



دانشکده علوم

گروه فیزیک

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان

درهم تنیدگی کوانتومی در فیزیک ذرات بنیادی

استاد راهنما

دکتر قادر نجارباشی

استاد مشاور

دکتر فرهاد ذوالفقارپور

پژوهشگر

سودا میرزائی

تابستان ۱۳۸۹

چکیده

در این پایان نامه درهم‌تنیدگی کوانتومی را در برخی ذرات همچون کائون، B-مزون، فوتون و نوترینو با جزئیات مطالعه می‌کنیم. برای این منظور از انواع نامساوی‌ها نظیر نامساوی‌های بل (Bell)، CHSH، CH و Wigner استفاده می‌کنیم و آن‌ها را به نقض CP، در ذرات ارتباط می‌دهیم. با در نظر گرفتن ساختار کوارکی، مقدار درهم‌تنیدگی را در هشت‌تایی باریون‌ها محاسبه می‌کنیم. همان محاسبات را با در نظر گرفتن درجه آزاد رنگ برای حالت‌های پادمقارن باریون‌ها و حالت‌های مقارن مزون‌ها انجام می‌دهیم. در پایان، به علت غیرهرمیتی بودن هامیلتونین‌ها در ذرات، که از ناپایداری ذرات ناشی می‌شود، درهم‌تنیدگی حالات بل (Bell)، GHZ و W را برای سیستم‌های غیرهرمیتی محاسبه می‌کنیم.

کلمات کلیدی: حالات بل، GHZ و W، درهم‌تنیدگی کوانتومی، ذرات بنیادی، کوارک، مزون، نقض CP، هشت‌تایی باریون.

فهرست مندرجات

۱	درهم تنیدگی کواتومی	۱
۲	کیویت	۱.۱
۳	کره بلوخ	۲.۱
۴	ماتریس چگالی	۳.۱
۹	درهم تنیدگی و جداپذیری	۴.۱
۱۱	درهم تنیدگی حالات خالص	۱.۴.۱
۱۳	درهم تنیدگی حالات آمیخته	۲.۴.۱
۱۳	حالات GHZ , W	۳.۴.۱
۱۴	معیار درهم تنیدگی	۴.۴.۱
۱۵	سنجه های درهم تنیدگی	۵.۱
۱۶	آنتروپی فون نویمان	۱.۵.۱

۱۷ میانگین آنتروپی فون نویمان	۲.۵.۱
۱۹ لگاریتمیک نگاتیویته	۳.۵.۱
۲۰ میانگین لگاریتمیک نگاتیویته	۴.۵.۱
۲۱ فاصله‌ها	۵.۵.۱
۲۲ تلاقی	۶.۵.۱
۲۲ وفاداری	۷.۵.۱
۲۳ پارادوکس EPR	۶.۱
۲۶ نامساوی BELL	۷.۱
۲۹ نامساوی CHSH	۸.۱
۳۲ نامساوی CH	۹.۱
۳۴ نامساوی ویگنر	۱۰.۱
۳۵ مقدمه‌ای بر ذرات بنیادی	۲
۳۶ طبقه‌بندی ذرات بنیادی	۱.۲
۴۰ تقارن‌ها و قوانین بقا	۲.۲

۴۴	کائون‌ها	۳.۲
۴۵	دینامیک سیستم K° و \bar{K}°	۱.۳.۲
۴۶	انواع ویژه حالات کائون	۲.۳.۲
۴۸	نقض CP	۳.۳.۲
۵۱	نوسان کائون‌ها	۴.۳.۲
۵۲	بازتولید کائون‌ها	۵.۳.۲

۳ درهم‌تنیدگی کوانتومی در ذرات ۵۳

۵۴	تست نظریه متغیر نهان محلی در فیزیک انرژی‌های بالا	۱.۳
۵۵	نامساوی بل برای کائون‌ها	۲.۳
۶۹	نامساوی بل برای مزون B	۳.۳
۷۱	نامساوی بل برای فوتون‌ها	۴.۳
۷۴	حالات درهم‌تنیده چند جزئی در اختلاط نوترینوها	۵.۳
۷۹	حالات W تعمیم یافته در اختلاط طعم	۱.۵.۳
۸۱	خواص همبستگی حالات $ \bar{W}^{(3)}(\tilde{\theta}^{\max}; \tilde{\delta})\rangle$	۲.۵.۳

