تقدیم به :

ستارگان آسمان زندگیم که در پیشرفت تحصیلی من سهیم بودند و تقدیم به همسر وفرزند عزیزم.

تشکر و قدردانی

ایزدمنان را سپاسگزارم که به من توفیق داد در مسیر مقدس علم و پژوهش گام نهم، لکن برخود واجب می‌دانم از محضر بزرگوارانی که قدم نهادن در این مسیر بدون کمک و توجهشان میسر نبوده است، نهایت تشکر و سپاس را داشته باشم. از زحمات استاد عزیزم **جناب آقای دکتر خیرا.. پوربرات** که بادلسوزی و توجهات خود در جهت پربار شدن پژوهش بنده را همراهی کردند، تشکر می‌کنم و از خداوند متعال سلامتی استاد عزیزم را خواستارم. همچنین از اساتید گرامیم **آقای دکتر روح ا.. جهانی پور** و **آقای دکتر بهنام بازیگران** که افتخار شاگردی ایشان را داشتم، قدردانی می کنم. لازم است مراتب تقدیر و تشکر خود را از استاد عزیزم **آقای دکتر حسن دقیق** که در سمت نماینده تحصیلات تکمیلی در جلسه دفاع شرکت داشتند، بیان کنم. از حضور آقای دکتر سید منصور واعظ پور که زحمت داوری این پایان‌نامه را بر عهده داشتند قدردانی می کنم.

مجموعه حاضر به مدد زحمات خانواده عزیزم که دست یاریشان همیشه همراه من بوده است و در لحظه لحظه زندگییم وجودشان آرامش بخش خاطرم بوده است، می‌باشد. از تک تک این عزیزان تشکر می‌کنم. از همسر عزیزم که حمایت بی‌دریغش در این راه پرنشیب ، طی مسیر را برایم آسانتر کرد صمیمانه تشکر می‌کنم.

و در آخر از عزیز دوست داشتنیم **محمد مهدی** که در این مسیر پرطنش صدای نفس او، اطمینان بخش وجودم بود، قدردانی می‌کنم.

دانشکده علوم پایه - گروه ریاضی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد در

رشته ریاضی (گرایش آنالیز)

عنوان:

نامساویهای تغییراتی برداری تعمیم یافته با عملگرهای ناپیوسته و ستاره شبه یکنوا

استاد راهنما:

دکتر خیرا... پور برات

استاد مشاور:

دکتر بهنام بازیگران

پژوهشگر:

اعظم مهرشادان

شهریور ۸۸

فهرستِ مطالب

چکیده

می دانیم که نامساوی‌های تغییراتی می‌توانند یک مدل خیلی موثر برای استفاده در مسائل بهینه‌سازی برداری باشند. بااستفاده از قضیه نقطه ثابت کی فن [1]و روشهای عددسازی بعضی از قضیه‌های وجود جواب قوی را نشان خواهیم داد. برای نامساوی‌های تغییراتی تعمیم‌یافته که شامل عملگرهای ناپیوسته و شبه‌یکنوا هستند این نتایج را به کارخواهیم برد. همچنین برای مطالعه وجود جواب مسائل بهینه‌برداری برخی مثال‌ها تجزیه و تحلیل شده‌اند.
واژگان کلیدی : مسائل توازن برداری تعمیم‌یافته، نامساوی های تغییراتی برداری تعمیم یافته، نیمه پیوستهٔ بالایی، $C-$ تحدبی،$C-$ نیمه‌پیوستهٔ‌بالایی، ستاره‌شبه‌یکنوا.

[1]Ky Fan

مقدمه

فرض کنیم Z یک فضای برداری توپولوژیک (هاسدورف)،C یک مخروط محدب، بسته و غیرتهی از Z به‌طوری‌که $intC \neq \emptyset$ و $Z \neq C$ باشد. در اینجا $intC$ مشخص‌کننده درون C است. درحالی‌که $A^c, \overline{A}$ و coA به ترتیب نشان‌دهندهٔ متمم و بستار و غلاف محدب [۲] یک زیر مجموعه A از Z است. ترتیب برداری درZ نسبت به مخروط محدب بسته C به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$z_1 \leq z_2 \quad \leftrightarrow \quad z_2 - z_1 \in C$$

$$z_1 < z_2 \quad \leftrightarrow \quad z_2 - z_1 \in intC$$

$$z_1 \nless z_2 \quad \leftrightarrow \quad z_2 - z_1 \notin intC$$

گیریم X و Y دو فضای برداری توپولوژیکی و $K \subseteq X$ و $D \subseteq Y$ غیر تهی باشند. علاوه‌براین $T : K \longrightarrow 2^D$ یک نگاشت مجموعه‌مقداری [۳] و $f : K \times D \times k \longrightarrow Z$ یک نگاشت تک مقداری [۴] باشد.

