممکن است که این مشکل به وجود آید که ما نتوانیم مدل تحت بررسی را به درستی تشخیص دهیم. در این پایان نامه عوامل شکست را مستقل در نظر می‌گیریم.

هدف از بررسی مسأله مخاطره‌ی رقابتی تعیین توابع توزیع و بقای متناظر با هر یک از عوامل وقوع شکست می‌باشد که با دستیابی به این هدف میانگین طول عمر باقی‌مانده متناظر با هر یک از عوامل شکست به‌دست می آید و می‌توان تصمیم‌های بهینه و مقرون به صرفه‌تری در جهت جلوگیری از وقوع شکست برای آن پدیده گرفت.

انواع سانسور در آزمون‌های طول عمر و مطالعات قابلیت اعتماد به طور غیر قابل اجتنابی اتفاق می‌افتند، زیرا آزمایشگر قادر نیست اطلاعات کاملی از طول عمر همه‌ی مؤلفه‌ها به دست آورد. در حالات بسیاری وقتی که طول عمر داده‌ها بررسی می‌شود، ممکن است همه‌ی واحدها در نمونه خراب نشوند(یعنی پیشامد مورد نظر مشاهده نشود) و یا اینکه زمان‌های دقیق خرابی همه واحدها در دسترس نباشد.

---

[۱] *Daniel Bernoulli*

۲.۱ مفاهیم پایه‌ای در تحلیل داده‌های بقا

تحلیل بقا، مجموعه‌ای شامل تکنیک های آماری متنوع برای تجزیه و تحلیل متغیرهای تصادفی است که دارای مقادیر مثبت می‌باشند. یکی از برجسته‌ترین مشخصات آنها، زمان از کارافتادگی یک دستگاه(مکانیکی یا الکتریکی)، زمان مرگ یک واحد بیولوژیک (انسان، حیوان و یا سلول زنده) و غیره می‌باشد که گاهی ممکن است متغیر تصادفی مورد نظر مربوط به زمان نباشد مثلاً، مقادیر متغیر مربوط به مقدار هزینه‌ی پرداختی یک شرکت بیمه به بیمه شدگان در یک وضعیت بخصوص.

در حالی که تجزیه و تحلیل بقا به کارهای ابتدایی روی جداول مرگ و میر که اولین بار توسط جان گرانت [۲](۱۶۶۲) و همچنین ستاره شناس معروف، هالی [۳] (۱۶۹۳) انجام گرفته، نسبت داده می‌شود ولی می‌توان گفت دوره نوین آن از پنجاه سال پیش با کاربرد در مهندسی آغاز شد. بیشتر تحقیقات آماری در علوم مهندسی روی مدل‌های پارامتری متمرکز بود اما با گذشت دو دهه و با افزایش تعداد آزمایشات تجربی، مدل‌های ناپارامتری بقا نیز بکار گرفته شد.

در بسیاری از تحقیقات پزشکی نتیجه‌ی مورد علاقه، زمان وقوع یک پیشامد است. برای مثال در بیماری سرطان، پیشامد مورد نظر معمولاً مرگ و یا بازگشت (عود کردن) مجدد بیماری است. در مطالعات پرستاری، پیشامد اغلب مرخص کردن بیمار از بیمارستان است و در عملیات پیوند اعضا، پیشامد می‌تواند رد کردن عضو پیوندی باشد. در این نوع از مطالعات زمان ورود به مطالعه و مراجعه تا زمان وقوع پیشامد مورد نظر، تنها برای بعضی از واحدهای تحت مطالعه مشخص است و بعضی از بیماران که به پیشامد مورد نظر نرسیده‌اند، به عنوان مقادیر سانسور شده هستند و در حقیقت وجود این مقادیر سانسور شده است که تحلیل بقا را متمایز می‌کند. هدف دیگر بسیاری از مطالعات پزشکی، مشخص کردن این نکته است که آیا داروی جدید، روش درمانی و یا روش تشخیص جدید بر انواعی

---

[۲] *Jhon Grant*

[۳] *Halley*

که در حال حاضر استفاده می‌شود برتری دارد یا خیر؟

به مطالعاتی که در آنها یک گروه افراد سالم در دوره‌ی معینی از زمان برای مشاهده‌ی یک بیماری یا آشکار شدن نشانه‌های دیگر پیگیری می‌شوند، مطالعات آینده‌نگر گفته می‌شود. در این مطالعات تنها وقوع پیشامد(مثلاً مرگ) مد نظر نیست بلکه زمان وقوع پیشامد نیز مطرح می‌شود که به زمان بقا معروف است. زمان بقا را معمولاً با T نمایش می‌دهند.

برای تعیین زمان بقا، به سه عنصر اساسی زیر نیاز داریم:

الف – زمان مبدأ یا نقطه شروع.

ب – پیشامد پایانی مورد نظر.