۶.۳ اهمیت کاربردی درهم‌تنیدگی تک ذره در نوسان‌های نوترینو با در نظر

گرفتن تحوّل زمانی ۸۵

۹۴	محاسبه درهم‌تنیدگی ذرات با در نظر گرفتن اسپین کوارک‌ها	۷.۳
۹۹	آنتروپی حالت‌های کوارکی $SU(۳)_c$	۸.۳
۱۰۲	هامیلتونین‌های شبه‌هرمیتی و تقارن PT	۴
۱۰۴	هامیلتونین‌های شبه‌هرمیتی	۱.۴
۱۰۸	هامیلتونین‌های شبه‌هرمیتی با ویژه پایه‌های دو اورتونرمال—کامل	۲.۴
۱۱۱	یک مشخصه کامل هامیلتونین‌های غیرهرمیتی با طیف حقیقی	۳.۴
۱۱۳	نظریه کوانتومی غیرهرمیتی و تقارن	۴.۴
۱۱۵	بیت کوانتومی PT-متقارن	۵.۴
۱۱۷	درهم‌تنیدگی در نظریه کوانتومی غیرهرمیتی	۶.۴
۱۲۱	تولید درهم‌تنیدگی با هامیلتونین غیرهرمیتی	۷.۴
۱۲۳	حالات همدوس با هامیلتونین شبه‌هرمیتی	۸.۴
۱۲۳	متغیرهای گراسمن تعمیم‌یافته	۱.۸.۴

حالت‌های ماکسیمال درهم‌تنیده با هامیلتونین شبه‌هرمیتی ۱۲۵ ۲.۸.۴

درهم‌تنیدگی ۱۲۹ ۳.۸.۴

۱۳۵ پیوست A

۱۴۶ واژه‌نامه B

۱۴۹ مراجع C

مقدمه

درهم‌تنیدگی همبستگی کوانتومی دو یا چند ذره است حتی وقتی به طور فضایی از هم جدا شده باشند. در حالت‌های درهم‌تنیده، حالت‌های کوانتومی هر ذره بایستی با اشاره به دیگر ذرات توصیف شود. بنابراین نتایج اندازه‌گیری همبسته می‌باشد. درهم‌تنیدگی یکی از شگفت‌انگیزترین پدیده‌های مکانیک کوانتومی می‌باشد که در ابتدا مورد اعتراض شدید انیشتین، پودولسکی و روزن قرار گرفت. به طوری که آن‌ها در سال ۱۹۳۵ در مقاله معروف خود کامل بودن مکانیک کوانتومی را زیر سؤال بردند [۱۶]، آن‌ها بر این عقیده بودند که وجود چنین پدیده‌هایی در مکانیک کوانتومی دلیل بر نقص مکانیک کوانتومی می‌باشد در این راستا نظریه متغیرهای نهان را مطرح کردند که با استفاده از آن می‌توان نظریه کاملی بدون اثرات غیرموضعیتهی که مکانیک کوانتومی پیش‌بینی می‌کند، بوجود آورد. در ادامه تلاش‌های زیادی برای توسعه متغیرهای نهانی صورت گرفت که مهم‌ترین آن‌ها توسط بوهم انجام شد. در سال ۱۹۵۱ بوهم سیستمی با دو ذره اسپین $\frac{1}{2}$ درهم‌تنیده که به طور فضاگونه از هم جدا هستند را در نظر گرفت که مشخصه اصلی پارادوکس EPR را نشان می‌داد [۱۳]. از طرفی بل در سال ۱۹۶۴ نشان داد که همه تلاش‌ها برای توسعه نظریه متغیرهای نهان محکوم به شکست است [۴]. بل نشان داد که با در نظر گرفتن چنین نظریه‌ای (متغیرهای نهان) می‌توان نامساوی را بدست آورد که پیشگویی‌های مکانیک کوانتومی آن را نقض می‌کرد. که بعد از مقاله بل این مسئله مورد بررسی علاقه‌مندان زیادی قرار گرفت که همگی صحت این مسئله را تأیید می‌کردند. در سال‌های اخیر درهم‌تنیدگی کوانتومی در فرآیندهای اطلاعات کوانتومی^۱ مانند رمزنگاری^۲، انتقال از راه دور^۳ و نیز محاسبات کوانتومی^۴ و غیره نقش وسیعی را ایفا کرده است.

