دانشگاه تربیت معلم سبزوار
دانشکده علوم پایه

مسأله‌ی P—میانه روي درخت با وزن مثبت و منفی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی گرایش کاربردی

استاد راهنما:

دکتر مهدی زعفرانیه

استاد مشاور:

دکتر محمدتقی خداداد

پژوهش و نگارش :

سمانه طهماسبی

تیر ماه ۱۳۸۸

پروردگارا!

ای هستی بخش وجود، مرا به نعمات بی‌کرانت توان شکر نیست. ذره ذره‌ی وجودم برای تو و نزدیک‌تر شدن به تو می‌تپد.
الهی! مرا مدد کن تا دانش کم نه نردبانی باشد برای فزونی تکبر و غرور، نه حلقه‌ای برای اسارت و نه دستمایه‌ای برای تجارت، بلکه گامی باشد برای تجلیل از تو و متعالی ساختن زندگی خود و دیگران.

تقدیم به پدر و مادر مهربانم:

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان. به پاس قلب‌های بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می‌گراید و به پاس محبت‌های بی‌دریغشان که هرگز فروکش نمی‌کند.

تقدیم به تمامی معلم‌های سخت‌کوش و انسان‌های آزاده‌ای که جز صداقت توشه‌ای ندارند و تقدیم به استاد ارجمند که وجودشان نور، کلامشان دانایی و شاگردیشان مایه‌ی افتخار من است.

قدردانی

سر بر آستان جلال پروردگار بی‌همتا می‌سایم که دگربار توفیق اندوختن دانشی هرچند اندک را روزیم فرمود. سپاس فراوان من نثار مهربانانی که بی مهرشان این راه را پایان نبود.

از استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر مهدی زعفرانیه که وجودشان دریایی از علم و محبت است و آموختن علم درمحضرشان بزرگترین افتخار زندگیم و راهنمایی‌های ارزشمندشان گرانبهاترین گنجینه‌ی عمرم است، بی‌نهایت سپاسگزارم. از اساتید محترم جناب آقای دکتر محمدتقی خداداد که مشاور پایان نامه‌ام بودند و همچنین آقای جعفرزاده کمال تشکر را دارم و سپاس فراوان از تمامی اساتید محترم گروه ریاضی که در محضرشان علم آموختم.

از جناب آقای دکتر فتحعلی و آقای دکتر علوی که زحمت داوری پایان‌نامه را بر عهده دارند کمال تشکر را دارم. در پایان از تمامی دوستان عزیزم در دانشگاه تربیت معلم سبزوار که با همدلی و همراییهایشان سنگینی لحظات سخت برایم آسان نمود، تشکر و قدردانی می‌نمایم.

چکیده

مکان‌یابی و بخصوص مسأله p–میانه یک مبحث مهم در بحث مدیریت خدمات است. حوزه‌های وسیعی از نهادهای دولتی و غیر دولتی و آحاد مردم بطور روزمره با علم مکان‌یابی ارتباط دارند و بعنوان بارزترین نهادهای مرتبط این قضیه وزارت راه و ترابری، وزارت بهداشت درمان و آموزش پزشکی و شهرداری‌ها را می‌توان نام برد که در صورت بهینه کردن امور مربوط به حمل و نقل تا حدود زیادی در تسهیل رفت وآمد و رفاه مردم دخیل خواهند شد. بعنوان مثال ساخت یک بیمارستان در محدوده‌ی پر ترافیک شهر موجبات افزایش ترافیک و سخت شدن دسترسی به آن و همچنین تلف شدن وقت مردم خواهد شد و ساخت آن در خارج از محدوده‌ی شهری نیز مستلزم صرف وقت زیادی برای دسترسی به آن خواهد شد این جاست که می‌توان از علم مکان‌یابی برای پیدا کردن بهترین ومؤثرترین نقطه استفاده کرد.

