دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

همریختی‌های فشرده وفشرده ضعیف روی جبرهای باناخ منظم

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض (آنالیز)

مصطفی لطفی پور

استاد راهنما

دکتر مهدی نعمتی

سه شنبه ۱۳۹۳/۹/۱۱

کلیه‌ی حقوق مادی مرتبط بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه متعلق به دانشگاه صنعتی اصفهان است.

دانشگاه صنعتی اصفهان
دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض (آنالیز) مصطفی لطفی پور

تحت عنوان

همریختی‌های فشرده وفشرده ضعیف روی جبرهای باناخ منظم

در تاریخ سه شنبه ۱۳۹۳/۹/۱۱ توسط کمیته‌ی تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهایی قرار گرفت

۱- استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر مهدی نعمتی
۲- استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر سیما سلطانی
۳- استاد داور ۱	دکتر رسول نصر اصفهانی
۴- استاد داور ۲	دکتر محمود منجگانی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده	دکتر فرید بهرامی

چکیده:

در این پایان‌نامه به معرفی دو خاصیت BSP و $ABSP$ برای جبرهای باناخ می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که جبرهایی مانند $L^{1}(G)$ ، $C_{0}(G)$ و $L^{1,2}(G)$ دارای خاصیت BSP می‌باشند. در ادامه نشان می‌دهیم تحت شرایطی دو خاصیت BSP و $ABSP$ با یکدیگر معادلند.

همچنین نشان می‌دهیم هر همریختی فشرده از یک جبر باناخ منظم قوی که دارای خاصیت BSP باشد به یک جبر باناخ دیگر دارای برد با بعد متناهی می‌باشد.

برای جبر باناخ دیتکین و منظم یکنواخت $\mathcal{A}$ نشان می‌دهیم هر همریختی فشرده ضعیف از $\mathcal{A}$ به هر جبر باناخ دیگر دارای برد با بعد متناهی می‌باشد.

در نهایت، در فصل آخر این پایان نامه جبر باناخ به طور ضعیف کامل دنباله‌ای یا WSC را معرفی نموده و نشان می دهیم هر جبر باناخ منظم آرنز، WSC که یک همانی تقریبی کراندار داشته باشد یکدار است و به عنوان یکی از اصلی‌ترین قضایای این فصل نشان می‌دهیم که اگر $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ منظم آرنز با یک همانی تقریبی کراندار و $\mathcal{B}$ یک جبر باناخ WSC باشد، آنگاه برای هر همریختی پیوسته $h:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{B}$ جبر $\overline{h(\mathcal{A})}$ یکدار است.

فهرست مطالب

چکیده:

در این پایان‌نامه به معرفی دو خاصیت BSP و $ABSP$ برای جبرهای باناخ می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که جبرهایی مانند $L^1(G)$ ، $C_0(G)$ و $L^{1,2}(G)$ دارای خاصیت BSP می‌باشند. در ادامه نشان می‌دهیم تحت شرایطی دو خاصیت BSP و $ABSP$ با یکدیگر معادلند.

همچنین نشان می‌دهیم هر همریختی فشرده از یک جبر باناخ منظم قوی که دارای خاصیت BSP باشد به یک جبر باناخ دیگر دارای برد با بعد متناهی می‌باشد.

برای جبر باناخ دیتکین و منظم یکنواخت $\mathcal{A}$ نشان می‌دهیم هر همریختی فشرده ضعیف از $\mathcal{A}$ به هر جبر باناخ دیگر دارای برد با بعد متناهی می‌باشد.

در نهایت، در فصل آخر این پایان نامه جبر باناخ به طور ضعیف کامل دنباله‌ای یا WSC را معرفی نموده و نشان می دهیم هر جبر باناخ منظم آرنز، WSC که یک همانی تقریبی کراندار داشته باشد یکدار است و به عنوان یکی از اصلی‌ترین قضایای این فصل نشان می‌دهیم که اگر $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ منظم آرنز با یک همانی تقریبی کراندار و $\mathcal{B}$ یک جبر باناخ WSC باشد، آنگاه برای هر همریختی پیوسته $h : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ جبر $\overline{h(\mathcal{A})}$ یکدار است.