فیزیک ذرات، علم مطالعه اجزای بنیادی تشکیل‌دهنده ماده و برهم‌کنش بین آن‌هاست [۹، ۱۹]. اینکه کدام ذرات بنیادی محسوب می‌شوند، با دانش فیزیکدانان تغییر و توسعه یافته است. بشر تا

Quantum Information	۱
Cryptography	۲
Teleportation	۳
Quantum Computing	۴

قرن نوزدهم کوچکترین جزء تشکیل دهنده ماده را اتم فرض می‌کرد ریشه یونانی کلمه اتم به معنای غیرقابل تقسیم می‌باشد و فکر می‌شد اتم‌ها آخرین ساختار غیرقابل تقسیم از ماده می‌باشند بنابراین اتم‌ها را به عنوان ذرات بنیادی در نظر گرفتند. یکی از موفقیت‌های اصلی فیزیک در قرن بیستم این بود که آشکار ساخت اتم‌ها ذرات بنیادی و غیرقابل تقسیم نیستند بلکه خود اتم‌ها دارای ساختار پیچیده‌ای هستند. اتم شامل یک هسته کوچک و متراکم است که بوسیله یک ابراز الکترون‌ها احاطه شده است. سرانجام مشخص شد که خود هسته می‌تواند به ذرات دیگری (پروتون‌ها و نوترون‌ها) شکسته شود. در دهه اخیر مشخص شد که این ذرات نیز دارای ساختار پیچیده‌ای هستند، آن‌ها از ذرات دیگری بنام کوارک تشکیل شده‌اند. مدل جدید که مدل استاندارد نامیده می‌شود ذرات را به دو گروه اصلی تقسیم می‌کند، بوزون‌ها و فرمیون‌ها. بوزون‌ها ذرات با اسپین ذاتی صحیح هستند که از آمار بوزانیستین تبعیت می‌کنند که همان واسطه‌ها هستند مثل فوتون، Z^0 ، W^\pm و گلوئون‌ها. فرمیون‌ها ذرات با اسپین ذاتی نیم‌صحیح هستند که از آمار فرمی دیراک تبعیت می‌کنند. همه مواد در جهان از ترکیب فرمیون‌ها تشکیل یافته‌اند که به دو دسته تقسیم می‌شوند، لپتون‌ها و کوارک‌ها. لپتون‌ها شامل شش جفت ذره و پادذره هستند که جفت جفت تولید می‌شوند. کوارک‌ها ساختار تشکیل دهنده هادرون‌ها هستند که به دو دسته تقسیم می‌شوند، مزون‌ها و باریون‌ها. پایان نامه حاضر شامل چهار فصل است:

- در فصل اول به معرفی درهم‌تنیدگی کوانتومی و سنجه‌های مختلف درهم‌تنیدگی کوانتومی پرداخته و با مطرح کردن پارادوکس EPR، انواع نامساوی‌ها اعم از نامساوی بل، CHSH، CH و ویگنر را بدست می‌آوریم.
- در فصل دوم به مطالعه و طبقه‌بندی ذرات بنیادی پرداخته و تقارن‌های گسسته پاریته، وارونی زمانی و همیوگی بار را معرفی کرده و به بررسی سیستم‌های مزونی کائون خنثی می‌پردازیم.
- در فصل سوم درهم‌تنیدگی کوانتومی را در سیستم ذرات بررسی نموده و نامساوی بل را برای سیستم‌های کائون‌ها، مزون B و فوتون‌ها بدست می‌آوریم و در ادامه درهم‌تنیدگی کوانتومی

را در اختلاط ذرات مطالعه نموده و به بررسی سیستم نوترینو می پردازیم.

- در فصل چهارم به مطالعه هامیلتونین های شبه هریتی و تقارن PT می پردازیم.