نامساوی تغییراتی برداری تعمیم‌یافته[5] یابه‌اختصار $GVVI(K,T,f)$ مسائل بیان شده در صفحه بعد است.

[2]convex hull

[3]multifunction

[4]single-valued map

[5]generalized vector variational inequality

(V): مطلوب است $\hat{x} \in K$ به‌طوری‌که

$$\exists \hat{y} \in T(\hat{x}) \quad , \quad \forall z \in K \quad : \quad f(\hat{x}, \hat{y}, z) \not< 0$$

علاوه‌بر مدل (V) از $GVVI(K, T, f)$ مدل‌های معین شده در زیر مورد بررسی قرار می‌گیرد.

(W): مطلوب است $\hat{x} \in K$ به‌طوری‌که

$$\forall z \in K \quad , \quad \exists \hat{y} \in T(\hat{x}) \quad : \quad f(\hat{x}, \hat{y}, z) \not< 0$$

که این نامساوی، نامساوی تغییراتی برداری مینتی[۶] نامیده می‌شود.

(M): مطلوب است $\hat{x} \in K$ به‌طوری‌که

$$\forall z \in K \quad , \quad \forall \hat{y} \in T(\hat{x}) \quad : \quad f(\hat{x}, \hat{y}, z) \not< 0$$

مجموعه جواب مسائل بالا رابه ترتیب با S_V و S_W و S_M نشان می‌دهیم.

یک نقطه $\hat{x} \in S_V$ یک جواب قوی[۷] از $GVVI(K, T, f)$ نامیده می‌شود، درحالی‌که یک نقطه $x_0 \in S_W$ یک جواب ضعیف[۸] نامیده می‌شود. جالب است که مسئله V چندین نامساوی تغییراتی تعمیم‌یافته و مسئلهٔ توازن را می‌پوشاند. مثال‌های زیر این مطلب را به خوبی نشان می‌دهند.

مثال: فرض کنیم $Z = \mathbb{R}$ ، $C = \mathbb{R}_+$ ، $Y = X^* = D$ و $f(x, y, z) = \langle y, z - x \rangle$ در این صورت (V) به‌مسئله نامساوی تغییراتی تعمیم‌یافته زیر تبدیل می‌شود:

$$\hat{x} \in K \quad , \quad \hat{y} \in T(\hat{x}) \quad : \quad \langle \hat{y}, z - \hat{x} \rangle \geq 0 \quad , \quad \forall z \in K \qquad (۱)$$

در مثال بعدی یک مسئله توازن بیان شده است :

اگر $Z = \mathbb{R}$ ، $C = \mathbb{R}_+$ ، $Y = X = D$ و $f(x, y, z) = g(x, z) + h(z) - h(x)$ که g یک تابع حقیقی مقدار روی $K \times K$ است به‌طوری‌که $\forall x \in K \quad , \quad g(x, x) = 0$. در این صورت

---

[6] Minty vector variational inequality

[7] strong solution

[8] weak solution

(V) به مسئله توازن[9] زیر تبدیل می‌شود:

مطلوب است $\hat{x} \in K$ به‌طوری‌که

$$g(\hat{x},z)+h(z)-h(\hat{x}) \geq 0 \quad , \quad \forall z \in K \qquad (۲)$$

همچنین مثال زیر تبدیل (V) به یک نامساوی تغییراتی را نشان می‌دهد.