فصل ۱

مقدمه

۱.۱ پیش‌گفتار

عملگرهای فشرده نقش اساسی در آنالیز تابعی دارند. زمانی که توپولوژی ضعیف مطرح شد، ریاضی دانان به این فکر افتادند که عملگرهای فشرده با این توپولوژی، که به عملگرهای فشرده ضعیف مشهور شد، را نیز بررسی کنند. اولین قضیه اساسی در این زمینه توسط دیودس، فیگل، جانسون و پلزینسکی در سال ۱۹۷۴ در مقاله [۳] ثابت شد. در نتیجه این نوع از عملگرها مانند عملگرهای فشرده در کانون توجه ریاضی دانان قرار گرفت. از جمله عملگرهایی که می‌توان فشرده یا فشرده ضعیف بودن آنها را مورد بررسی قرار داد همریختی‌های بین دو جبر باناخ می‌باشند. در این راستا در سال ۱۹۸۰ کامویتز در مقاله [۸] درون ریختی‌های فشرده از یک جبر باناخ را مورد بررسی قرار داد. در ادامه این مسیر کامویتز، چینبرگ و ورتمن در سالهای ۱۹۸۸و ۱۹۸۹ در مقاله‌های [۹] و [۱۰] به سوالاتی در رابطه با درون ریختی‌های فشرده از یک جبر باناخ نیم ساده پاسخ‌هایی دادند.
در سال ۱۹۹۲ گاله، رانسفورد و ویت در مقاله [۵] برای یک گروه فشرده موضعی G ساختار همریختی‌های فشرده و فشرده ضعیف را بر روی جبر گروهی $L^1(G)$ مورد مطالعه و بررسی قرار دادند. به عنوان مثال آنها نشان دادند که برای گروه‌های فشرده یا آبلی G، هر همریختی فشرده ضعیف از $L^1(G)$ به یک جبر باناخ دلخواه دارای بردی با بعد متناهی می‌باشد. با توجه به اهمیت و کاربرد همریختی‌های فشرده و فشرده

ضعیف، ریاضی دانان سعی در مشخصه سازی این نوع از عملگرها روی جبرهای باناخ داشتند. به عنوان مثال مصطفی‌اف در سالهای ۲۰۰۹ و ۲۰۱۱ در مراجع [۱۲] و [۱۱] همریختی‌های فشرده و فشرده ضعیف از رده بزرگی از جبرهای باناخ به یک جبر باناخ دلخواه که بیشتر نتایج این پایان نامه نیز مبتنی بر این دو مرجع می‌باشد مورد بررسی و مطالعه قرار داد.

این پایان نامه شامل چهار فصل است.

در فصل اول به بیان برخی از نتایج مفاهیم نظریه‌ی جبرهای باناخ می‌پردازیم و در ادامه جبرهای باناخ منظم، منظم قوی، منظم یکنواخت و برخی دیگر از جبرها را که در فصل‌های بعد مورد نیازند را معرفی می‌کنیم.

در فصل دوم، خاصیت BSP را روی جبرهای باناخ معرفی کرده و به بررسی همریختی‌های فشرده روی جبرهای باناخ منظم قوی که دارای خاصیت BSP باشند می‌پردازیم.

در فصل سوم، همریختی‌های فشرده ضعیف را روی رده خاصی از جبرهای باناخ جابجایی مانند جبرهای دیتکین و منظم یکنواخت بررسی کرده و به عنوان مهمترین نتیجه این فصل نشان می‌دهیم هر همریختی فشرده از یک جبر دیتکین و منظم یکنواخت به یک جبر باناخ دلخواه دارای بردی با بعد متناهی است.

در نهایت در فصل چهارم، جبرهای به طور ضعیف کامل دنباله‌ای WSC را معرفی می‌کنیم و برخی از ویژگی‌های آنها مانند منظم آرنز بودنشان را بررسی کرده و در آخر به کمک این مفاهیم نتایجی را در مورد همریختی‌ها روی این نوع از جبرهای باناخ بدست می‌آوریم.

۲.۱ پیش نیاز

در این فصل قصد داریم به طور مختصر تعاریف و قضایایی از آنالیز تابعی، آنالیز حقیقی، آنالیز هارمونیک و جبرهای باناخ را که در فصل‌های بعد مورد بررسی قرار می‌گیرند بیان نماییم. البته به مفاهیمی از توپولوژی مقدماتی نیز نیاز داریم که آنها را به اختصار در این فصل ارایه نموده‌ایم. سپس توابع پیوسته و پیوسته‌ی یکنواخت را تعریف نموده و قضایایی را روی این توابع بیان نموده‌ایم. در پایان این فصل مفهوم پیچش را بیان نموده و ضرب پیچشی $L^1(G), L^p(G), L^\infty(G), C_0(G), C_c(G), M(G)$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. بیشتر نتایج این فصل مبتنی بر مطالب ارایه شده در مراجع [۱۵]، [۲۲] و [۲۴] می‌باشد.