ج – مقیاس اندازه‌گیری گذشت زمان.

مثلاً گستره عمر T از تولد(نقطه‌ی آغاز) تا مرگ(پیشامد پایانی) بر حسب سال(مقیاس اندازه‌گیری زمان). لازم است نقطه‌ی آغاز دقیقاً تعریف شود اما لازم نیست تولد باشد، ممکن است آغاز یک درمان جدید یا بستری شدن یک بیمار در بیمارستان و یا آسایشگاه باشد. همچنین لازم است که پیشامد پایانی دقیقاً تعریف شود اما لازم نیست که این پیشامد مرگ باشد. ممکن است پیشامدی باشد که کشنده نیست مثلاً بازگشت مجدد یک بیماری (مثل سرطان خون) یا پایان سیگار نکشیدن و یا مرخص شدن یک بیمار از بیمارستان باشد. همچنین استفاده از تقویم درمانی در مطالعات پزشکی معمول و بامعناست. هر چند که گزینه‌های دیگری برای مقیاس زمان وجود دارند. مثلاً هزینه‌ی بیمارستان(به دلار) از زمان پذیرش(نقطه‌ی آغاز) تا ترخیص(پیشامد پایانی).

۳.۱ مفروضات بقا

در جامعه‌ای از افراد با زمان از کارافتادگی مشخص، مدت زمانی که طول می‌کشد تا فرد از بین برود و یا به‌عبارتی از مطالعه خارج شود(متغیر تصادفی غیر منفی T که مبدا ومقیاس اندازه‌گیری آن مشخص

است) را معرف زمان از کارافتادگی در این جامعه در نظر می‌گیریم که ممکن است گسسته یا پیوسته و یا ترکیبی از این دو باشد.

۴.۱ توابع زمان بقا

توزیع T، زمان بقا، از نقطه‌ی آغاز تا پیشامد مورد نظر که به صورت یک متغیر تصادفی در نظر گرفته می‌شود به وسیله‌ی هر یک از دو تابع هم ارز زیر یعنی تابع بقا و تابع مخاطره مشخص می‌شود.
تابع بقا را با $\mathrm{S(t)}$ نشان می‌دهیم و با احتمالی که یک فرد بیش از t واحد زمانی زنده می‌ماند تعریف می‌شود:

$$S(t) = P(T > t).$$

$S(t)$ همچنین نرخ بقا را نشان می‌دهد. مثلاً اگر زمان ها بر حسب سال باشند، آنگاه$S(۲)$ نرخ بقای دو ساله، $S(۵)$ نرخ بقای پنج ساله را نشان می‌دهد. نمودار $S(t)$ در مقابل t منحنی بقا نامیده می‌شود به این صورت که یک منحنی بقا با شیب تند، بقای کوتاهتر و منحنی با شیب کمتر یا یکنواخت، بقای طولانی‌تر را نشان می‌دهد. همچنین تابع بقا برای تعیین پارامترهای مربوط از قبیل میانه، صدک و میانگین زمان بقا به کار می‌رود. $T_{۰/۵}$ میانه است و زمانی است که $S(T_{۰/۵}) = ۰/۵$، به عبارت دیگر دقیقاً نصف جامعه به اندازه‌ی $T_{۰/۵}$ واحد زمانی یا بیشتر زنده می‌مانند. تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی T را با $f(t)$ و $F(t)$ نمایش می‌دهند و به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$f(t) = \lim_{\delta \to o} \frac{P(t \le T \le t + \delta)}{\delta}$$

و

$$\begin{aligned} F(t) &= P(T \le t) \\ &= \int_{\circ}^{t} f(x)\, dx \end{aligned}$$

$$= \quad ۱ - S(t). \qquad (۱.۱)$$

بنابراین $f(t)$ را می‌توان به صورت زیر نیز بیان کرد:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{dF(t)}{dt} \\ &= \frac{-dS(t)}{dt}. \end{aligned}$$

وقتی t معلوم باشد میانگین عمر باقیمانده متغیر تصادفی T عبارت است از:

$$\begin{aligned} r(t) &= E(T-t|T>t) \\ &= \int_t^\infty (x-t) f(x|x>t)\, dx \\ &= \frac{۱}{S(t)} \int_t^\infty S(x)\, dx. \end{aligned}$$

همچنین می‌توان نشان داد که تابع میانگین عمر باقیمانده، توزیع T یعنی توزیع زمان بقا را تعیین می‌کند.

تابع مخاطره، نرخ مرگ لحظه‌ای با شرط زنده بودن فرد تا زمان t را نشان می‌دهد و با $h(t)$ نمایش داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$h(t) = \lim_{\delta \to o} \frac{P(t \le T \le t+\delta | T>t)}{\delta} \qquad (۱.۲)$$

یا

$$h(t)dt = P(t \le T \le t+dt | T>t)$$

به عبارت دیگر تابع مخاطره تقریباً نسبت آزمودنی های فوت شده در واحد زمان حول t را نشان می‌دهد.