فصل ۱

درهم‌تنیدگی کوانتومی

۱.۱ کیوبیت

یک بیت کوانتومی^۱، یک سیستم کوانتومی دو ترازه می‌باشد که به وسیله یک فضای هیلبرت مختلط دوبعدی توصیف می‌شود [۷]. در این فضا می‌توان یک جفت حالت‌های کوانتومی بهنجار و متعامد به صورت زیر انتخاب نمود:

$$|0\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

که مقادیر صفر و یک، یک بیت کلاسیکی را نمایش می‌دهد. بنابراین اصل برهم‌نهشتی هر حالت کیوبیت به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \quad (2)$$

که ضرایب a و b اعداد مختلطی هستند به طوری که

$$a = |a|e^{i\alpha}, b = |b|e^{i\beta}, |a|^2 + |b|^2 = 1$$

بنابراین رابطه (۲) به صورت زیر درمی‌آید:

$$|\psi\rangle = e^{i\alpha}(|a||0\rangle + |b|e^{i(\beta-\alpha)}|1\rangle)$$

بدون از دست دادن عمومیت مسئله می‌توان انتخاب‌های زیر را انجام داد:

$$|a| = \cos \frac{\theta}{2}, |b| = \sin \frac{\theta}{2}, \beta - \alpha = \varphi$$

آنگاه داریم

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad (0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi) \quad (3)$$

بنابراین غیرمشابه با بیت کلاسیکی که فقط مقادیر صفر و یک را دارد کیوبیت متعلق به یک

فضای برداری می‌باشد که توسط متغیرهای پیوسته a و b (یا φ و θ) پارامتر بندی شده است.

مثال: فضای هیلبرت دو بعدی C^2 یک سیستم کوانتومی دو ترازه را توصیف می‌کند که کیوبیت نامیده می‌شود. بردارهای پایه $(|0\rangle)$ و $(|1\rangle)$ می‌باشد که با $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ نمایش داده می‌شود. $(|0\rangle \equiv (1, 0), |1\rangle \equiv (0, 1))$ قطبش فوتون مثال مهمی از یک کیوبیت می‌باشد که حالت $|\uparrow\rangle$ متناظر با قطبش عمودی^۲ و حالت $|\downarrow\rangle$ متناظر با قطبش افقی^۳ می‌باشد که در فصل‌های بعد به این موضوع پرداخته می‌شود.

۲.۱ کره بلوخ

کره بلوخ^۴ نمایش مفیدی برای توصیف کیوبیت‌هاست [۷]، بدین علت که می‌تواند یک تصویر هندسی از کیوبیت و تبدیلاتی که می‌تواند روی حالت یک کیوبیت اثر کند را، بدهد. با توجه به شرط بهنجارش، هر حالت یک کیوبیت می‌تواند توسط نقطه‌ای بر روی کره‌ای به شعاع واحد نمایش داده شود که کره بلوخ نامیده می‌شود. این کره می‌تواند در یک فضای سه بعدی مختصات کارتزین $(x = \sin\theta\cos\varphi, y = \sin\theta\sin\varphi, z = \cos\theta)$ محاط شود. بنابراین رابطه^(۳) می‌تواند به صورت زیر نوشته شود

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1+z}{2}} \\ \frac{x+iy}{\sqrt{2(1+z)}} \end{pmatrix} \quad (4)$$

یک بردار بلوخ، برداریست با مؤلفه‌های (x, y, z) که یک نقطه روی کره بلوخ را اشغال می‌کند. بنابراین هر بردار بلوخ بایستی شرط بهنجارش $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ را برآورده کند. همچنین زوایای θ و φ یک بردار بلوخ را توصیف می‌کند، چنانکه در شکل نشان داده شده است. برای هر سیستم کوانتومی یک فضای هیلبرت مختلط وجود دارد، حالات فیزیکی خالص با بردارهای واحد فضای هیلبرت متناظرند.