۳.۱ مقدمه‌ای بر توپولوژی

در ابتدا چند تعریف از توپولوژی را بیان می‌نماییم که در این پایان نامه از آنها استفاده می‌کنیم.

تعریف ۱.۳.۱. مجموعه‌ی X را همراه با خانواده‌ی $\mathcal{U}$ از زیرمجموعه‌هایش فضای توپولوژیک می‌نامیم اگر

(الف) X و $\emptyset$ در $\mathcal{U}$ باشند؛

(ب) اشتراک تعداد متناهی از اعضای $\mathcal{U}$ در $\mathcal{U}$ قرار داشته باشند؛

(ج) اجتماع تعداد دلخواه از اعضای $\mathcal{U}$ در $\mathcal{U}$ قرار داشته باشند.

فضای توپولوژیک متشکل از X و $\mathcal{U}$ را با جفت $X,\mathcal{U}$ نمایش می‌دهیم.
برای هر مجموعه‌ی $A \subset X$ کوچکترین مجموعه‌ی بسته شامل A را بستار A نامیده و با $\overline{A}$ نمایش داده در ضمن $\overline{A}$ از اشتراک همه‌ی مجموعه‌های بسته‌ی شامل A تشکیل شده است.
فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد در این صورت برای هر $a \in X$ و $r > 0$ مجموعه‌ی $B(a,r)$ را گوی باز حول نقطه‌ی a می‌نامیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$B(a,r) = \{x \in X : \quad d(a,x) < r\}$$

زیر مجموعه‌ی U را باز نامیم هرگاه برای هر $x \in U$ عدد حقیقی $r > 0$ وجود داشته باشد به طوری که $B(x,r)$ زیرمجموعه‌ی U باشد.

می‌توان باز بودن را به شکل دیگری نیز بیان نمود یعنی می‌توانیم بگوییم U باز است اگر و تنها اگر به صورت اجتماعی از گویهای باز باشد.
تابع $f : X \longrightarrow Y$ میان دو فضای توپولوژیک X و Y پیوسته است اگر و تنها اگر برای مجموعه‌ی باز $U \subset Y$ مجموعه‌ی $f^{-1}(U) = \{x \in X : \quad f(x) \in U\}$ باز باشد. به طور هم ارز برای هر مجموعه بسته‌ی، $C \subset Y$، $f^{-1}(C)$ نیز بسته باشد.
در نظر داشته باشید ترکیب دو تابع پیوسته f و g پیوسته است.
تابع $f : X \longrightarrow Y$ بین دو فضای توپولوژیک X و Y باز نامیده می‌شود اگر برای هر مجموعه‌ی باز U در X، $f(U)$در Y باز باشد. به طور معادل f را بسته نامیم اگر برای هر مجموعه‌ی بسته، $C \subset X$، $f(C)$ در Y بسته باشد
تابع دو سویی $f : X \longrightarrow Y$ همانریختی نامیده می‌شود اگر پیوسته و باز باشد.
با توجه به تعریف‌های بکار رفته می‌توان به این نتیجه رسید که باز بودن f هم ارز با پیوسته بودن $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ می‌باشد. به طور مشابه $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ اغلب همانریختی می‌باشد. می‌توان به عنوان مثالی در این زمینه از مثال زیر استفاده نمود که عبارت است از هر مستطیل چگال $[a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^۲$ که $a < b$ و $c < d$ یک همانریختی گوی چگال $\overline{B_۱(۰)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^۲ : x^۲ + y^۲ \leq ۱\}$ می‌باشد.
دو مجموعه‌ی X و Y را همریخت نامیم اگر همانریختی $f : X \longrightarrow Y$ بین این دو مجموعه وجود داشته باشد.

در ادامه‌ی بحث قصد داریم فضاهای فشرده را مطرح کنیم و چند تعریف و قضیه را در این ارتباط بیاوریم.

تعریف ۲.۳.۱. فضای توپولوژیک X فشرده نامیده می‌شود اگر هر پوشش باز آن حاوی یک زیر پوشش متناهی باشد. به عبارت دیگر X فشرده است اگر برای هر خانواده‌ی $\{U_i\}_{i\in I}$ از مجموعه‌های باز X که در آن $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ زیر مجموعه‌ی متناهی $F \subset I$ وجود داشته باشد به طوری که $X = \bigcup_{i\in F} U_i$.
یک فضای X فشرده موضعی نامیده می‌شود اگر هر نقطه $x \in X$ دارای یک همسایگی فشرده باشد.
به طور مثال اعداد حقیقی با توپولوژی معمولی فشرده‌ی موضعی می‌باشد.