در فصل اول از این پایان نامه، تاریخچه‌ای از روشهای حل این مسأله و تعاریف موردنیاز از شبکه‌ها و نظریه گراف آورده شده است. در فصل دوّم مسأله‌ی p–میانه روی درخت با وزن مثبت معرفی می‌شود و الگوریتمی از مرتبه‌ی $O(n^2.p^2)$ برای حل این مسأله ارائه می‌گردد، همچنین برای حل مسأله‌ی ۱–میانه و ۲–میانه روی درخت با وزن مثبت الگوریتم‌هایی بترتیب ازمرتبه‌ی $O(n)$ و $O(nlogn)$ ارائه می‌گردد ضمناً با مثال‌هایی کاربردی در این فصل، به تشریح این روشها والگوریتم‌ها می‌پردازیم. در فصل سوم مسأله‌ی ۲–میانه و ۳–میانه روی درخت با وزن مثبت و منفی مورد بررسی قرار می‌گیرد و الگوریتم‌هایی به ترتیب از مرتبه‌ی $O(n^3)$ و $O(n^5)$ برای حل آن ارائه شده است. در انتها در فصل چهارم پس از بیان یک مقدمه فازی، مسأله ۱–میانه‌ی فازی را معرفی و بررسی می‌کنیم که در آن وزن رئوس و طول یال‌ها اعداد فازی هستند.

واژه‌های کلیدی: مسائل مکان‌یابی، مسأله‌ی میانه، امکانات ناخوشایند، مکان‌یابی فازی.

