بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه لرستان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

عنوان

روش مشتق‌گیری پسرو بلوکی پیوسته برای حل معادلات سخت

نگارش

مرضیه علی‌شاهی

استاد راهنما

دکتر بهمن غضنفری

استاد مشاور

دکتر مجتبی قاسمی

پایان‌نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی

بهمن ۱۳۹۳

چکیده

عنوان پایان‌نامه: روش مشتق‌گیری پسرو بلوکی پیوسته برای حل معادلات سخت

استاد راهنما: دکتر بهمن غضنفری　　**استاد مشاور:** دکتر مجتبی قاسمی کمالوند

درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد　　**رشته:** ریاضی کاربردی(آنالیز عددی)

محل تحصیل: دانشگاه لرستان　　**دانشکده:** علوم پایه

تعداد صفحات: ۱۲۱ صفحه

کلید واژه‌ها: مسائل سخت، فرمول مشتق‌گیری پسرو بلوکی پیوسته،
معادلات دیفرانسیل معمولی، پایداری.

چکیده: در این رساله، یک فرمول مشتق‌گیری پسرو بلوکی پیوسته ضمنی را برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی در نظر می‌گیریم. در هر گام یک بلوک از p مقدار جدید که جواب هایی تقریبی برای معادله دیفرانسیل معمولی هستند، بطور همزمان به دست می‌آید.
مزیت‌های محاسبه‌ای روش بلوکی پیوسته با مقایسه نتایج حاصل از این روش و
حل کننده ode۲۳s در نرم‌افزار MATLAB ارائه شده است.
نتایج عددی اشاره براین موضوع دارند که روش مشتق‌گیری پسرو بلوکی پیوسته در بهبود تعداد گام‌های انتگرال‌گیری و دقّت موثرتر می‌باشند.

الهی... [1]

الهی به حرمت آن نام که تو خوانی و به حرمت آن صفت که تو چنانی دریاب که می توانی.

الهی عمر خود به باد کردم و بر تن خود بیداد کردم گفتی و فرمان نکردم، درماندم و درمان نکردم.

الهی عاجز و سرگردانم، نه آنچه دارم دانم و نه آنچه دانم دارم.

الهی اگر تو مرا خواستی من آن خواستم که تو خواستی.

الهی به بهشت و حور چه نازم مرا دیده ای ده که از هر نظر بهشتی سازم.

الهی در دل های ما جز تخم محبت مکار و بر جان های ما جز الطاف و مرحمت منگار
و بر کشت های ما جز باران رحمت خود مبار. به لطف ما را دست گیر و به کرم پای دار،

الهی حجاب ها از راه بردار و ما را به ما مگذار.

---

[1] مناجاتی از خواجه عبدالله انصاری.

سپاس گزاری...

ستایش بی آلایش یکتا دارایی را سزد که هستی ها همه از تابش اوست

و پرستش و نیایش بیهمتا خدایی را زیبد که دانا و بینا و توانا و برگشت همه به او و پیدایش از وست.

الهی ای مهربانتر از ما به ما، از تو می خواهم همه کسانی را که حتی ذره ای در انجام این امر مرا یاری نموده اند، در سایه لطف و محبت بی کرانت، سلامت، شادکام و موفق بداری.

و با تشکر و قدردانی از زحمات بی دریغ استاد راهنما جناب آقای دکتر غضنفری و

راهنمایی های ارزنده استاد مشاور جناب آقای دکتر قاسمی.

از آقایان دکتر یاراحمدی و دکتر عباسی که زحمت داوری این پایان نامه با ایشان بوده است، متشکرم.

پدر، مادر عزیزم، از زحمات بی دریغ و بی منت شما متشکرم.

همیشه نیازمند محبت، لطف و دعای خیر شما هستم.

مقدمه

معادلات دیفرانسیل معمولی در بسیاری از مسائل کاربرد دارند. در مبحث معادلات دیفرانسیل وقت زیادی صرف تجزیه و تحلیل و یادگیری فنون و روش‌های تحلیلی برای به دست آوردن جواب آن‌ها می‌شود. این کار با دسته بندی معادلات انجام می‌گیرد و نشان داده می‌شود که دسته خاصی از معادلات را می‌توان به روش تحلیلی حل کرد. اما معادلات دیفرانسیل فراوانی وجود دارد که نمی‌توان به روش‌های تحلیلی موجود جواب آن‌ها را به دست آورد. حتی در مواقعی که می‌توان جواب تحلیلی معادلات را به دست آورد، این جواب ممکن است دارای فرم پیچیده‌ای باشد.