در ادامه‌ی بحث می‌خواهیم فضای هاسدورف را معرفی نماییم که آن را به این صورت تعریف می کنیم : یک فضای توپولوژیک X فضای هاسدورف نامیده می‌شود اگر هر دو عنصر متفاوت را بتوان بوسیله‌ی همسایگی‌های متفاوت از یکدیگر جدا نمود. به عبارت دیگر برای دو عضو $x \neq y$ دو مجموعه‌ی باز $U, V \subset X$ وجود داشته باشد به طوری که

$$U \bigcap V = \emptyset \quad (x \in U, y \in V).$$

توپولوژی گسسته $P(X)$ برای هر X هاسدورف است. اما توپولوژی ضعیف $\{\emptyset, X\}$ در صورتی که X دارای بیشتر از یک عنصر باشد هاسدورف نیست.

یک فضای هاسدورف را با نماد $T_۲$ نمایش می‌دهیم.

فضای توپولوژیک X را $T_۱$ نامیم در صورتی که برای هر دو عنصر $x, y \in X$ مجموعه‌های باز U و V وجود داشته باشند به طوری که $x \in V$ و $y \in U$ و ضمنا $x \notin U$ و $y \notin V$.

فضای توپولوژیک X را منظم نامیم اگر یک مجموعه‌ی بسته و یک نقطه را بتوان با دو مجوعه‌ی باز مجزا از یکدیگر جدا نمود و آنرا به اختصار با $T_۳$ نمایش میدهیم.

این فضا را کاملا منظم نامیم هر گاه برای یک مجموعه‌ی بسته F و یک نقطه x یک تابع پیوسته $f : X \longrightarrow [۰, ۱]$ وجود داشته باشد به طوری که

$$f(x) = ۰, \quad f(F) = \{۱\}$$

این فضا را با نماد $T_{۳\frac{۱}{۲}}$ نمایش می‌دهند. ضمنا درگروههای توپولوژیک فضاهای معرفی شده با یکدیگر معادلند.

درادامه‌ی راه با توجه به اینکه در قسمتهایی از متن نیاز به استفاده از تور ها داریم مقدماتی از تورها را ارائه میدهیم.

تعریف ۳.۳.۱. یک مجموعه‌ي جهت دار مجموعه‌ای مانند D به همراه یک رابطه مانند $(\leq)$ می‌باشد به طوری که دارای دو خاصیت زیر باشد:

(۱) متعدی باشد. یعنی برای هر $\alpha \leq \beta$ و $\beta \leq \gamma$ داشته باشیم $\alpha \leq \gamma$.

(۲) هم پایان باشند. یعنی برای هر $\alpha, \beta \in D$ عنصر $\gamma \in D$ موجود باشد که $\gamma \geq \beta, \quad \gamma \geq \alpha$.

اما منظور از یک تور در یک مجموعه مانند D تابعی مانند

$$f : D \longrightarrow X$$

می‌باشد با فرض $f(\alpha) = x_\alpha$. برای هر $\alpha \in D$ تور $f : D \longrightarrow X$ را به سادگی به صورت (x_α) یا x_α نمایش میدهیم. که در اینجا D یک مجموعه‌ی جهتدار می‌باشد.
در ادامه خالی از لطف نیست اگر مفهوم زیر تور را نیز معرفی کنیم برای این منظور گوییم تور را یک زیر تور نامیم هرگاه نگاشت $g : E \longrightarrow D$ موجود باشد به طوری که

(۱) برای هر $B \in E$ داشته باشیم $y_\beta = x_{y(\beta)}$

(۲) برای هر $\alpha \in D$ عنصر $\beta \in E$ موجود باشد به طوری که برای هر $\gamma \geq \beta$ داشته باشیم $g(\gamma) \geq \alpha$.

با توجه به مطالب بالا می‌توانیم مفهوم همگرایی را در تورها به صورت زیر بیان کنیم.

تعریف ۴.۳.۱. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد و (x_α) یک تور در X، در این صورت x_α به x همگرا می‌باشد هرگاه برای هر همسایگی U از x عنصر $\alpha_\circ \in D$ موجود می‌باشد به طوری که برای هر $\alpha \geq \alpha_\circ$ داشته باشیم $x_\alpha \in U$.

قضیه ۵.۳.۱. اگر X یک فضای توپولوژیک باشد و $A \subset X$ در این صورت :

(۱) عنصر $x \in \overline{A}$ اگر و تنها اگر تور (x_α) در A موجود باشد به طوری که $x_\alpha \longrightarrow x$

(۲) مجموعه‌ی A در X فشرده است اگر وتنها اگر هر تور (x_α) در A یک زیر تور همگرا در A داشته باشد.

