دانشگاه صنعتی خواجه نصیر الدین طوسی
دانشکده علوم – گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی کاربردی – آنالیز عددی

موضوع:

حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل جبری کسری با استفاده از روش آنالیز هموتوپی

نگارش:

لیلا احفادی

اساتید راهنما:

دکتر عظیم امین عطائی

دکتر علی ذاکری

شهریور ۱۳۹۱

به نام خدا

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم

که بهترین برایم خواستند و بهترین برایم هستند.

اظهارنامه دانشجو

موضوع پایان‌نامه: حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل جبری کسری با استفاده از روش آنالیز هموتوپی

اساتید راهنما: دکتر عظیم امین عطائی و دکتر علی ذاکری

نام دانشجو: لیلا احفادی

شماره دانشجویی: ۸۹۰۵۷۷۴

اینجانب لیلا احفادی دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی دانشکده علوم دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی گواهی می‌نمایم که تحقیقات ارائه شده در این پایان‌نامه توسط شخص اینجانب انجام شده و صحت و اصالت مطالب نگارش شده مورد تایید می‌باشد و در مورد استفاده از کار دیگر محققان به مرجع مورد استفاده اشاره شده است. همچنین گواهی می‌نمایم که مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی توسط اینجانب یا فرد دیگری در هیچ جا ارائه نشده است و در تدوین متن پایان‌نامه آئین نامه مصوب دانشگاه را به طور کامل رعایت کرده‌ام.

امضاء دانشجو:

تاریخ:

فرم حق طبع و نشر و مالکیت نتایج

۱-حق چاپ و تکثیر این پایان‌نامه متعلق به نویسنده آن می‌باشد .هرگونه کپی برداری بصورت کل پایان‌نامه یا بخشی از آن تنها با موافقت نویسنده یا کتابخانه دانشکده علوم پایه دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی مجاز می‌باشد.

۲-کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی می‌باشد و بدون اجازه کتبی دانشگاه به شخص ثالث قابل واگذاری نیست.

همچنین استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

تشکر و قدردانی

خدای متعال را سپاسگزارم که توفیق اتمام این پایان‌نامه را به من ارزانی داشت. از راهنمایی‌های ارزشمند اساتید گرامی جناب آقای دکتر عظیم امین عطائی و دکتر علی ذاکری در راستای انجام این پروژه کمال تشکر را دارم. لازم می دانم از اساتید محترم آقایان دکتر محمود هادی‌زاده به عنوان داور داخلی و دکتر داوود رستمی به عنوان داور خارجی که زحمت مطالعه و داوری این رساله را پذیرفتند به جهت راهنمایی‌های ارزنده شان قدردانی نمایم.

در پایان از پدر و مادر عزیزم، خواهر و برادرانم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان تشکر می‌کنم. همچنین از تمامی دوستانم که مرا در آماده‌سازی این پایان‌نامه کمک کردند سپاسگزارم.

چکیده رساله

در این پایان‌نامه به معرفی روش آنالیز هموتوپی پرداخته و از آن در حل معادلات دیفرانسیل جبری کسری استفاده می‌کنیم. این روش دارای این نقطه قوت است که در آن آزادی فراوانی برای انتخاب فاکتورهای موجود دخیل می‌باشد. همچنین اطمینان از همگرا بودن و ناحیه همگرایی آن تحت پارامتر کمکی $\hbar$ بر اعتبار این روش می‌افزاید.

واژگان کلیدی: دستگاه معادلات دیفرانسیل جبری کسری، روش آنالیز هموتوپی، معادله دیفرانسیل کسری

مقدمه

برای حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی از روش‌های عددی و تحلیلی استفاده می‌شود که هر کدام از این روش‌ها دارای مزیت‌ها و معایبی هستند در این پایان‌نامه از روش تحلیلی به نام روش آنالیز هموتوپی برای حل دستگاه معادلات جبری کسری استفاده می‌کنیم.

این پایان‌نامه در چهار فصل به شرح زیر تنظیم شده است: فصل اول به بیان تعاریف و مفاهیم مقدماتی مورد نیاز در فصل‌های آتی می‌پردازد.

فصل دوم مربوط به محاسبات کسری و جبری می‌شود که در ابتدا تاریخچه پیدایش آنها را توضیح داده و سپس تعاریف اساسی آن دو را می‌آوریم و در مورد وجود و یکتایی جواب معادلات کسری توضیح داده و چند روش حل از معادلات کسری و جبری به طور مختصر شرح می‌دهیم.