لذا حل عددی معادلات دیفرانسیل مبحثی است که بسیار مورد نظر و پرکاربرد است. از ویژگی‌های بسیار مهم و تأثیرگذار در همگرایی روش‌های عددی پایداری این روش‌ها می‌باشد. هر اندازه که ناحیه پایداری روش وسیع‌تر باشد استقلال روش از طول گام گسسته‌سازی بازه انتگرال‌گیری بیش‌تر می‌باشد. در تقسیم بندی روش‌های عددی حل معادلات دیفرانسیل به دو دسته صریح و ضمنی و بررسی این روش‌ها مشاهده می‌شود که روش‌های ضمنی از نواحی پایداری بزرگ‌تری برخوردار می‌باشند.
در سال ۱۹۵۲ کورتیس و هرچ فلدر [۲] با معادله دیفرانسیلی مواجه شدند که روش‌های صریح برای حل عددی این مسأله کارآمد نبود [۴].
از این تاریخ به بعد دسته‌بندی جدیدی در معادلات دیفرانسیل به وجود آمد: ۱ -معادلات سخت [۳] و ۲-معادلات غیرسخت. در فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی، ستاره‌شناسی و ... مدل‌سازی ریاضی حاکم بربسیاری از پدیده‌ها منجر به یک مسأله سخت می‌شود. در حل عددی مسائل سخت انتخاب طول گام

[۲] Curtiss and Hirschfelder

[۳] Stiff equation

گسسته‌سازی بازه‌ی انتگرال‌گیری بسیار مهم می‌باشد. از این رو به کارگیری روش عددی که هر چه بیش‌تر مستقل از طول گام گسسته‌سازی باشد (روشی با ناحیه پایداری وسیع) برای حل این گونه مسائل مهم می باشد.

روش‌های مشتق‌گیری پسرو (BDF) در سال ۱۹۵۲ توسط کورتیس و هرچ فلدر معرفی شدند. در سال ۱۹۷۱ جر [۴] به منظور انتگرال‌گیری از معادلات سخت از این فرمول‌ها استفاده کرد. دقّت، پایداری و همگرایی روش‌های BDF سبب استفاده وسیع این روش‌ها برای حل مسائل سخت شد. در سال‌های اخیر مطالعه روش‌های عددی برای حل مسائل سخت منجر به دستیابی به الگوریتم‌ها و برنامه‌هایی بسیار کارآمد شده است. دو مؤلفه تعیین‌کننده در بررسی و مقایسه کارایی این برنامه‌ها، دقّت و میزان عملیات‌های محاسباتی می‌باشد. روش‌های بلوکی ابتدا توسط مایلن [۵] معرفی شدند [۱۲]. با بلوکی کردن روش‌های عددی میزان محاسبات را می‌توان به اندازه چشم‌گیری کاهش داد.

در این پایان‌نامه ضمن به دست آوردن روش‌های بلوکی BDF کارایی بسیار عالی و دقّت این روش ها برای حل مسائل سخت بررسی می‌شود. این پایان‌نامه شامل سه فصل می‌باشد که در فصل اول برخی تعاریف و مفاهیم اولیه بیان می‌شود، در فصل دوم به شرح روش مشتق‌گیری پسرو بلوکی پیوسته (CBBDF) و بررسی ویژگی‌های دقّت، همگرایی و پایداری این روش پرداخته می‌شود و در فصل سوم کارایی و دقّت روش مشتق‌گیری پسرو بلوکی پیوسته با ذکر مثال‌های عددی با حل‌کننده مسائل سخت در نرم‌افزار MATLAB ۷.۱۲(R۲۰۱۱a) یعنی ode۲۳s مقایسه می‌شود.

---

[۴] Gear

[۵] Milne

مقاله اصلی مورد مطالعه و بررسی در این پایان‌نامه، مقاله زیر می‌باشد:

Continuous block backward differentiation formula for

solving stiff ordinary differential equations

Yaoa N.M. b، Jator S.N. Akinfenwaa، O.A.