برهان . به لم (۱.۰) از پیوست مرجع [۲۳] مراجعه شود. ■

قضیه ۶.۳.۱. فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژیک باشند و $f : X \longrightarrow Y$ یک تابع در این صورت تابع f در نقطه‌ی $x \in X$ پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر تور (x_α) با فرض $x_\alpha \longrightarrow x$ داشته باشیم $f(x_\alpha) \longrightarrow f(x)$

برهان . به قضیه‌ی (۴.۶) از پیوست مرجع [۲۳] مراجعه شود. ■

فرض کنیم X یک فضای فشرده‌ی موضعی هاسدورف و $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ یک تابع پیوسته روی X باشد. در این صورت مجموعه‌ی $\{x \in X | f(x) \neq 0\}$ را مجموعه‌ی هم صفر f روی X می‌نامیم و با $\mathrm{coz(f)}$ نمایش می‌دهیم.

فرض کنیم X یک فضای فشرده‌ی موضعی هاسدورف باشد. در این صورت تابع پیوسته‌ی $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ را محمل فشرده می‌نامیم اگر $\overline{\mathrm{coz(f)}}$ فشرده باشد.

فرض کنیم X یک فضای فشرده موضعی هاسدورف باشد در این صورت مجموعه‌ی همه‌ی توابع پیوسته مختلط مقدار روی X را با $C(X)$ نمایش میدهیم این مجموعه همراه با جمع برداری نقطه‌ای و ضرب برداری نقطه‌ای یک فضای برداری می‌باشد. $C(X)$ را می‌توان با توپولوژی همگرایی نقطه‌ای یک فضای برداری توپولوژیک در نظر گرفت. در ضمن $C(X)$ با توپولوژی همگرایی یکنواخت روی زیرمجموعه‌های فشرده X نیز یک فضای برداری توپولوژیک است.

زیر فضای همه‌ی توابع پیوسته کراندار در $C(X)$ را با $C_b(X)$ نمایش میدهیم. $C_b(X)$ همراه با نرم یکنواخت $\|.\|_{sup}$ یک فضای باناخ است.

$$\|f\|_{sup} = sup_{x \in X} |f(x)|$$

در ادامه زیر فضای همه‌ی توابع در بینهایت صفر شونده در $C(X)$ را با $C_0(X)$ نمایش میدهیم. که یک زیر فضای بسته از $C_b(X)$ است. یادآوری می‌کنیم که $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ در بینهایت صفر می‌شود اگر برای هر $\epsilon > 0$ وجود داشته باشد $K \subset X$ فشرده به طوری که برای هر $x \in X \setminus K$ داشته باشیم $|f(x)| < \epsilon$.

اما زیر فضای همه‌ی توابع با محمل فشرده در $C(X)$ را با $C_c(X)$ نمایش می‌دهیم که یک زیر فضای نه لزوما بسته از $C_0(X)$ است.

یاد آوری می‌کنیم $f \in C(X)$ دارای محمل فشرده می‌باشد اگر مجموعه‌ی $\mathrm{supp(f)} = \overline{\mathrm{coz(f)}}$ فشرده باشد. ضمنا $C_c(X)$ را با $C_{00}(X)$ نیز نمایش می‌دهیم.

ترتیب قرارگرفتن این مجموعه‌ها به صورت زیر می‌باشد

$$C_c(X) \subseteq C_0(X) \subseteq C_b(X) \subseteq C(X)$$

البته اگر X فشرده باشد این چهار مجموعه با یکدیگر برابر می‌باشند. یعنی اگر X فشرده باشد

$$C_c(X) = C_0(X) = C_b(X) = C(X)$$

اگر X فشرده نباشد در حالت کلی نمی‌توان در مورد سره یا نا سره بودن شمولهای فوق نتیجه‌ای گرفت. برای مثال فضای فشرده‌ی موضعی هاسدورف X وجود دارد که فشرده نیست ولی $C_c(X) = C_0(X)$.

یک گروه توپولوژیک گروهی مانند G می‌باشد به همراه یک توپولوژی مانند τ به طوری که نگاشتهای زیر پیوسته باشند:

$$G \times G \longrightarrow G$$
$$(x, y) \longmapsto xy$$

و

$$G \longrightarrow G$$
$$x \longmapsto x^{-1}$$

در این قسمت می‌توانیم یک گروه فشرده موضعی را تعریف نماییم که منظور از آن یک گروه توپولوژیک G است که توپولوژی آن فشرده موضعی باشد یعنی هر نقطه از G دارای یک همسایگی فشرده (یا یک همسایگی با بستار فشرده) باشد. به طور معادل عنصر همانی G دارای یک همسایگی فشرده باشد.