فصل سوم که اصلی‌ترین بخش این پایان‌نامه را تشکیل می‌دهد روش اختلال هموتوپی و روش آنالیز هموتوپی را در حالت کلی شرح داده و قضیه همگرایی را برای روش آنالیز هموتوپی ثابت می‌کنیم و سپس روش آنالیز هموتوپی را برای معادلات جبری کسری شرح می‌دهیم و چند مثال از معادلات جبری کسری می‌آوریم که با روش آنالیز هموتوپی حل می‌شوند.

در فصل آخر روش‌های تجزیه آدومیان و روش تکرار تغییراتی را شرح می‌دهیم و با حل یک مثال از معادلات جبری از مرتبه کسری نتایج این دو روش را با روش آنالیز هموتوپی مقایسه می‌کنیم.

فهرست مطالب

فهرست نمودارها

فهرست جدول‌ها

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ مقدمه

در این فصل قصد داریم تا برخی از مفاهیم اولیه و بنیادی را که در فصل‌های بعدی از آن‌ها استفاده خواهیم کرد، ارائه نماییم.

۲.۱ تابع گاما

تابع گاما[1] که با نماد Γ نمایش داده می‌شود، به ازای عدد حقیقی α به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(\alpha)=\int_{0}^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt \qquad (1-1)$$

و دارای خواص زیر می‌باشد:

۱. $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$ ،

۲. $\Gamma(\alpha+n)=\Gamma(\alpha)\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)$ ،

۳. $\Gamma(mz)=\frac{2^{mz-1}}{(2\pi)^{(m-1)/2}}\prod_{k=0}^{m-1}\Gamma(z+\frac{k}{m}), \quad (z\in C), \quad (m\in\mathbb{N}/\{1\})$ ،

۴. $\Gamma(n+\frac{1}{2})=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\pi^{\frac{1}{2}}, \quad (2n-1)!!=1\times 3\dots(2n-1), \quad n\in\mathbb{N}$ ،

۵. $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{sin(\pi z)}, \quad z\notin Z_0, \quad 0<Re(z)<1$ ،

۶. $\Gamma(z)=\frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\dots(z+n+1)}, \quad n\in\mathbb{N}, \quad z\notin Z_0^- := \{0,-1,-2,\dots\}$ ،

۳.۱ تابع میتاژ-لفلر

حوزه کاربرد این تابع به‌قدری گسترده است که مفاهیم بسیار فراوان، تعاریف و قضایا و کاربردهای بسیار شگرفی را به دنبال داشته است. از این رو به بررسی آن می‌پردازیم.

[1] Gamma

تابع میتاگ-لفلر[1] با نماد E_α نمایش داده می‌شود، [۵]،[۶]،[۹] و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E_\alpha(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}\ \ ,z\in\mathbb{R}. \tag{۱-۲}$$

به عنوان تعمیمی از تعریف ۱.۳.۱ می‌توان تابع میتاژ-لفلر دو پارامتری [۱] را به شکل زیر در نظر گرفت:

$$E_{\alpha,\beta}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{\Gamma(\alpha n+\beta)}\qquad \alpha,\beta>0. \tag{۱-۳}$$

۱.۳.۱ محاسبه مشتق مرتبه k ام تابع میتاژ-لفلر دو پارامتری

با بهره جویی از برخی خواص مقدماتی توابع جبری خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}E_{\alpha,\beta}(t)=\frac{\partial^k}{\partial t^k}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{t^j}{\Gamma(\alpha j+\beta)}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{j(j-1)\dots(j-k)t^{j-k}}{\Gamma(\alpha j+\beta)}$$

$$=\sum_{j=k}^{\infty}\frac{j(j-1)\dots(j-(k-1))t^{j-k}}{\Gamma(\alpha j+\beta)}=\sum_{j=k}^{\infty}\frac{j!}{(j-k)!}\frac{t^{j-k}}{\Gamma(\alpha j+\beta)} \tag{۱-۴}$$

$$=k!\sum_{j=k}^{\infty}\binom{j}{k}\frac{t^{j-k}}{\Gamma(\alpha j+\beta)}.$$

۲.۳.۱ محاسبه انتگرال تابع میتاژ-لفلر دو پارامتری

با انتگرال‌گیری جمله به جمله از (۳-۴) داریم:

$$\int_a^t E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)t^{\beta-1}=Z^\beta E_{\alpha,\beta+1}(\lambda Z^\alpha),\qquad \beta>0. \tag{۱-۵}$$