بنابراین فضای همه حالات خالص یک کیوبیت، کره‌ای در فضای اقلیدسی سه بعدی است که

vertical ۲
Horizontal ۳
Bloch sphere ۴

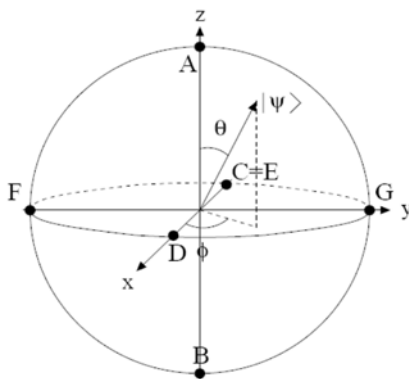
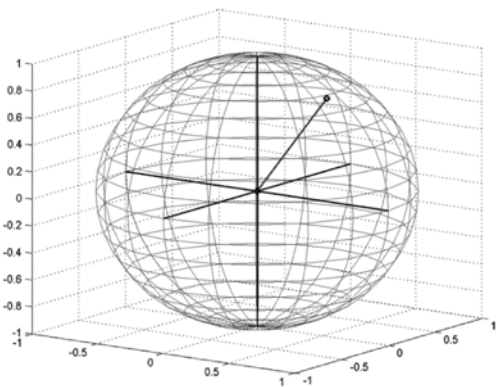
کره بلوخ نامیده می‌شود. حالات فیزیکی مکانیک کوانتومی با عملگرهای آماری که روی فضای هیلبرت اثر می‌کند، توصیف می‌شود.

مثال: یک حالت اسپین $\frac{1}{2}$ ، با ماتریس 2×2 می‌تواند تعریف شود:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & 1 - x_3 \end{pmatrix} \quad (5)$$

که یک ماتریس چگالیست اگر و فقط اگر $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1$.

یک ماتریس چگالی 2×2 که شکل $\frac{1}{2}(I + x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3)$ را دارد و $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1$ به طوریکه x_1 و x_2 و x_3 حداکثر ۱ هستند و σ ها ماتریس‌های پائولی هستند، یک کره واحد تشکیل می‌دهند که کره بلوخ در فضای اقلیدسی سه‌بعدی نامیده می‌شود و حالات خالص روی کره قرار می‌گیرند [۳۴].



شکل (۲.۱.۱) نمایش کره بلوخ، نقاط $A(\alpha = 1, \beta = 0)$ و $B(\alpha = 0, \beta = 1)$ به ترتیب متناظر با حالات $|0\rangle$ و $|1\rangle$ می‌باشد.

۳.۱ ماتریس چگالی

دو یا سه سیستم کوانتومی با برچسب‌های A و B و C را در نظر بگیرید که در واقع نام‌های آلایس و باب و چارلی را نشان می‌دهد. هر سیستم یک فضای هیلبرت مربوط به خود را دارد. به طوریکه فضای هیلبرت کل به صورت زیر می‌باشد [۲۴]:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \quad \dim \mathcal{H}_A = M \leq N = \dim \mathcal{H}_B \quad (6)$$

نمایش‌های زیر را می‌پذیریم:

$$\begin{aligned} \{|e_i\rangle\} \in \mathcal{H}_A \quad |\psi_A\rangle &= \sum_{i=1}^M a_i |e_i\rangle \\ \{|f_j\rangle\} \in \mathcal{H}_B \quad |\psi_B\rangle &= \sum_{j=1}^N b_j |f_j\rangle \end{aligned} \quad (7)$$

به‌طوریکه هر حالت ψ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$|\psi\rangle = \sum_{ij} c_{ij} |e_i\rangle \otimes |f_j\rangle \equiv \sum_{ij} c_{ij} |e_i f_j\rangle \quad |\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \quad (8)$$

به‌طوریکه بعد فضای کل عبارت است از $\dim \mathcal{H} = \dim \mathcal{H}_A \cdot \dim \mathcal{H}_B = M \cdot N$.