فهرست مندرجات

۱ مقدمات و تعاریف ۱

۱–۱ مقدمه ۱

۱–۲ تعاریف ۴

۱–۳ مسائل مکان‌یابی ۷

۱–۳–۱ مسأله‌ی p–میانه ۸

۱–۳–۲ مسأله‌ی پوششی ۱۱

۱–۳–۳ مسأله‌ی p–مرکز ۱۵

۲ حل مسأله‌ی p–میانه روی درخت با وزن مثبت ۱۷

۲–۱ مقدمه و تاریخچه ۱۷

۲–۲ ۱–میانه و w–مرکزثقل درخت ۲۰

۲–۳ حل مسأله‌ی ۲–میانه روی درخت با وزن مثبت با استفاده روش حذف یال . . ۲۹

۲–۳–۱ تعاریف و نمادهای لازم برای الگوریتم گاویش و اسریدهار ۳۰

۲–۳–۲ پیاده‌سازی الگوریتم گاویش و اسریدهار ۳۳

۲–۳–۳ الگوریتم جستجوی ۱–میانه در زیردرخت‌های راست ۳۹

۲–۳–۴ الگوریتم جستجوی ۱–میانه در زیردرخت‌های چپ ۴۱

۲–۴ جستجوی p–میانه‌ی درخت ($p > ۱$) ۵۲

۲–۴–۱ معرفی نمادهای لازم برای الگوریتم حکیمی ۵۳

۲–۴–۲ مرحله‌ی اوّل ۵۸

۲–۴–۳ پیچیدگی مرحله‌ی اوّل ٦۸

۲–۴–۴ مرحله‌ی دوّم ٦۹

۲–۴–۵ پیچیدگی مرحله‌ی دوّم ۷۲

۳ حل مسأله‌ی ۲–میانه و ۳–میانه روی درخت با وزن مثبت و منفی ۸٦

۳–۱ مقدمه ۸٦

۳–۲ تابع هدف مسأله‌ی p–میانه روی درخت با وزن مثبت و منفی ۸۸

۳–۳ مدل (۱) روی درخت با وزن مثبت و منفی ۹۱

۳–۴ مدل (۲) روی درخت ۹۲

۳–۴–۱ مسأله ۱–میانه روی درخت با وزن مثبت و منفی ۹۲

۳–۴–۲ شرایط لازم ۱–میانه ۹۳

۳–۴–۳ مسأله‌ی ۲–میانه روی درخت با وزن مثبت و منفی ۹۹

۳–۴–۴ مرتبه‌ی پیچیدگی جستجوی ۲–میانه ۱۰۵

۳–۴–۵ شرایط لازم ۲–میانه ۱۱۲

۳–۴–۶ مسأله‌ی ۳–میانه روی درخت با وزن مثبت و منفی ۱۱۴

۳–۴–۷ مسأله‌ی ۳–میانه ی مطلق ۱۱۵

۳–۴–۸ مرتبه‌ی پیچیدگی جستجوی ۳–میانه ۱۲۱

۳–۵ مقایسه‌ی p–میانه و $p+1$–میانه ۱۲۶

۳–۵–۱ شرط لازم برتری جواب مسأله‌ی ۱–میانه بر ۲–میانه ۱۲۶

۳–۵–۲ شرط لازم برتری جواب مسأله‌ی ۲–میانه بر ۳–میانه ۱۳۱

۳–۵–۳ مقایسه‌ی p–میانه و $p+1$–میانه در حالت کلی ۱۳۴

۴ مسأله۱–میانه‌ی فازی روی درخت با وزن مثبت و منفی ۱۳۷

۴–۱ مقدمه ۱۳۷

۴–۲ تعاریف اولیه ۱۳۸

۴–۳ ۱–میانه‌ی فازی برروی درخت با وزن مثبت و منفی ۱۴۱

۴–۳–۱ وزن فازی ۱۴۴

۴–۳–۲ یال فازی ۱۵۰

۴–۴ رتبه‌بندی اعداد فازی ۱۵۳

۴–۴–۱ روش "باآس – کواکرناک" ۱۵۴

۴–۴–۲ روش چن و هنگ ۱۵۶

۴–۴–۳ وزن و یال فازی ۱۶۴

۵ نتیجه‌گیری و پیشنهادات ۱۶۶

A واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی ۱۶۸

B متن برنامه‌ی الگوریتم حکیمی ۱۷۰

لیست اشکال

۱–۱ مثال ۱۳

۲–۱ اثبات قضیه‌ی حکیمی ۱۹

۲–۲ درخت ناهمبند $T - \{v\}$ ۲۰

۲–۳ زیردرخت‌های T_{v_1} و T_{v_2} ۲۱

۲–۴ اثبات لم ۱.۲ . . . . . ۲۲

۲–۵ اثبات لم ۱.۲ در ۱) ۲۳

۲–۶ اثبات لم ۱.۲ در ۲) ۲۴

۲–۷ اثبات قضیه ۲.۲ در حالت عکس ۲۶

۲–۸ اثبات نتیجه ۴.۲ . . . . . ۲۸

۲–۹ درخت و زیردرخت‌ها ۳۰

۲–۱۰ اثبات لم ۲.۲ . . . . . ۳۳

۲–۱۱ افزایش زیردرخت‌ها ۳۴

۲–۱۲ حذف یال در زیردرخت راست ۴۰

۲–۱۳ حذف یال در زیردرخت چپ ۴۳

۲–۱۴ مثال ۱.۲ . . . . . ۴۴

۲–۱۵ مثال ۲.۲ . . . . . ۴۹

۲–۱۶ تعاریف ۵۳

۲–۱۷ جهت حرکت در مرحله اول و دوم ۵۴

۲–۱۸ اثبات همبندی V_1 . . . . . ۵۶

۲–۱۹ یکتا نبودن V_1 . . . . . ۵۷

۲–۲۰ حالت (۱)، $v_1 \in T_{e(v_s,l)} - T_{e(v_s,l-1)},\ v_2 \in T_{e(v_s,l-1)}$. ۶۱

۲–۲۱ حالت (۲)، $e(v_1, j_1) = e(v_s, l),\ v_2 \in T_{e(v_s,l-1)}$. ۶۳

۲–۲۲ حالت (۳)، $e(v_1, j_1) = e(v_s, l),\ v_2 \in T_{e(v_s,l)} - T_{e(v_s,l-1)}$. ۶۵

۲–۲۳ مثال ۴.۲ . . . . . ۷۳

۳–۱ مثال ۱.۳ . . . . . ۸۹

۳–۲ مثال نقض بهینگی رأسی درمدل (۲) ۹۰

۳–۳ اثبات رأسی بودن ۱–میانه لم ۱.۳ . . . . . ۹۲

۳–۴ شرط لازم ۱–میانه ۹۳

۳–۵ مثال ۳.۳ . . . . . ۹۵

۳–۶ اثبات لم ۳.۳ . . . . . ۹۶

۳–۷ مثال ۴.۳ . . . . . ۹۸

۳–۸ مثال۵.۳ . . . . . ۹۸

۳–۹ بهینگی ۱–میانه ۹۹

۳–۱۰ اثبات قضیه ۱.۳ . . . . . ۱۰۰

۳–۱۱ اثبات قضیه ۱.۳ . . . . . ۱۰۲

۳–۱۲ اثبات لم ۴.۳ . . . . . ۱۰۴

۳–۱۳ مرتبه پیچیدگی الگوریتم ۲–میانه روی درخت با وزن مثبت و منفی ۱۰۶

۳–۱۴ مثال ۷.۳ . . . . . ۱۰۷

۳–۱۵ شرط لازم ۲–میانه لم ۵.۳ . . . . . ۱۱۲

۳–۱۶ شرط لازم ۲–میانه لم ۶.۳ . . . . . ۱۱۳

۳–۱۷ اثبات لم ۷.۳ . . . . . ۱۱۵

۳–۱۸ زیردرخت‌های T_a، T_2 و $T_{a'}$ از درخت T و زیردرخت‌های T_{v_1} و T_{u_1} از زیردرخت T_a ۱۱۷