قضیه ۱.۳.۷. فرض کنیم G یک گروه توپولوژیک باشد

۱) به ازای $a \in G$ نگاشتهای $x \longmapsto ax$ ، $x \longmapsto xa$ و $x \longmapsto x^{-1}$ همانریختی هستند. در حالت خاص زیر مجموعه‌ی $U \subset G$ یک همسایگی است اگر وتنها اگر aU یک همسایگی باشد (به طور معادل Ua همسایگی باشد) ،(u^{-1} همسایگی باشد.)

۲) اگر U یک همسایگی باشد آنگاه $U^{-1} = \{u^{-1} : u \in G\}$ نیز یک همسایگی است (از یک عنصر) که آنرا یک همسایگی متقارن نامیم اگر $U = U^{-1}$. هر همسایگی شامل e مانند U شامل یک همسایگی متقارن است.

۳) برای هر همسایگی U از عنصر همانی e در G همسایگی متقارن V از e در G وجود دارد که $V^{2} = U$.

۴) اگر $A, B \subseteq G$ فشرده باشند آنگاه AB فشرده است.

۵) اگر $A \subseteq G$ یا B باز باشند آنگاه AB باز است.

۶) اگر $A \subseteq G$ آنگاه $\overline{A} = \bigcap_{V = nb(e)} AV$.

برهان . به لم (۲.۱.۱) از مرجع [۲۳] مراجعه شود. ■

لم ۱.۳.۸. فرض کنیم G یک گروه توپولوژیک و $A \subseteq G$ فشرده و $B \subseteq G$ بسته باشد آنگاه $\mathcal{AB}$ بسته است.

برهان . به لم (۴.۱.۱) از مرجع [۲۳] مراجعه شود. ■

در نظر داشته باشید که در این لم اگر فرض فشردگی A را نداشته باشیم لم برقرار نیست. برای مثال $Z+\sqrt{۲}Z$ در $\mathbb{R}$ بسته نیست بلکه $\overline{Z+\sqrt{۲}Z}=\mathbb{R}$.

لم ۹.۳.۱. (یوریسون) اگر X یک فضای هاسدورف فشرده موضعی و $K\subset X$ فشرده و $A\subset X$ بسته و $K\cap A=\emptyset$

۱) وجود دارد یک همسایگی باز فشرده موضعی U از K به طوری که

$$K\subset U\subset \overline{U}\subset X\setminus A.$$

۲) وجود دارد یک تابع پیوسته از مجموعه فشرده $f:X\longrightarrow [۰,۱]$ به طوری که

$$f=۰ \quad \text{روی } A \text{ ، } f\cong ۱ \quad \text{روی } K.$$

۳) اگر $B\subset X$ بسته و $h:B\longrightarrow [۰,\infty)$ در $C_۰(B)$ و برای هر $x\in K\cap B$ داشته باشیم $h(x)\geq ۱$، آنگاه وجود دارد یک تابع پیوسته f صادق در رابطه (۲) که برای هر $b\in B$

$$f(b)\leq h(b)$$

برهان . به لم (۸.۲) از پیوست مرجع [۲۳] مراجعه شود. ■

قضیه ۱۰.۳.۱. (تیخونف): اگر I یک مجموعه‌ی شمارنده و برای هر $i\in I$، X_i یک فضای توپولوژیک باشد. فضای حاصلضرب $X=\pi_i X_i$ فشرده است اگر وتنها اگر هر X_i فشرده باشد.

برهان . به قضیه‌ی (۷.۲) از پیوست مرجع [۲۳] مراجعه شود. ■

۴.۱ توپولوژی ضعیف و ضعیف *

در این فصل قصد داریم توپولوژی ضعیف و ضعیف * را مورد بررسی قرار دهیم. در ادامه چند تعریف و قضیه مهم و بنیادی در آنالیز تابعی را بیان می‌نماییم.

تعریف ۱۱.۴.۱. فرض کنیم X یک فضای برداری باشد. توپولوژی هاسدورف τ روی X را به طور موضعی محدب گوییم هرگاه یک پایه از همسایگی‌های محدب در صفر داشته باشد. X را همراه با این توپولوژی یک فضای محدب موضعی نامیم هرگاه نگاشتهای

$$X \times X \longrightarrow X$$

$$(x, y) \longmapsto x + y$$

و

$$C \times X \longrightarrow X$$

$$(t, y) \longmapsto tx$$

تحت این توپولوژی پیوسته باشند. در این حالت دوگان X متشکل از تمام تابعکهای خطی پیوسته روی X را با X^* نمایش می دهیم. به علاوه مقدار تابعک $f \in X^*$ در $x \in X$ را با $f(x)$ یا $< f, x >$ نشان می‌دهیم.