مثال: هرگاه آلایس و باب یک سیستم با دو ویژه حالت ممکن $|0\rangle, |1\rangle$ را داشته باشند (به‌عبارتی

هرکدام یک کیوبیت دارند)، حالت فضای هیلبرت کل را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{|0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{|01\rangle - |10\rangle\} \quad (9)$$

همچنین بردارهای حالت را می‌توان به صورت بردارهای فضای چهار بعدی نوشت:

$$\begin{aligned} |0\rangle_A &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_A & |1\rangle_A &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_A \\ |0\rangle_B &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B & |1\rangle_B &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B \end{aligned} \quad (10)$$

$$\Rightarrow |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

هر عملگر O را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$O = \sum_{ijkl} O_{kl}^{ij} |e_i\rangle \otimes |f_j\rangle \langle e_k| \langle f_l| \quad (11)$$

به‌طوریکه هم آلایس و هم باب پایه‌های متعامد دارند:

$$\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij} \quad \langle f_k | f_l \rangle = \delta_{kl} \quad (12)$$

به طوریکه هرگاه $k, k' \in \{1, \dots, NM\}$ آنگاه عملگر O را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$O = \sum_{k, k'} O_{k'}^k |\psi_k\rangle \langle \psi_{k'}| \quad (13)$$

به جای توصیف هر حالت با تابع موج معمولاً از ماتریس چگالی (ρ) استفاده می‌شود، چون هم مفهوم عام‌تری دارد و هم حالات آمیخته را، توصیف می‌کند [۸]. همان‌طور که می‌دانیم حالت یک سیستم فیزیکی کاملاً تعیین شده نمی‌باشد. به عنوان مثال اگر باریکه‌ای از اتم‌ها را در نظر بگیریم که از یک منبع حرارتی گسیل می‌شود انرژی جنبشی هر اتم را نمی‌دانیم بلکه فقط توزیع انرژی جنبشی آن‌ها را می‌دانیم در چنین مواردی گفته می‌شود که اطلاعات ما در مورد آن سیستم ناکامل است و ما فقط با آنسامبلی از حالت‌ها مواجه خواهیم بود:

$$\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_l\rangle\} \quad (14)$$

با احتمالات $\{p_1, p_2, \dots, p_l\}$ به طوریکه $\sum_i p_i = 1$. در اینجا خیلی مفید خواهد بود که عملگری بنام عملگر چگالی را معرفی کنیم که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\rho \equiv \sum_k p_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k| \quad (15)$$

با در نظر گرفتن پایه‌های اورتونرمال $\{|i\rangle\}, i = 1, 2, \dots, n$ که بعد فضای هیلبرت سیستم مربوطه است می‌توان برای عملگر چگالی یک نمایش ماتریسی تعریف کرد. ماتریس مربوطه، ماتریس چگالی نامیده می‌شود که عناصر آن به صورت زیر می‌باشد:

$$\rho_{ij} \equiv \langle i | \rho | j \rangle \quad (16)$$

مثال: فرمالیسم عملگر چگالی را برای یک کیوبیت بدست می‌آوریم. چنان‌که در قسمت قبلی گفته شد، حالت خالص یک کیوبیت با یک نقطه روی کره‌ای به شعاع واحد (کره بلوخ) نمایش داده می‌شود. این نقطه با مختصات کروی θ و φ مشخص می‌شود که به صورت زیر می‌باشد:

$$|\psi(\theta, \varphi)\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle,$$

که $|0\rangle$ و $|1\rangle$ ، ویژه حالات ماتریس پائولی σ_z می‌باشد. ماتریس چگالی مربوطه به صورت زیر می‌باشد:

$$\rho(\theta, \varphi) = |\psi(\theta, \varphi)\rangle \langle \psi(\theta, \varphi)|,$$

ماتریس چگالی در پایه‌های $|0\rangle$ و $|1\rangle$ عبارت است از

$$\rho(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} & \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

تعریف:

(۱) ρ یک عملگر در فضای $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ می‌باشد.

(۲) $\rho = \rho^\dagger$ هرمیتی است یعنی

اثبات: هر حالت خالص $|\psi_k\rangle$ را روی پایه‌های اورتونرمال می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$|\psi_k\rangle = \sum_{i=1}^n c_i |i\rangle \quad (17)$$

آنگاه داریم

$$\begin{aligned} \rho_{ij} &= \sum_{k=1}^l p_k \langle i | \psi_k \rangle \langle \psi_k | j \rangle \\ &= \sum_{k=1}^l p_k \sum_{l,m=1}^n c_l c_m^* \langle i | l \rangle \langle m | j \rangle \\ &= \sum_{k=1}^l p_k c_i c_j^* \end{aligned} \quad (18)$$

در سطر آخر از شرط بهنجارش $\langle m | j \rangle = \delta_{mj}$ ، $\langle i | l \rangle = \delta_{il}$ استفاده شده است. با توجه به اینکه

$$\rho_{ji}^* = \sum_{k=1}^l p_k c_j^* c_i = \rho_{ij} \quad (19)$$

نتیجه می‌گیریم که ρ هرمیتی است.