لم ۱.۳.۱. *خواص زیر برای توابع میتاژ-لفلر برقرار می‌باشند:*

۱. $E_{1,1}(Z)=e^Z$,

۲. $E_{1,n}(Z)=\frac{1}{Z^{n-1}}(e^Z-\sum_{k=0}^{m-2}\frac{Z^k}{k!})$,

[1] Mittag-leffeler

۳. $E_{2,1}(Z^2) = coshZ$,

۴. $E_{2,2}(Z^2) = \frac{sinh(Z)}{Z}$,

۵. $E_{\alpha,1}(Z) = E_\alpha(Z)$.

تعریف ۱.۳.۱. *تابع حقیقی $\|.\|$ تعریف شده بر فضای برداری $\mathbb{X}$ را یک نرم[1] می‌نامیم هرگاه در سه خاصیت زیر صدق کند:*

۱. *برای هر $x \in \mathbb{X}$ داشته باشیم $\|x\| \geq 0$ و نیز $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.*

۲. *برای هر $x \in \mathbb{X}, \alpha \in \mathbb{R}$ ، $\|\alpha x\| = |\alpha|.\|x\|$.*

۳. *برای هر $x, y \in \mathbb{X}$ داشته باشیم $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.*

تعریف ۲.۳.۱. *فرض کنید تابع $(d \geq 2)$ و $Y : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times I \to \mathbb{R}^d$ یک تابع تعریف شده به صورت*

$$Y(X'(t), X(t), t) = 0 \quad , t \in [0, T]$$

باشد به طوریکه $X = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$ و $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_d)$. آنگاه ماتریس ژاکوبین J به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J = \frac{\partial Y}{\partial X'} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x'_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x'_d} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial y_d}{\partial x'_1} & \cdots & \frac{\partial y_d}{\partial x'_d} \end{pmatrix}.$$

۴.۱ قضیه تابع ضمنی

دستگاه معادلات غیر خطی شامل m معادله و n متغیر را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$f_i(X) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

[1] Norm

قضیه تابع ضمنی به این سوال می‌پردازد که اگر $n-m$ متغیر را ثابت نگه داریم، آیا می‌توان دستگاه فوق الذکر را نسبت به m متغیر باقیمانده حل کرد؟ در واقع می‌خواهیم با انتخاب m متغیر $x_۱, x_۲, \dots, x_m$ تعیین کنیم که آیا قادر به بیان متغیرهای مورد نظر بر حسب بقیه متغیرها به صورت زیر خواهیم بود:

$$x_i = g_i(x_{m+۱}, x_{m+۲}, \dots, x_n), \qquad i = ۱, ۲, \dots m.$$

که در آن توابع g_i، در صورت وجود توابع ضمنی نامیده می‌شوند.

قضیه ۱.۴.۱. *(قضیه تابع ضمنی) فرض‌کنید* $x^\circ = (x^\circ_۱, x^\circ_۲, \dots, x^\circ_n) \in \mathbb{R}^n$ *در شرایط زیر صدق کند:*

۱. *توابع f_i برای $i = ۱, ۲, \dots, m$، در یک همسایگی از x°، برای هر $p \in \mathbb{N}$ به C^p تعلق دارند. به عبارت دیگر تابع f_i در یک همسایگی x°، بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر پیوسته است.*

۲. $f_i(x^\circ) = ۰$ *برای* $i = ۱, ۲, \dots, m$.

۳. *ماتریس ژاکوبی* $m \times m$ ،

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_۱(x^\circ)}{\partial x'_۱} & \cdots & \frac{\partial f_۱(x^\circ)}{\partial x'_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(x^\circ)}{\partial x'_۱} & \cdots & \frac{\partial f_m(x^\circ)}{\partial x'_m} \end{pmatrix}$$

غیر منفرد است.