فرض کنیم $Y=D$ ، $C=\mathbb{R}_+$ ، $Z=\mathbb{R}$ و $f(x,y,z)=\Phi(y,z)-\Phi(y,x)$ در این صورت (V) به مسئله نامساوی تغییراتی معمولی تبدیل می‌شود یعنی

$$\hat{x} \in K \;\; , \;\; \hat{y} \in T(\hat{x}) \;\; : \;\; \Phi(\hat{y},z)-\Phi(\hat{y},\hat{x}) \geq 0 \;\; , \;\; \forall z \in K \qquad (۳)$$

وجود جواب نامساوی‌های تغییراتی تعمیم یافته (GVI) به وسیله نویسندگان زیادی مطالعه شده‌است. به عنوان مثال در سال ۲۰۰۴ **لی**[10] ودرسال ۱۹۹۵ـ۱۹۹۴ **یِن**[11] در این زمینه کار کرده‌اند. هدف این پایان‌نامه بررسی وجود جواب قوی برای نامساوی‌های تغییراتی تعمیم‌یافته با عملگرهای ناپیوسته و ستاره‌شبه‌یکنوا می‌باشد.

این پایان‌نامه شامل ۳ فصل است:

در فصل اول، تعاریف، لم و قضایای مورد نیاز در فصل‌های دیگر را بیان کرده‌ایم. مطالب بیان‌شده در این فصل برگرفته از مراجع [۳]، [۴]، [۹] و [۱۵] می‌باشد.

در فصل دوم توابع مجموعه مقدار و خصوصیات آنها و قضیه‌های کِی فن ومینی‌ماکس را بررسی کرده و از مراجع [۴]،[۸]،[۱۴]،[۲۰]و[۲۲] استفاده کرده‌ایم.

در فصل سوم نگاشت‌های ستاره‌شبه‌یکنوا و نیمه‌یکنوا را بررسی کرده و وجود $GVVI$ را در این عملگرها بررسی می‌کنیم. مطالب بیان‌شده در این فصل با استفاده از مراجع [۷]،[۱۰]،[۱۳]و[۱۹] بیان شده‌است.

[9] equilibrium problem

[10] Li

[11] Yen

فصل ۱

مقدمات و پیش‌نیازها

در این فصل برخی از مفاهیم مقدماتی و مهم از آنالیز تابعی که در فصل های بعد کاربرد دارند ذکر شده است. از جمله تعریف فضاهای برداری توپولوژیک، فضاهای محدب موضعی، فضای باناخ دوگان، فضاهای انعکاسی و همچنین توپولوژی ضعیف و ضعیف ستاره و همچنین فضاهای برداری توپولوژیک مرتب مورد بررسی قرار گرفته است.
در سراسر این پایان‌نامه فضای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ در نظر گرفته می‌شود.

۱-۱ مروری بر آنالیز تابعی

این بخش را با معرفی فضای برداری، فضاهای نرم‌دار، فضای باناخ، فضای توپولوژیک وخواص آن شروع می‌کنیم. سپس مفاهیم فضای دوگان و فضاهای محدب موضعی را بیان می‌کنیم. مفاهیم گفته‌شده در این بخش برگرفته از کتاب آنالیز تابعی رائو[1] می‌باشد.

تعریف ۱.۱ فرض کنیم X یک فضای برداری باشد یک **نیم نرم** روی X به صورت $P : X \longrightarrow \mathbb{R}$ یا $\|.\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ تعریف می‌شود که خواص ذکر شده در صفحه بعد را داراست:

[1] Rao

$(i) : P(x) \geq 0 \quad , \quad \forall x \in X$

$(ii) : P(x+y) \leq P(x) + P(y) \quad , \quad \forall x, y \in X$

$(iii) : P(\alpha x) = |\alpha| P(x) \quad , \quad \forall x \in X \quad , \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

یک نیم نرم رانرم می‌گوییم اگر در شرط زیر صدق کند:

$P(x) = 0 \leftrightarrow x = 0$

یک فضای برداری X با تابع نرم $\|.\|$ که روی آن تعریف شود یک فضای نرم‌دار است که آن را با $(X, \|.\|)$ نشان می‌دهیم.

فرض کنیم $(X, \|.\|)$ یک فضای نرم‌دار و $d(x,y) = \|x-y\| \quad , \quad \forall x, y \in X$ آنگاه d یک متر روی X است.

تعریف ۲.۱ یک فضای برداری نرم‌دار که نسبت به متر ناشی از نرم کامل باشد **فضای باناخ** نام دارد، به عبارت دیگر هر دنباله کوشی [2] در این فضا همگرا می‌باشد.
فضای $\mathbb{R}^n$ که به متر اقلیدسی مجهز شده،ساده‌ترین مثال از یک فضای باناخ است.