فرض کنیم X و Y دو فضای نرمدار باشند. $B(X, Y)$ فضای همه‌ی عملگرهای خطی و کراندار T از X به Y را نشان می دهد که در آن $\|T\| = sup\{\|T_x\| : \quad \|x\| \leq ۱\}$. در حالت $Y = \mathbb{C}$ ، $B(X, Y)$ را با X^* و مقدار $f \in X^*$ را در $x \in X$ با $f(x)$ یا $\langle f, x\rangle$ نشان می‌دهیم. توجه کنید که $B(X, Y)$ کامل است اگر و تنها اگر Y کامل باشد.

قضیه ۱۲.۴.۱. (هان باناخ). فرض کنیم M زیر فضایی از فضای خطی نرمدار X و $x_\circ \in X$ ، هرگاه $x_\circ$ در بستار M نباشد، آنگاه تابعک خطی و پیوسته f روی X وجود دارد به طوری که $f(x_\circ) = ۱$ و به ازای هر $x \in M$ ، $f(x) = \circ$.

برهان . به قضیه‌ی ۵.۳ از [۲۷] رجوع کنید.

■

تعریف ۱۳.۴.۱. فرض کنیم X یک فضای خطی نرمدار باشد. در این صورت

(الف) منظور از توپولوژی ضعیف روی X، کوچکترین توپولوژی روی X است که تحت آن هر $f \in X^*$ پیوسته است . این توپولوژی را با $\sigma(X, X^*)$ یا ω نمایش می دهیم. همگرایی تور (x_α) به x در X در توپولوژی ضعیف را همگرایی ضعیف (x_α) به x می‌نامیم و با $x_\alpha \xrightarrow{w} x$ نمایش می‌دهیم. توجه کنید که $x_\alpha \xrightarrow{w} x$ اگر و تنها اگر $f(x_\alpha) \longrightarrow f(x)$ برای هر $f \in X^*$.

(ب) نگاشت $\phi : X \longrightarrow X^{**}$ را با ضابطه $x \longmapsto \widehat{x}$ تعریف می کنیم که در آن برای هر $f \in X^*$ داریم $\widehat{x}(f) = f(x)$. توجه کنیم که ϕ خطی و طولپاست. لذا یک به یک نیز هست. در حالتی که ϕ پوشا باشد X را انعکاسی می نامیم. به طور معمول $\widehat{x}$ را با x نمایش می‌دهیم.

(ج) منظور از توپولوژی ضعیف * روی X^*کوچکترین توپولوژی روی X^* است که خانواده $\phi(X)$ را پیوسته می سازد این توپولوژی به طور موضعی محدب را با $\sigma(X^*, X)$ یا ω^* نمایش می دهیم. همگرایی تور (f_α) به f در این توپولوژی را همگرایی ضعیف * (f_α)، به f می‌نامیم و با نماد $f_\alpha \xrightarrow{w^*} f$ نمایش می‌دهیم که معادل است با این که $f_\alpha(x) \longrightarrow f(x)$ برای هر $x \in X$.
در ضمن یادآوری می‌کنیم که یک پایه‌ی همسایگی نقطه $f_\circ \in X^*$ برای توپولوژی $\sigma(X^*, X)$ با در نظر گرفتن تمام مجموعه‌های به شکل

$$V = \{f \in X^* \quad : |\langle f - f_\circ, x_i \rangle| < \epsilon \quad , i \in I \text{ برای هر } \}.$$

بدست می‌آید که در آن I متناهی است و $x_i \in X$ و $\epsilon > \circ$.

تذکر ۱۴.۴.۱. چون هر $f \in X^*$ در واقع عضوی در $B(X, \mathbb{C})$ است و ضعیف توپولوژی کوچکترین توپولوژی بر X با این خاصیت است که هر $f \in X^*$ تحت آن پیوسته شود لذا بوضوح می‌توان گفت که ضعیف توپولوژی ضعیف‌تر از توپولوژی حاصل از نرم روی فضای باناخ X است. یعنی اگر توپولوژی حاصل از نرم فضای باناخ X را با τ و ضعیف توپولوژی روی X را با τ_W نمایش دهیم آنگاه $\tau_W \subseteq \tau$.