در انتهای این پایان‌نامه، کتاب‌نامه و واژه‌نامه فارسی به انگلیسی مورد استفاده در این پایان‌نامه درج شده است.

فهرست مطالب

لیست تصاویر

لیست جداول

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

۱.۱ مقدمه

در این فصل به بررسی جواب‌های عددی مسأله کوشی می‌پردازیم. پس از نگاهی اجمالی به مفاهیمی در ارتباط با معادلات دیفرانسیل معمولی، تکنیک‌هایی را برای دستیابی به تقریب عددی معادلات اسکالری معرفی می‌کنیم. سپس مفاهیم سازگاری، همگرایی، صفر پایداری و پایداری مطلق را بیان نموده و این مفاهیم را به دستگاه معادلات دیفرانسیل تعمیم می‌دهیم. در خاتمه به بیان مفهوم مسائل سخت در معادلات دیفرانسیل می‌پردازیم. مطالب این فصل برگرفته از مراجع [۳-۱] می‌باشند.

۲.۱ مسأله کوشی

مطالب ارائه شده در این بخش برگرفته از مرجع [۱] می‌باشند.

مسأله کوشی [۱] (مشهور به مسأله مقدار آغازین) یافتن جواب یک معادله دیفرانسیل معمولی (ODE) [۲] در حالت اسکالر یا برداری است. به ویژه در حالت اسکالر، با مشخص کردن یک بازه I روی $\mathbb{R}$ شامل نقطه x_0 مسأله کوشی به عنوان یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول مطالعه می‌شود.

$$\begin{cases} y' = f(x, y(x)), \qquad x \in I \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{۱.۱}$$

که $f(x,y)$ یک تابع حقیقی مقدار و پیوسته روی نوار $S = I \times (-\infty, +\infty)$ است. اگر وابستگی f به x فقط از طریق y باشد، آن‌گاه معادله دیفرانسیل خودگردان [۳] نامیده می‌شود.

یک معادله دیفرانسیل معمولی را می‌توان به معادله خودگردان تبدیل کرد:

$$y' = f(x, y(x)) \quad , \quad X = \begin{bmatrix} y(x) \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

[۱] Cauchy Problem

[۲] Ordinary Differential Equation

[۳] Autonomous

$$X' = \frac{dX}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dx} \\ \\ \frac{dx_2}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(X(x)) \\ \\ 1 \end{bmatrix} = F(X(x))$$

$$\Rightarrow X' = F(X(x))$$

اگر f نسبت به x پیوسته باشد، جواب مسأله (۱.۱) در عبارت زیر صدق می‌کند:

$$y(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau))\mathrm{d}\tau \qquad (2.1)$$

برعکس اگر f در (۲.۱) صدق کند سپس روی I پیوسته است و $y(x_0) = y_0$. بنابراین اگر f پیوسته باشد مسأله (۱.۱) هم ارز معادله انتگرال (۲.۱) است. مزیت این هم ارزی را در روش‌های عددی مشاهده می کنیم. در ادامه وجود و یکتایی را برای مسأله (۱.۱) بیان می‌کنیم.

۱. وجود و یکتایی جواب موضعی

فرض کنید $f(x, y(x))$ لیپ‌شیتس موضعی در(x_0, y_0) نسبت به y باشد. یعنی همسایگی‌های $J \subseteq I$ از x_0 و Σ از y_0 به ترتیب به طول‌های r_J, r_Σ باشند و ثابت $L > 0$ وجود داشته باشد به طوری که

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \qquad \forall x \in J, \quad \forall y_1, y_2 \in \Sigma. \qquad (3.1)$$

آن‌گاه مسأله کوشی (۱.۱) در یک همسایگی از x_0 به شعاع r_0 که $0 < r_0 < min(r_J, r_\Sigma/M, 1/L)$ دارای جواب یکتاست. که در آن M ماکزیمم مقدار تابع $|f(x, y(x))|$ روی $J \times \Sigma$ است [۱].

۲. **وجود و یکتایی جواب کلی**

مسأله دارای جواب کلی یکتاست اگر $J = I$ و $\Sigma = \mathbb{R}$ و f پیوسته یکنواخت لیپ‌شیتس نسبت به y باشد. اگر مشتق f روی $\overline{J \times \Sigma}$ نسبت به y کراندار باشد آن‌گاه f در شرط لیپ‌شیتس صدق می‌کند [۱] .