تعریف ۳.۱ دو نرم $\|.\|_1$ و $\|.\|_2$ تعریف شده روی فضای برداری X معادلند اگر اعداد مثبت K و K' وجود داشته‌باشد به‌طوری‌که

$$K\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq K'\|x\|_1 \quad , \quad \forall x \in X$$

تعریف ۴.۱ روی یک فضای برداری متناهی بعد تمام نرم‌ها معادلند.

تعریف ۵.۱ فرض کنیم X یک مجموعه غیر تهی باشد خانواده τ از زیر مجموعه‌های X را یک توپولوژی روی X گوییم هرگاه:

i): $X, \emptyset \in \tau$

ii): τ نسبت به اجتماع نامتناهی بسته باشد.

[2] cauchy

(iii): τ نسبت به اشتراک متناهی بسته باشد.

زوج (X, τ) را یک فضای توپولوژیک گوییم. وقتی که روی X یک توپولوژی وجود داشته‌باشد اعضای توپولوژی را مجموعه‌های باز گویند و مجموعه‌ای رابسته گوییم هرگاه متمم آن متعلق به توپولوژی باشد.

نکته ۶.۱ گردایه $\tau' \subset \tau$ یک پایه برای τ است اگر هر عضو τ (یعنی هر مجموعه باز) اجتماعی از اعضای τ' باشد.

اکثر قضایای وجود جواب $GVVI$ در عملگرهای ناپیوسته و ستاره شبه یکنوا روی فضاهای برداری توپولوژیک بررسی شده‌است . بنابراین در ادامه فضاهای برداری توپولوژیک را تعریف می‌کنیم .

تعریف ۷.۱ فرض کنید X یک فضای برداری روی میدان K باتوپولوژی τ باشد، در این صورت X رایک **فضای برداری توپولوژیک** $(t.v.s)$[۳] می گوییم اگر نگاشت‌های زیر پیوسته باشند.

$(x, y) \to x + y$ از $X \times X$ به‌توی X

$(\alpha, x) \to \alpha x$ از $K \times X$ به توی X

فضای توپولوژیک X را هاسدورف گوییم هرگاه برای هر دو نقطه متمایز در X دو همسایگی جدا از هم از آنها موجود باشد.

مثال ۸.۱ یک فضای برداری نرم‌دار یک فضای برداری توپولوژیک است.

نکته ۹.۱ اگر (X, τ) یک فضای توپولوژیکی و $E \subseteq X$ باشد، **بستار** E برابر است بااشتراک تمام مجموعه‌های بسته شامل E یعنی:

$$\overline{E} = \cap\{S \quad : \quad X - S \in \tau \quad , \quad E \subseteq S\}$$

[3] topological vector space

همچنین **مجموعه نقاط داخلی** E را که با $(intE)$ نمایش می‌دهیم برابر است بااجتماع تمام مجموعه‌های باز مشمول در E یعنی:

$$intE = \cup\{G \quad : \quad G \in \tau \quad , \quad G \subseteq E\}$$

بعلاوه همسایگی هر نقطه $p \in X$ مجموعه بازی است که شامل نقطه p است.

تعریف ۱۰.۱ زیر مجموعه E از یک فضای برداری توپولوژیک کراندار است اگر به ازای هر همسایگی V از صفر در X عددی مانند $s > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که به ازای هر $t > s$ داشته باشیم $E \subset tV$.

تعریف ۱۱.۱ مجموعه X را یک مجموعه فشرده گوییم اگر هر پوشش باز برای X شامل یک زیر پوشش متناهی برای X باشد. به عبارت دیگر اگر C یک پوشش باز دلخواهی برای X باشد آنگاه C اعضایی مانند $c_1, \cdots, c_n$ داشته باشد به‌طوری‌که $X = c_1 \cup \cdots c_1$.

برخی از قضایای وجود جواب $GVVI$ در فصلهای آتی در عملگرهای ناپیوسته روی فضای دوگان مطرح می‌شود. برای یادآوری مفهوم این فضاها در ادامه فضای دوگان توپولوژیک را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۲.۱ فرض کنیم E یک فضای برداری توپولوژیک باشد. مجموعه همه تابعک‌های خطی پیوسته روی E را فضای دوگان توپولوژیک E می‌گوییم وبا E^* نمایش می‌دهیم.