قضیه ۱۵.۴.۱. (باناخ- آلاغلو). فرض کنیم X یک فضای نرمدار باشد. در این صورت گوی یکه‌ی B_{X^*} از X^*، فشرده‌ی ضعیف * است.

برهان . به مرجع [۲۷] مراجعه کنید. ■

تعریف ۱۶.۴.۱. فرض کنیم X یک فضای خطی و $A \subseteq X$ ناتهی باشد. در این صورت منظور از پوشش محدب A که با $co(A)$ نمایش می دهیم عبارت است از

$$\text{co (A)} = \{\sum_{i=1}^{n} t_i x_i : n \geq 1, \sum_{i=1}^{n} t_i = 1, t_i \geq 0, x_i \in A\}.$$

لم ۱۷.۴.۱. (مازور). اگر X یک فضای نرمدار و $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ یک تور در X باشد به طوری که $x_\alpha \xrightarrow{w} x$ آنگاه $x \in \overline{co(x_\alpha : \alpha \in D)}^{\|\cdot\|}$.

برهان . به بخش ۳.۳ از مرجع [۳] رجوع کنید.

■

لم ۱۸.۴.۱. (گلدشتاین). فرض کنیم X یک فضای برداری نرمدار باشد. در این صورت X در X^{**} ضعیف $*-$ چگال است.

برهان . به لم (۴.۳) از مرجع [۲۹] مراجعه شود. ■

تعریف ۱۹.۴.۱. اگر T فضای X را به توی Y بنگارد، آنگاه فضای پوچ و برد T را به ترتیب با $\ker(T)$ و $T(X)$ نمایش می‌دهیم

$$\ker(T) = \{x \in X : \quad Tx = 0\},$$
$$T(x) = \{y \in Y : Tx = y, \quad \text{به ازای یک } x \text{ در } X\}.$$

قضیه ۲۰.۴.۱. فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند و $T \in B(X,Y)$. در این صورت $\ker(T^*) = [T(X)]^\perp$ و $\ker(T) = ^\perp [T^*(Y^*)]$.

برهان . به قضیه‌ی ۱۲ از فصل ۴ در [۲۷] رجوع کنید. ■

نتیجه ۲۱.۴.۱. فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند و $T \in B(X,Y)$. در این صورت

الف) $\ker T^*$ به طور ضعیف $*$ در Y^* بسته است.

ب) $T(X)$ در Y چگال است اگر وتنها اگر T^* یک به یک باشد.

برهان . به قضیه‌ی ۱۳ از فصل ۴ در [۲۷] رجوع کنید. ■

قضیه ۲۲.۴.۱. فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند و $T \in B(X,Y)$ در این صورت شرایط زیر معادلند.

الف) $T(X)$ در Y بسته است.

ب) $T^*(Y^*)$ در X^* ضعیف * بسته است.

ج) $T^*(Y^*)$ در X^* نرم بسته است.

برهان . به قضیه‌ی ۱۵ از فصل ۴ در [۲۷] رجوع کنید. ■

تعریف ۲۳.۴.۱. فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند، در این صورت گوییم نگاشت خطی $T : X \longrightarrow Y$ فشرده است هرگاه بستار $T(B_x)$ در Y فشرده باشد. در این صورت واضح است که T کراندار است. لذا $T \in B(X,Y)$.

تعریف ۲۴.۴.۱. فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند، در این صورت گوییم نگاشت خطی $T : X \longrightarrow Y$ فشرده ضعیف است هرگاه بستار ضعیف $T(B_x)$ در Y فشرده ضعیف باشد.

قضیه ۲۵.۴.۱. فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند. در این صورت

الف) هرگاه $T \in B(X,Y)$ و $\dim T(X) < \infty$، آنگاه T فشرده است.

ب) $T \in B(X,Y)$ فشرده است اگر و تنها اگر T^* فشرده باشد.

ج) $T \in B(X,Y)$ فشرده است اگر و تنها اگر هر دنباله‌ی کراندار $\{x_n\}$ در X، شامل زیر دنباله‌ای مانند x_{n_i} باشد به طوری که Tx_{n_i} در Y همگرا باشد.

برهان . به مرجع [۲۷] رجوع کنید. ■

تعریف ۲۶.۴.۱. فرض کنیم Y, X دو فضای خطی نرمدار باشند . برای هر $x \in X$ و $y \in Y$ حاصلضرب تانسوری y, x را به عنوان عضوی از $B(X^*, Y^*)$ با $x \otimes y$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$(x \otimes y)(f,g) = f(x)g(y) \quad f \in X^*, g \in Y^*$$