تحلیل پایداری مسأله کوشی

مسأله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} z'(x) = f(x, z(x)) + \delta(x), & x \in I, \\ z(x_\circ) = y_\circ + \delta_\circ \end{cases} \tag{۴.۱}$$

که $\delta_\circ \in \mathbb{R}$ و δ تابعی پیوسته نسبت به x روی I است. مسأله (۴.۱) در واقع مختل شده‌ی مسأله (۱.۱) است که $y_\circ$ به اندازه‌ی $\delta_\circ$ و f به اندازه‌ی δ مختل شده‌اند.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید I مجموعه‌ای کراندار باشد، مسأله (۱.۱) روی بازه‌ی I پایدار لیاپانف [۴] (پایدار) است اگر برای هر اختلال $(\delta_\circ, \delta(x))$ که در شرایط زیر صدق کند:

$$|\delta_\circ| < \varepsilon, \quad |\delta| < \varepsilon \qquad \forall x \in I$$

[۴] Liapunove Stability

که ε مقدار مثبت و بسیار کوچک است، وجود جواب (۴.۱) را تضمین نماید آن‌گاه

$$\exists C > 0 \quad \text{که } C \text{ مستقل از } \varepsilon : \quad | y(x) - z(x) | < C\varepsilon \quad \forall x \in I \tag{۵.۱}$$

اگر I کراندار نباشد گوییم مسأله (۱.۱) به طور مجانبی پایدار است اگر برای هر بازه‌ی کراندار I پایدار و حد زیر برقرار باشد:

$$\lim_{x\to\infty} |z(x) - y(x)| \longrightarrow 0 \tag{۶.۱}$$

یعنی برای (x_0, x) پایدار و برای $(x_0, +\infty)$ اختلاف جواب‌ها به صفر میل کند.

■

برای پایداری مسأله کوشی، شرط پیوستگی یکنواخت لیپ‌شیتس کافی است.

فرض کنیم $w(x) = z(x) - y(x)$

داریم:

$$w'(x) = f(x, z(x)) - f(x, y(x)) + \delta(x).$$

بنابراین،

$$\int_{x_0}^{x} w'(s)\mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} [f(s, z(s)) - f(s, y(s))]\mathrm{d}s + \int_{x_0}^{x} \delta(s)\mathrm{d}s, \quad \forall x \in I.$$

$$w(x_\circ) = \delta_\circ \Rightarrow w(x) = \delta_\circ + \int_{x_\circ}^{x} [f(s, z(s)) - f(s, y(s))]\mathrm{d}s + \int_{x_\circ}^{x} \delta(s)\mathrm{d}s, \quad \forall x \in I.$$

$$\Rightarrow |w(x)| \leq |\delta_\circ| + L\int_{x_\circ}^{x} |w(s)|\mathrm{d}s + \int_{x_\circ}^{x} |\delta(s)|\mathrm{d}s \leq (1 + |x - x_\circ|)\,\varepsilon + L\int_{x_\circ}^{x} |w(s)|\mathrm{d}s$$

با استفاده از لم گرانوال [۵]

$$|w(x)| \leq (1 + |x - x_\circ|)\,\varepsilon e^{L(x - x_\circ)}, \qquad \forall x \in I.$$

اگر قرار دهیم $C = (1 + K_I)e^{LK_I}$ که در آن $K_I = \max_{x\in I} |x - x_\circ|$ و $I \subseteq \mathbb{R}$.

لم ۱.۲.۱. (گرانوال) فرض کنید p تابعی انتگرال‌پذیر نامنفی روی بازه‌ی $(x_\circ, x_\circ + T)$ باشد، و φ و g دو تابع پیوسته روی بازه‌ی $[x_\circ, x_\circ + T]$ و g تابعی غیرکاهشی باشد اگر φ در نامساوی زیر صدق کند

$$\varphi(x) \leq g(x) + \int_{x_\circ}^{x} \varphi(\tau)p(\tau)\mathrm{d}\tau, \qquad \forall x \in [x_\circ, x_\circ + T],$$

آن‌گاه

$$\varphi(x) \leq g(x)exp\left(\int_{x_\circ}^{x} p(\tau)\mathrm{d}\tau\right), \qquad \forall x \in [x_\circ, x_\circ + T]$$

(برای اثبات به [۱] مراجعه شود.)

---

[5] Gronwall Lemma