(۳) $\rho > 0$ ، یعنی برای هر بردار $|\varphi\rangle$ مربوط به فضای هیلبرت \mathcal{H} ، $\langle \varphi | \rho | \varphi \rangle \geq 0$. که این

تعریف هم‌ارز با این است که همهٔ ویژه مقادیر مثبت‌اند.

اثبات:

$$\langle \varphi | \rho | \varphi \rangle = \langle \varphi | \left(\sum_{k=1}^l p_k |\psi_k\rangle \langle \psi_k| \right) | \varphi \rangle = \sum_{k=1}^l p_k |\langle \varphi | \psi_k \rangle|^2 \geq 0 \quad (20)$$

$$Tr(\rho) = 1 \quad (4)$$

اثبات:

$$Tr \rho = \sum_{i=1}^n \rho_{ii} = \sum_{k=1}^l p_k \sum_{i=1}^n |c_i|^2 = \sum_{k=1}^l p_k = 1 \quad (21)$$

توجه: برای حالات خالص $Tr \rho^2 = 1$ و برای حالات آمیخته $Tr \rho^2 < 1$ که در بخش بعدی با حالات خالص و آمیخته آشنا خواهیم شد.

ترانهاد جزئی^۵:

دوباره ماتریس چگالی ρ را در نظر بگیرید که روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ اثر می‌کند، هرگاه

$$\rho = \sum_{ijkl} \rho_{kl}^{ij} |i\rangle_A \otimes |j\rangle_B \langle k|_A \otimes \langle l|_B \quad (22)$$

آنگاه

$$\rho^{TA} = \sum_{ijkl} \rho_{kl}^{ij} |k\rangle_A \otimes |j\rangle_B \langle i|_A \otimes \langle l|_B$$

بنابراین $(\rho^{TA})_{kl}^{ij} = \rho_{il}^{kj}$. به عنوان مثال هرگاه

$\mathcal{H}_A = \mathbb{C}^2, \mathcal{H}_B = \mathbb{C}^N$ آنگاه ρ یک ماتریس $2N \times 2N$ می‌باشد که به صورت زیر نوشته

می‌شود:

$$\rho = (|0\rangle_A \langle 0|)A + (|0\rangle_A \langle 1|)B + (|1\rangle_A \langle 0|)B^\dagger + (|1\rangle_A \langle 1|)C \quad (23)$$

به طوریکه ماتریس‌های $A = A^\dagger, B, C = C^\dagger$ روی فضای باب اثر می‌کنند. ρ را می‌توان بدین

صورت نوشت:

$$\rho = \begin{pmatrix} A & B \\ B^\dagger & C \end{pmatrix} = \rho^\dagger, \quad \rho^{TA} = \begin{pmatrix} A & B^\dagger \\ B & C \end{pmatrix}, \quad \rho^{TB} = \begin{pmatrix} A^T & B^T \\ B^* & C^T \end{pmatrix}$$

$$\rho^T = \begin{pmatrix} A^T & B^* \\ B^T & C^T \end{pmatrix} \Rightarrow (\rho^{TA})^{TB} = \rho^T$$

ترانهاد جزئی یک عملگر فیزیکی قوی است. ترانهاد به‌عنوان وارونی زمانی نامیده می‌شود، چنان‌که ترانهاد جزئی به این معنی است که مثلاً آلیس زمان را وارون می‌کند در حالی‌که باب نه.