نکته ۱۳.۱ فضای دوگان E یعنی E^* یک فضای برداری است.

در تعریف بعد مفهوم پیوستگی نگاشت‌ها روی فضاهای توپولوژیکی بیان شده‌است.

تعریف ۱۴.۱ فرض کنیم (X, τ) و (Y, τ) فضاهای توپولوژیکی باشند نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ در $x \in X$ پیوسته است اگر برای هر همسایگی V از $f(x)$ در Y یک همسایگی U از x وجود داشته باشد به‌طوری‌که $f(U) \subset V$.

نگاشت f روی X پیوسته است اگر f در هر نقطه $x \in X$ پیوسته باشد.

تعریف ۱۵.۱ فرض کنیم X و Y فضاهای باناخ و $T : X \longrightarrow Y$ تبدیل خطی باشد نگاشت T پیوسته است اگروتنهااگر گراف آن در $X \times Y$ بسته باشد.

تعریف ۱۶.۱ **(فضای باناخ دوگان)** فرض کنیم V یک فضای باناخ باشد، اگر X یک فضای برداری باشد که ایزومورفیسم و ایزومتریک با فضای دوگان V' از V است، آنگاه X یک فضای باناخ دوگان نامیده می‌شود. (در حالت خاص X کامل است.)

تعریف ۱۷.۱ اگر E و F دو فضای برداری نرم‌دار باشند عملگر خطی $T : E \longrightarrow F$ فشرده است اگر تصویر گوی واحد بسته E در F فشرده نسبی باشد یعنی $\overline{T(\overline{B_E})}$ در F فشرده باشد.

لم ۱۸.۱ اگر بعد عملگر خطی کراندار $T : E \longrightarrow F$ متناهی باشد آنگاه T فشرده است.

برای معرفی فضاهای محدب موضعی که حالت خاصی از فضاهای برداری توپولوژیک هستند ابتدا پایه موضعی را در یک فضای برداری توپولوژیک تعریف می‌کنیم، سپس به معرفی فضاهای محدب موضعی می‌پردازیم .

تعریف ۱۹.۱ فرض کنیم X یک فضای برداری توپولوژیک باشد . گردایه γ از همسایگیهای نقطه $p \in S$ یک پایه موضعی در p است اگر هر همسایگی از p شامل عضوی از γ باشد.

در این قسمت مهمترین رده از فضاهای برداری توپولوژیک یعنی فضاهای محدب موضعی را تعریف می کنیم.

تعریف ۲۰.۱ یک فضای برداری توپولوژیک محدب موضعی است اگر یک پایه همسایگی (پایه موضعی) در صفر شامل مجموعه‌های محدب داشته باشد.
توپولوژی روی یک فضای محدب موضعی یک توپولوژی محدب موضعی نامیده می‌شود.

مثال ۲۱.۱ $\mathbb{R}^n$ مثالی از یک فضای محدب موضعی است.
اگر $x = (x_۱, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ نرم روی $\mathbb{R}^n$ را به صورت $\|x\| = \left(\sum_{i=۱}^n x_i^۲\right)^{\frac{۱}{۲}}$ تعریف می‌کنیم.
اگر $x \in \mathbb{R}^n$ خانواده $\beta_x = \{B_{\frac{۱}{n}}(x) \ : \ n = ۱, ۲, ...\}$ یک پایه از همسایگیهای باز محدب در x

است که $B_{\frac{1}{n}}(x)$ گوی به مرکز x و شعاع $\frac{1}{n}$ است.

خانواده $\beta = \{\beta_x \ : \ x \in \mathbb{R}^n\}$ یک پایه از همسایگی‌ها برای $\mathbb{R}^n$ است.

تعریف ۲۲.۱ فرض کنیم X یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ باشد، یک مجموعه غیر تهی A در X محدب است اگر برای هر $c, d \in A$، پاره‌خط $[c, d] = \{tc + (1 - t)d \ : \ 0 \leq t \leq 1\}$ متعلق به A باشد.

خصوصیات توپولوژیکی این مجموعه در قالب قضیه زیر بیان شده‌است.

لم ۲۳.۱ فرض کنیم X یک فضای برداری توپولوژیک باشد آنگاه احکام زیر معتبرند:

(۱): بستار هر مجموعه محدب، محدب است.