در این صورت یک همسایگی از $\widehat{x}^\circ = (x^\circ_{m+۱}, x^\circ_{m+۲}, \dots, x^\circ_n) \in \mathbb{R}^{n-m}$ *وجود دارد به طوری که برای* $\widehat{x} = (x_{m+۱}, x_{m+۲}, \dots, x_n)$ *در این همسایگی، توابع* $g_i(\widehat{x})$ *برای* $i = ۱, ۲, \dots, m$ *وجود دارند که در آن*

۱. $g_i \in C^p$

۲. $x^\circ_i = g_i(\widehat{x}^\circ)$ *برای* $i = ۱, ۲, \dots, m$.

۳. $f_i(g_۱(\widehat{x}), g_۲(\widehat{x}), \dots, g_m(\widehat{x}), \widehat{x}) = ۰$ *برای* $i = ۱, ۲, \dots m$.

مسائل اختلال منفرد

مسائل اختلال منفرد[۱] دسته‌ای از معادلات هستند که شامل پارامتر ε می‌باشند. زمانی که این پارامتر کوچک است معادله دیفرانسیل معمولی مطابق با آن پیچیده می‌شود و در حالتی که این پارامتر به سمت صفر میل کند آنگاه دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی[۲] به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جبری[۳] تبدیل می‌شود. مسائل اختلال منفرد در دینامیک سیالات، مطالعه نوسانات غیر خطی با پارامتر بزرگ و یا در مطالعه واکنش‌های شیمیایی سریع و ... مورد استفاده قرار می‌گیرد.
دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر نمونه‌ای از مسائل اختلال منفرد است:

$$\begin{cases} y' = f(t, y, z), \\ \varepsilon z' = g(t, y). \end{cases}$$

هرگاه در این دستگاه ε به سمت صفر میل کند دستگاه معادلات دیفرانسیل جبری زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} y' = f(t, y, z), \\ 0 = g(t, y). \end{cases}$$

تعریف ۱.۴.۱. *فرض کنید که X دسته‌ای از زیرمجموعه‌های $S \neq \phi$ باشد و داشته باشیم:*

۱. $S \in X$ و $\phi \in X$.

۲. $\bigcup_i X_i \in X$ ، $\forall X_i \in X$.

۳. *برای هر n ثابت دلخواه داشته باشیم:* $\bigcap_{i=1}^{n} X_i \in X$.

در این صورت X را یک فضای توپولوژیک از زیرمجموعه‌های S می‌گویند. به عنوان نمونه $\{S, \phi\}$ و $P(S)$ دو فضای توپولوژیک بدیهی برای S می‌باشند.

[۱] Singularly Perturbed Problem
[۲] ODE
[۳] DAE

تعریف ۲.۴.۱. *فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیک باشند و $f, g : X \to Y$. هموتوپی از f به g یک تابع پیوسته مانند $F : X \times [0, 1] \to Y$ است به طوری که داشته باشیم:*

$$F(x, 1) = g(x), \qquad F(x, 0) = f(x)$$

اگر این هموتوپی[1] موجود باشد دو تابع f و g را هموتوپیک[2] گویند و می‌نویسیم $f \simeq g$. همچنین اگر یک تابع با تابع ثابت هموتوپیک باشد آن را نال هموتوپیک [3] گویند.

به عنوان نمونه فرض کنید $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دو تابع فرض باشند. تابع $F : \mathbb{R} \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x).$$

بدیهی است که F پیوسته می‌باشد و بعلاوه $F(x, 0) = f(x)$ و $F(x, 1) = g(x)$ پس F یک هموتوپی بین f و g است.

۱.۴.۱ تابعی

نگاشتی از، مجموعه‌ای از توابع، به $\mathbb{R}$ را تابعی گویند.

تابعی نوعی تابع می‌باشد که متغیر مستقل آن، خود یک تابع می‌باشد.

به عنوان مثال، نگاشت J از فضای $C[a, b]$ به $\mathbb{R}$ با رابطه زیر یک تابعی می‌باشد:

$$J(y) = \int_a^b f(x, y, y')dx$$

که $x \in [a, b]$ و $y(x) \in C[a, b]$.

۲.۴.۱ نظریه تغییراتی

این نظریه در محاسبه مقدار ماکسیمم یا مینیمم تابعی‌ها به کار می‌رود و به صورت زیر بیان می‌شود:

به‌دست آوردن تابعی که تحت آن، تابعی مورد نظر ماکسیمم یا مینیمم گردد.

---

[1] Homotopy

[2] Homotopic

[3] Nullhomotopy