۴.۱ درهم‌تنیدگی و جداپذیری

اصل برهم‌نهی^۱: این اصل یک مفهوم مکانیک کوانتومی است که مشابهت کلاسیکی ندارد و نتیجه خطی بودن معادله شرودینگر می‌باشد که هر ترکیب خطی از جواب‌های معادله شرودینگر خود جواب معادله می‌باشد [۲۱]:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = H |\psi\rangle \quad (24)$$

که اگر $|\psi_1\rangle$ و $|\psi_2\rangle$ جواب معادله باشند، $|\psi\rangle$ هم جواب خواهد بود:

$$|\psi\rangle = \lambda_1 |\psi_1\rangle + \lambda_2 |\psi_2\rangle \quad (25)$$

که اگر $|\psi_1\rangle$ و $|\psi_2\rangle$ متعامد باشند بایستی $|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 = 1$ تا ترکیب خطی به‌نجار داشته باشیم. جالب است که احتمال اندازه‌گیری مشاهده‌پذیر A را بررسی کنیم، ترکیب خطی فوق را در نظر گرفته و A را اندازه‌گیری می‌کنیم، احتمال پیدا کردن ویژه مقدار a_n هرگاه سیستم در حالت $|\psi_1\rangle$ باشد:

$$P_1(a_n) = |\langle u_n | \psi_1 \rangle|^2 \quad (26)$$

و برای $|\psi_2\rangle$ هم حالت مشابهی داریم. احتمال پیدا کردن a_n در حالت مرکب چنین است:

$$\begin{aligned} P_1(a_n) &= |\langle u_n | (\lambda_1 |\psi_1\rangle + \lambda_2 |\psi_2\rangle) \rangle|^2 \\ &= |\lambda_1|^2 P_1(a_n) + |\lambda_2|^2 P_2(a_n) + 2 \operatorname{Re} [\lambda_1 \lambda_2^* \langle u_n | \psi_1 \rangle \langle u_n | \psi_2 \rangle] \end{aligned} \quad (27)$$

که حضور یک جمله تداخلی را می‌بینیم و این رفتار کاملاً کوانتومی است که هیچ مشابهت کلاسیکی ندارد.

درهم‌تنیدگی: یک نمایش غیرعادی مکانیک کوانتومی درهم‌تنیدگی می‌باشد که در سیستم‌های مرکب مشاهده می‌شود [۷]. درهم‌تنیدگی همبستگی کوانتومی دو یا چند ذره است حتی وقتی به طور فضایی از هم جدا شده باشند. در حالت‌های درهم‌تنیده، حالت‌های کوانتومی هر ذره بایستی با اشاره به دیگر ذرات توصیف شود. بنابراین نتایج اندازه‌گیری همبسته می‌باشد. اگر دو ذره درهم‌تنیده در حالت اسپین تک‌تایی باشد اندازه‌گیری اسپین بالا برای ذره اول منجر به اسپین پایین برای ذره دیگر می‌شود. بنابراین نتیجه اندازه‌گیری روی یک ذره، روی ذره دیگر تأثیر می‌گذارد، این رفتار منجر به پارادوکس *EPR* می‌شود که توضیح داده خواهد شد. این رفتار مشابهت کلاسیکی ندارد و خیلی مفید است که در فرمول‌بندی مکانیک کوانتومی توصیف شود.

دو سیستم غیر برهمکنشی A و B با فضاها $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ هیلبرت در نظر بگیرد:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \quad (28)$$

بدیهی‌ترین پایه‌ها برای فضای هیلبرت \mathcal{H} ، از ضرب تانسوری بردارهای پایه فضای $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ ساخته می‌شود. به عنوان مثال اگر فضاها $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ هیلبرت دو بعدی باشد، نمایش بردارهای پایه‌شان به صورت زیر خواهد بود:

$$\{|0\rangle_1, |1\rangle_1\}, \{|0\rangle_2, |1\rangle_2\}$$

بنابراین یک پایه برای فضای هیلبرت توسط پایه‌های زیر بدست می‌آید:

$$\{|0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2, |0\rangle_1 \otimes |1\rangle_2, |1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2, |1\rangle_1 \otimes |1\rangle_2\}$$

بنابراین اصل برهنه‌شده، یک حالت اختیاری از فضای \mathcal{H} به صورت زیر می‌باشد:

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j=0}^1 c_{ij} |i\rangle_1 \otimes |j\rangle_2 = \sum_{i,j} c_{ij} |ij\rangle \quad (29)$$