(۲): مجموعه نقاط داخلی یک مجموعه محدب، محدب است.

تعریف ۲۴.۱ زیر مجموعه ناتهی A از فضای برداری X **متقارن** است اگر به ازای هر $x \in A$ نتیجه شود $-x \in A$ یعنی $A = -A$.

تعریف ۲۵.۱ (مجموعه دایره ای).[۴]: یک زیر مجموعه غیر تهی A از فضای برداری X دایره ای است اگربرای هر $x \in A$ و $|\lambda| \leq 1$ نتیجه شود $\lambda x \in A$. یعنی $\lambda A \subset A$ برای هرλ که $\lambda \leq 1$.

تذکر: از تعریف مجموعه دایره‌ای نتیجه می‌شود که هر مجموعه دایره‌ای A متقارن و شامل صفراست.

تعریف ۲۶.۱ (مجموعه به‌طورمطلق محدب [۵]): یک زیر مجموعه غیرتهی A از فضای برداری X را **به‌طورمطلق‌محدب** می‌گوییم اگر $\lambda A + \mu A \subset A$ وقتی‌که $|\lambda| + |\mu| \leq 1$.

در لم بعد ارتباط بین مجموعه‌های به طورمطلق محدب و مجموعه‌های محدب را بیان می‌کنیم.

[4] circled set

[5] absolutly convex set

لم ۲۷.۱ مجموعه A به‌طورمطلق محدب است اگروتنهااگر A محدب و دایره‌ای باشد.

اثبات. رجوع شود به مرجع [۱۳] □

تعریف ۲۸.۱ یک زیر مجموعه غیر تهی A از فضای برداری X جاذب [6] است اگر برای هر $x \in X$، $\rho > o$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\lambda x \in A$ برای هر $|\lambda| \le \rho$.

تعریف ۲۹.۱ (غلاف محدب[7]). اگر $K = \{u_۱, \cdots, u_n\}$ زیر مجموعه ناتهی از فضای برداری توپولوژیکی حقیقی E باشد اشتراک همه مجموعه‌های محدب شامل K را **غلاف محدب** K می‌گوییم و با CoK نشان می‌دهیم که با مجموعه زیر برابر است:

$$CoK = \{\sum_{i=۱}^{n} \lambda_i u_i \ : \ \sum_{i=۱}^{n} \lambda_i = ۱ \quad , \quad ۰ \le \lambda_i \le ۱ \ , \ u_i \in K\}$$

نکته ۳۰.۱ غلاف محدب بسته K برابر است با اشتراک همه مجموعه‌های محدب وبسته از E شامل K که آن را با $\overline{coK}$ نشان می‌دهیم.

لم ۳۱.۱ فرض کنیم A یک مجموعه محدب باشد. اگر $\alpha \ge ۰$ و $\beta \ge ۰$ آنگاه تساوی زیر برقرار است:

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta B$$

اثبات. رجوع شود به مرجع [۱۳]. □

لم ۳۲.۱ (لم زرن) . فرض کنیم $(X, \le)$ یک مجموعه مرتب جزئی باشد اگر هر زنجیر C در X یک کران بالا داشته باشد آنگاه X یک عنصر ماکسیمال دارد.

تعریف ۳۳.۱ فرض کنیم C یک زیر مجموعه محدب و باز از فضای باناخ E باشد و $۰ \in int(C)$ تابعک مینکوفسکی [8] روی C به این صورت تعریف می‌شود:

---

[6] absorbing

[7] convex hull

[8] Minkowski functional

$P : E \longrightarrow [0, \infty)$

$P(x) = \inf\{r > 0 \quad : \quad x \in rC\}$

و به ازای هر $x \in E$ ، $0 \leq P(x) < \infty$.

تابع مینکوفسکی روی C دارای ویژگی‌های زیر است:

الف):P زیرخطی است یعنی:

$$P(x+y) \leq P(x) + P(y) \qquad \text{و} \qquad P(\alpha x) = \alpha x \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}^+$$

ب): $M \geq 0$ موجود است به‌طوری‌که $0 \leq P(x) \leq M\|x\|$

ت): $C = \{x \in E \quad : \quad P(x) < 1\}$

از قضیه هان- باناخ در اثبات قضیه مینی‌ماکس در فصل دوم استفاده شده است واثبات این قضیه در مرجع [۱۴] بیان شده است.