۳–۱۹ اثبات لم ۹.۳ در حالت ۱) ۱۱۹

۳–۲۰ مثال ۸.۳ . . . . . ۱۲۲

۳–۲۱ مثال ۹.۳ . . . . . ۱۲۵

۳–۲۲ مقایسه ۱–میانه با حالت خاصی از ۲–میانه ۱۲۷

۳–۲۳ مثال نقض شرط لازم برتری ۱–میانه بر ۲–میانه ۱۲۸

۳–۲۴ مقایسه ۱–میانه با حالت خاصی از ۲–میانه ۱۲۹

۳–۲۵ مثال نقض شرط لازم برتری ۱–میانه بر ۲–میانه ۱۳۰

۳–۲۶ مقایسه‌ی ۲–میانه‌ی بهینه با ۳–میانه لم ۱۳.۳ . . . . . ۱۳۱

۳–۲۷ مقایسه‌ی ۲–میانه بهینه با ۳–میانه لم ۱۳.۳ . . . . . ۱۳۲

۳–۲۸ مثال نقض شرط لازم بهینگی ۲–میانه نسبت به ۳–میانه ۱۳۳

۳–۲۹ مثال ۱۳.۳ . . . . . ۱۳۵

۳–۳۰ مثال ۱۴.۳ . . . . . ۱۳۵

۴–۱ عدد فازی مثلثی ۱۳۹

۴–۲ عدد فازی ذوزنقه‌ای ۱۴۱

۴–۳ مثال ۱.۴ . . . . . ۱۴۸

۴–۴ مثال ۲.۴ . . . . . ۱۴۹

۴–۵ تابع عضویت یال فازی ۱۵۰

۴–۶ یال فازی مثال ۳.۴ . . . . . ۱۵۱

۴–۷ مثال ۴.۴ . . . . . ۱۵۵

۴–۸ مثال ۵.۴ . . . . . ۱۵۷

۴–۹ بدست آوردن مقیاس راست و چپ M_1. . . . . ۱۵۸

۴–۱۰ مثال ۶.۴ . . . . . ۱۶۰

۴–۱۱ مقادیر تابع هدف به‌ازای هر راس، مثال ۶.۴ . . . . . ۱۶۰

۴–۱۲ مثال ۷.۴ . . . . . ۱۶۲

۴–۱۳ مقادیر تابع هدف به‌ازای هر راس، مثال ۷.۴ . . . . . ۱۶۳

۴–۱۴ مقادیر تابع هدف به‌ازای هر راس، مثال ۸.۴ . . . . . ۱۶۵

فصل ۱

مقدمات و تعاریف

۱ — ۱ مقدمه

در این فصل ابتدا خلاصه‌ای از تاریخچه مسائل مکان‌یابی را بیان می‌کنیم، سپس به بررسی مسأله‌ی p—میانه و مسائل مرتبط با آن می‌پردازیم.

مسائل مکان‌یابی[۱] از جمله مسائلی هستند که امروزه کاربردهای فراوانی دارند و توجه بسیاری را به خود جلب کرده‌اند. ریشه‌ی یونانی مکان‌یابی کلمه‌ی "$topothesia$" می‌باشد. مسائل مکان‌یابی را در حالت کلی می‌توان به صورت زیر مطرح کرد:

یک مجموعه از مشتری‌ها که در یک ناحیه جغرافیایی قرار دارند و متقاضی دریافت سرویس می‌باشند. تقاضای مشتری‌ها توسط یک یا چند سرویس‌دهنده به صورت اشتراکی یا رقابتی انجام می‌شود که به نوع سرویس‌دهی بستگی دارد. موقعیت سرویس‌دهنده‌ها با توجه به محدودیت‌های جغرافیایی و میزان نیاز مشتریان تعیین می‌شود. هر انتخاب برای مکان سرویس‌دهنده یک هزینه برای تأسیس سرویس‌دهنده و یک هزینه برای سرویس‌دهی به مشتری‌ها ایجاب می‌کند.

[۱] Location problems

براساس نوشته‌ی ریول[۲] [۴۷] اولین کسی که به‌طور رسمی مسأله‌ی مکان‌یابی را به کار برد، امپراتور کنستانتین در قرن چهارم میلادی بود. کنستانتین یک مسأله‌ی مکان‌یابی را بر روی یک شبکه شامل نقاطی که نشان‌دهنده مکان پایگاه‌های رم بود، حل کرد. پایگاه‌ها باید به گونه‌ای قرار می‌گرفتند که بتوانند در مقابل تهدیدات مهاجمان و شورشیان محلی از امپراتوری دفاع کنند.