توجه کنید که در رابطه $h(t)$، صورت کسر یک احتمال شرطی است. همچنین $h(t)$ به عنوان نیروی

میرایی [۴] معروف است. تابع خطر ممکن است در طول زمان برای خطرهای کوتاه مدت و یا بلند مدت، به ترتیب افزایشی یا کاهشی باشد یا ثابت بماند، یا حتی فرآیند پیچیده‌تری را نشان دهد. مثلاً بیماران سرطان حاد خونی که به درمان پاسخ می‌دهند دارای خطر افزایشی، و تابع خطر مربوط به عضو پیوند زده، کاهشی است. حالت های پیچیده، شامل منحنی به اصطلاح وان است که فرآیند عمر انسان و الگوهای بقا با نرخ خطر ابتدا افزایشی و سپس کاهشی را توصیف می‌کند. سرطان خون مزمن را می‌توان به عنوان مثالی از این نوع بیان نمود.

همچنین می‌توان تابع خطر را بر حسب تابع بقا بیان نمود، یعنی

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{f(t)}{S(t)} \\ &= \frac{\frac{-dS(t)}{dt}}{S(t)} \\ &= \frac{-d\ln S(t)}{dt}. \end{aligned}$$

پس از انتگرال گیری از دو طرف معادله فوق و نمایی سازی آن داریم:

$$\begin{aligned} S(t) &= \exp\{-\int_{\circ}^{t} h(x)dx\} \\ &= \exp\{-H(t)\}, \end{aligned} \qquad (۱.۳)$$

که در آن رابطه‌ی

$$H(t) = \int_{\circ}^{t} h(x)dx$$

را تابع خطر تجمعی تا زمان t می‌نامند.

---

[۴] $Mortality$

۵.۱ معرفی توابع زیر- توزیع و زیر- بقا

در این بخش به معرفی توابع زیر- توزیع و زیر- بقا می‌پردازیم.

در مبحث مخاطره‌های رقابتی توزیع توأم C,T مورد استفاده قرار می‌گیرد. این توزیع توأم می‌تواند بر حسب توابع زیر- توزیع [۵] به‌صورت:

$$F(j,t) = P(C = j, T \leq t)$$

یا به طور معادل بر حسب توابع زیر- بقا [۶] به صورت:

$$S(j,t) = P(C = j, T > t)$$

باشد. توجه کنید که مجموع $F(j,t)$ و $S(j,t)$ یک نمی‌شود، اما

$$F(j,t) + S(j,t) = P_j$$

به قسمی که

$$\begin{aligned} P_j &= P(C = j) \\ &= F(j,\infty) \\ &= S(j,0) \end{aligned}$$

و

$$\sum_{j=1}^{p} P_j = 1, \qquad P_j > 0.$$

که P_j توزیع حاشیه‌ای C می‌باشد و احتمال وقوع شکست توسط عامل j ام است. بنابراین $F(j,t)$ دارای خواص تابع توزیع نیست، چون در $t = \infty$ به جای مقدار یک، مقدار P_j را می‌گیرد.

---

[۵] $Sub - Distribution$

[۶] $Sub - Survival$

توجه کنید که $S(j,t)$ در حالت کلی، احتمال $T > t$ برای شکست توسط عامل j ام نیست. این احتمال یک احتمال شرطی به صورت $P(T > t|C = j)$ است که به صورت $\frac{S(j,t)}{P_j}$ نیز قابل بیان است.

تابع زیر- چگالی [۷]، $f(j,t)$ برای T پیوسته برابر است با:

$$f(j,t) = -\frac{dS(j,t)}{dt}$$

تابع بقای حاشیه‌ای و تابع چگالی حاشیه‌ای برای T می‌توانند به صورت زیر بیان شوند:

$$S(t) = \sum_{j=۱}^{p} S(j,t)$$

و

$$\begin{aligned} f(t) &= -\frac{dS(t)}{dt} \\ &= \sum_{j=۱}^{p} f(j,t). \end{aligned}$$

بعضی احتمال های شرطی ممکن است در کاربردهای واقعی مورد توجه قرار گیرند. مثلاً

$$P(.) = \frac{f(j,t)}{P_j}$$

می‌تواند نشان دهنده‌ی توزیع سن مرگ به سبب عامل j ام باشد. احتمال شرطی

$$P(.) = \frac{f(j,t)}{f(t)}$$

بیانگر احتمال شکست به سبب عامل j ام در یک زمان خاص است. علاوه بر رابطه‌ی بالا می‌توان احتمال شکست نهایی به سبب عامل j ام را به صورت زیر تعریف نمود:

$$P(C = j|T > t) = \frac{S(j,t)}{S(t)}$$

---

[۷] $Sub - Mass function$