قضیه ۳۴.۱ (هان ـ باناخ) [9] فرض کنیم S تابعک زیر خطی روی E باشد، در این صورت تابعک خطی L روی E وجود دارد به‌طوری‌که $L \leq S$ روی E. همچنین اگر C زیرمجموعه محدب و غیر تهی از E باشد، تابعک خطی L روی E وجود دارد به‌طوری‌که $L \leq S$ روی E و $\inf_C L = \inf_C S$

تعریف ۳۵.۱ (مجموعه جهتدار[10]). فرض کنیم E یک مجموعه مرتب جزئی باشد E را یک مجموعه جهتدار گوییم اگر شرط زیر برقرار باشد:

$$\forall u, v \in E \quad , \quad \exists w \in E \quad : \quad u \leq w \quad , \quad v \leq w$$

فرض کنیم E یک مجموعه جهتدارشده و X یک مجموعه باشد، تابع $x : E \longrightarrow X$ را یک **شبکه** نامیم و آن را با $\{x_i\}$ $(i \in E)$ نمایش می دهیم.

یک دنباله حالت خاصی از شبکه است.

[9] Hahn-Banach

[10] directed set

۱-۲ توپولوژی ضعیف و خواص آن

در این بخش علاوه بر توپولوژی ناشی از نرم توپولوژی ضعیف را روی یک فضای توپولوژیک و توپولوژی ضیف ستاره را روی دوگان یک فضای توپولوژیک تعریف کرده و سپس به معرفی خواص توپولوژی ضعیف و ضعیف ستاره می‌پردازیم. برای بیان توپولوژی ضعیف ابتدا به معرفی زوج دوگان می‌پردازیم. بعد از تعریف توپولوژی ضعیف و ضعیف ستاره بر یک فضای برداری توپولوژیک یک قضیه مهم را که در فصل‌های آتی کاربرد دارد بیان می‌کنیم.

تعریف ۳۶.۱ [۱۳]**(جفت دوگان).** اگر X و Y دو فضای برداری روی باشند. زوج فضای برداری $\langle X,Y\rangle$ یک زوج دوگان است اگر یک تابعک دوخطی $\langle .,.\rangle$ روی $X\times X$ وجود داشته باشد که در شرایط زیر صدق کند:

$$\langle x,y\rangle=0 \qquad , \qquad \forall y\in Y \Longrightarrow x=0$$

$$\langle x,y\rangle=0 \qquad , \qquad \forall x\in X \Longrightarrow y=0$$

تعریف ۳۷.۱ اگر$\langle X,Y\rangle$ یک زوج دوگان باشد. توپولوژی ضعیف روی X برابر است با توپولوژی تولید شده با خانواده $\{P_y \ : \ y\in Y\}$ از نیم نرمها که $P_y(x)=|\langle x,y\rangle| \ \ , \ \ \forall x\in X$ و این توپولوژی را با $\sigma(X,Y)$ نمایش می‌دهیم.

همچنین یادآوری می‌کنیم که توپولوژی $\sigma(X,Y)$ یک توپولوژی هاسدورف است.

قضیه ۳۸.۱ اگر X یک فضای محدب موضعی باشد، آنگاه X^* نقاط بر X را جدا می‌کند یعنی $\Lambda\in X^*$ ،$\gamma_1,\gamma_2\in\mathbb{R}$ای وجود دارند به‌طوری‌که برای $x_1,x_2\in X$ که $x_1\neq x_2$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$\Lambda x_1<\gamma_1<\gamma_2<\Lambda x_2$$

اثبات. رجوع شود به مرجع [۱۴] □

قضیه بعد، یکی از مهمترین قضایایی است که از نتیجه آن دراثبات وجود جواب قوی در عملگرهای ناپیوسته روی فضای باناخ دوگان کاربرد دارد.

قضیه ۳۹.۱ فرض کنیم X یک فضای برداری و X' یک فضای برداری جداساز از تابعک‌های خطی بر X باشد . (یعنی به ازای $\Lambda \in X'$ ای ، هر وقت x_1 و x_2 نقاط متمایزی از X باشند، $\Lambda x_1 \neq \Lambda x_2$) در این صورت توپولوژی القاشده از X' فضای X را به یک فضای محدب موضعی که دوگانش فضای X' است، تبدیل می‌کند.