پیدایش مسأله مکان‌یابی را می‌توان به زمانی نسبت داد که در قرن هفدهم فرما[۳] مسأله زیر را مطرح کرد: فرض کنید سه نقطه در صفحه داده شده است، نقطه چهارم را به گونه‌ای بیابید که مجموع فاصله‌های آن تا سه نقطه داده شده کمینه شود. توریچلی[۴] در سال ۱۶۴۰ این مسأله را حل کرده است، بدین دلیل نقطه‌ی بهینه را نقطه توریچلی و مسأله را مسأله فرما می‌نامند[۳۸]. مسأله فرما، مسأله اشتاینر نیز نامیده می‌شود، زیرا مسأله بر روی شبکه توسط اشتاینر در قرن نوزدهم مطرح شد[۱۷]. تا قرن نوزدهم توجه زیادی به این مسأله نشد تا اینکه سیلوستر[۵] که یک ریاضیدان بود، مسأله کمینه—بیشینه[۶] با نرم اقلیدسی را در فضای جواب نامتناهی موردمطالعه قرار داد. نظریه مکان‌یابی مدرن با مقاله وبر[۷][۵۵] در سال ۱۹۰۹ شکل گرفت. وبر یک اقتصاددان بود و مکان‌یابی صنعتی را مورد مطالعه قرار می‌داد. او به مطالعه مسأله مکان‌یابی کمترین مجموع [۸] روی صفحه پرداخت. امروزه مسأله مکان‌یابی با نرم اقلیدسی که در آن پیدا کردن مکان یک سرویس‌دهنده در صفحه به‌منظور کمینه کردن مجموع فاصله‌ها از این سرویس‌دهنده تا یک مجموعه از نقاط موردنظر است،

---

[۲] ReVelle

[۳] Fermat

[۴] Torricelli

[۵] Sylvester

[۶] Minimax

[۷] Weber

[۸] Minisum

مسأله وبر نامیده می‌شود. مطالعات وبر برروی مسأله مکان یابی تا سال‌ها اساس کار محققان دیگری از قبیل هاتلینگ و هوور [۹] بود. هاتلینگ [۳۴] مسأله‌ای که بعدها به نام فروشنده بستنی در ساحل معروف شد را مطرح کرد. در این مسأله یک فروشنده‌ی جدید سعی می‌کند بیشترین بازار را بطور مشترک با فروشنده دیگری که در ساحل قرار دارد جذب کند. هوور[۳۳] و پالندر[۱۰] [۳۵] مسأله وبر را همراه با تقاضاهای چندگانه و منابع پاسخگویی چندگانه مورد مطالعه قرار دادند. همچنین در این دوره بود که وایزفلد[۱۱] [۲۲] یک روش تکراری برای مسأله وبر در سال ۱۹۳۷ پیشنهاد کرد.

در سال ۱۹۵۸ همراه با پیدایش کامپیوتر، باومل و ولف [۱۲][۳] یک مدل برنامه‌ریزی ریاضی برای مسأله مکان‌یابی انبار روی شبکه پیشنهاد کردند. آنها اولین کسانی بودند که از کامپیوتر برای حل مسائل مکان‌یابی استفاده می‌کردند. مقاله حکیمی [۱۳][۲۶] درمورد وجود یک جواب بهینه روی رأس‌ها برای مسأله کمترین مجموع روی شبکه در سال ۱۹۶۴ ارائه شد. از آن زمان به بعد مطالعات زیادی برروی مسائل مکان‌یابی انجام شد. اولین طبقه‌بندی مدل‌های مختلف مکان‌یابی توسط هندلر و میرچندانی [۱۴][۳۰] ارائه شد. پس از آن طبقه‌بندی‌های دیگری از جمله توسط ایسلت و لاپورت [۱۵] [۲۰] و هاماخر و نیکل [۱۶][۲۹] انجام شد. همچنین بررسی‌هایی از کارهای انجام شده در این زمینه

[۹] Hotelling and Hoover

[۱۰] Pallander

[۱۱] Weiszfeld

[۱۲] Baumol and Wolfe

[۱۳] Hakimi

[۱۴] Handler and Mirchandani

[۱۵] Eiselt and Laporte

[۱۶] Hamacher and Nickel