اثبات. رجوع شود به مرجع [۱۴]. □

حال به معرفی توپولوژی ضعیف ستاره روی فضای دوگان X می‌پردازیم.

تعریف ۴۰.۱ کوچکترین توپولوژی روی E^* که تمام نگاشت‌های به صورت $\varphi_x : E^* \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ \varphi_x(f) = f(x)$، نسبت به آن پیوسته باشد، **توپولوژی ضعیف ستاره** نامیده می‌شود و به صورت $\sigma(E^*, E)$ نمایش داده می‌شود.

لم ۴۱.۱ در فضای نرم‌دار متناهی بعد توپولوژی ضعیف و قوی روی X یکسانند.

قضیه ۴۲.۱ اگر $C \subseteq E$ مجموعه محدب و در توپولوژی قوی بسته باشد در توپولوژی ضعیف $\sigma(E, E^*)$ نیز بسته است.

لم ۴۳.۱ فرض کنیم $(x_n)_1^\infty$ دنباله‌ای از نقاط X باشد $x_n \to x$ در توپولوژی ضعیف اگر و تنها اگر به ازای هر $\varphi \in X^*\ ,\ \varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$ در $\mathbb{R}$.

تعریف ۴۴.۱ اگرE یک فضای باناخ و نگاشت $J : E \longrightarrow E^{**}$ که به صورت $J(x)(f) = f(x)$ تعریف شده، پوشا باشد فضای E را **فضای باناخ بازتابی** می‌نامیم.

لم ۴۵.۱ اگر E یک فضای بازتابی باشد توپولوژی ضعیف و ضعیف ستاره روی E^* یکسانند.

قضیه ۴۶.۱ فضای باناخ E بازتابی است اگروتنهااگر گوی واحد بسته $\{x \in X\ :\ \|x\| \leq 1\}$ در توپولوژی ضعیف روی E فشرده باشد.

قضیه ۴۷.۱ اگر E فضای باناخ بازتابی باشد و K زیرمجموعه بسته، محدب و کراندار در توپولوژی نرم باشد آنگاه K در توپولوژی ضعیف فشرده است.

قضیه ۴۸.۱ **(قضیه باناخ ـ آلااقلو)**[11] اگر V یک همسایگی ۰ در فضای برداری توپولوژیک X باشد و $K = \{\Lambda \in X^* \ : \ |\Lambda x| \leq ۱$ ، $x \in V$ به ازای هر $\}$ آنگاه K فشرده ضعیف ستاره می‌باشد.

۱-۳ فضای برداری توپولوژیک مرتب

در این بخش فضاهای برداری توپولوژیکی را به یک ترتیب جزئی مجهز می‌کنیم. سپس به تعریف قطب و مخروط دوگان روی یک فضای محدب موضعی می‌پردازیم و بااستفاده از آن قضیه مهم دوقطبی را تعریف می‌کنیم.از نتایج این قضیه در بدست آوردن جواب قوی $GVVI$ روی یک فضای باناخ دوگان استفاده می‌کنیم.

تعریف ۴۹.۱ فضای برداری توپولوژیکی E را در نظر می‌گیریم اگر این فضا مجهز به رابطه $\leq$ با خواص انعکاسی، تراگذری و پادتقارنی باشد و علاوه بر آن شرایط زیر برقرار باشد:

$$(a)\ x \leq y \quad \rightarrow \quad x+y \leq y+z \ \ , \ \ \forall x,y,z \in E$$

$$(b)\ x \leq y \quad \rightarrow \quad \lambda x \leq \lambda y \ \ , \ \ \forall x,y \in E \ \ ,\forall \lambda \in \mathbb{R}_+$$

آنگاه فضای برداری توپولوژیکی E یک **فضای برداری توپولوژیک مرتب** نامیده می‌شود وبه صورت $(E,\leq)$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۵۰.۱ زیر مجموعه C از یک فضای توپولوژیک E یک **مخروط** نامیده می‌شود اگر برای هر عدد غیر منفی t و به‌ازای هر $c \in C$ داشته باشیم $tc \in C$.

علاوه بر این C یک مخروط محدب در E است اگر $C + C \subseteq C$.

یک مخروط نوکدار است اگر $C \cap -C = \{۰\}$.

مخروط C بسته است اگر $\bar{C} = C$.

[11] Banach-Alaoglu theorem