بسم الله الرحمن الرحيم

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و

نوآوریهای ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه

متعلق به دانشگاه رازی است.

دانشگاه رازی

دانشکده علوم

گروه‌فیزیک

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی فیزیک

حالت های همدوس اتم هیدروژن

استاد راهنما:

دکتر اردشیر رابعی

نام دانشجو:

مریم صیدی سرجوبی

تابستان ۱۳۸۹

ستایش و تشکر

سپاس پرودگار کیهان را سزاست. از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر اردشیر رابعی که همواره از محضر علم و اخلاق ایشان بهره مند شده ام و راهنمایی های ارزنده‌ی ایشان راهگشای من بوده است صمیمانه تشکر می نمایم. همچنین در همه حال قدردان زحماتی که پدر و مادر عزیزم تا کنون متحمل شده اند هستم و از دوستان بسیار خوبم خانم ها سونیا جسری، سودابه رضایی، طیبه رمضانی و آقایان جواد عبدولی، مهدی قاسمی و محسن حدادها بخاطر کمک هایشان کمال تشکر را دارم.

تقدیم به

پدر و مادرم

چکیده

اتم هیدروژن یکی از سیستم های بنیادی در فیزیک می باشد که همواره مورد توجه فیزیکدانان بوده و ویژگی های مختلف آن مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. در این پایان نامه سعی داریم ویژگی های تقارنی این اتم را بررسی نموده و به بحث در مورد حالت های همدوس آن بپردازیم.

بدین منظور ابتدا گروههای تقارنی اتم هیدروژن را معرفی کرده و سپس چگونگی ارتباط تقارن هندسی و دینامیکی آن را با گروههای معرفی شده مطرح می نماییم. در این رهاورد ابتدا گروه تقارن هندسی هامیلتونین را بررسی کرده و سپس گروه تقارن دینامیکی ترازهای اصلی و گروههای مولد طیفی را (که گذار بین ترازهای مختلف اتم هیدروژن را پوشش می دهند) مورد تجزیه و تحلیل قرار می دهیم. در ادامه، این مباحث را مبنای مطالعه حالت های همدوس اتم هیدروژن قرار داده و مجموعه ای از حالت های همدوس را بر پایه نمایش های کاهش ناپذیر گروههای تقارنی طیف گسسته و پیوسته این سیستم بدست می آوریم. برای معرفی این حالت ها از نظرات و نتایج ارائه شده توسط افرادی چون کلودر، گزو، اینوماتا و پولشین استفاده می کنیم و نهایتاً نشان می دهیم که این حالات رسیدن به کمترین عدم قطعیت در اندازه گیری های کوانتومی را ممکن می سازند. به عبارت بهتر عناصر این مجموعه نزدیک ترین حالات به حالات کلاسیکی هستند و می توان آنها را به عنوان ابزاری که ارتباط بین مکانیک کلاسیک و مکانیک کوانتومی اتم هیدروژن را فراهم می سازند در نظر گرفت.

معرفی نماد ها و سمبل های به کار رفته در پایان نامه

ماتریس دوران	$\mathbf{R}$
شعاع فضا ـ زمان	R
متریک فضا ـ زمان مینکوفسکی	g
متریک فضا ـ زمان اقلیدسی	$G_\circ$
گروه لی	G
عناصر گروه لی	$\check{g}$
جبر لی	g
هامیلتونین	H
فضای هیلبرت	$\mathbf{H}$
ثابت هابل	H_c
ثابت کیهانشناسی	Λ_c
عملگر یکه	I_d
کت	$\vert\ \rangle$
کره d بعدی	S^d
تانسور کروی مرتبه k	T^k_q
تصویر استروگرافی	T_*
ماتریس های پاؤلی	σ_i
ماتریس های دیراک	γ_μ
مجموعه اعداد حقیقی	$\mathbb{R}$
مجموعه اعداد مختلط	$\mathbb{C}$
ویژه مقدار انرژی	E

فهرست مندرجات

۱ مقدمه ۱

۲ گروه دوسیتر ۷

۲. ۱ گروه $SO(۳)$ ۹
۲. ۱. ۱ معرفی گروه ۹
۲. ۱. ۲ مولدها و جبر لی گروه $SO(۳)$ ۱۱
۲. ۱. ۳ گروه پوششی جهانی ۱۱
۲. ۱. ۴ نمایش های کاهش ناپذیر گروه $SO(۳)$ ۱۲

۲. ۲ گروه $SO(۴)$ ۱۴
۲. ۲. ۱ معرفی گروه $SO(۴)$ ۱۴
۲. ۲. ۲ نمایش های گروه$SO(۴)$ ۱۵

۲. ۳ گروه دوسیتر ۱۶
۲. ۳. ۱ معرفی گروه دوسیتر ۱۶
۲. ۳. ۲ مولدها و جبر لی گروه دوسیتر ۱۹
۲. ۳. ۳ گروه پوششی جهانی ۲۱
۲. ۳. ۴ نمایش های کاهش ناپذیر گروه دوسیتر ۲۲

۳ گروه کنفورم ۲۷

۳. ۱ گروه کنفورم در فضا ـ زمان مینکوفسکی ۲۹
۳. ۱.۱ معرفی گروه کنفورم ۲۹
۳. ۱.۲ جبر لی گروه کنفورم ۳۰
۳. ۱.۳ ناوردایی جرم تحت تبدیلات کنفورم ۳۳

۳. ۲ گروه کنفورم در فضا ـ زمان رابرتسون ـ والکر ۳۵
۳. ۲.۱ فضا ـ زمان رابرتسون ـ والکر ۳۵
۳. ۲.۲ متریک استاتیک انیشتین به شکل یک متریک تخت کنفورم ۳۶
۳. ۲.۳ بردارهای کیلینگ کنفورم در فضا ـ زمان رابرتسون ـ والکر ۳۸

۴ بررسی رفتار اتم های هیدروژن گونه به کمک نظریه گروهها ۴۰

۴. ۱ تقارن هندسی ۴۲
۴. ۱.۱ معادله موج کلین ـ گوردون ۴۲
۴. ۱.۲ تقارن هندسی اتم هیدروژن ۴۴

۴. ۲ تقارن دینامیکی ۴۷
۴. ۲.۱ حرکت کلاسیکی در پتانسیل نیوتنی ۴۷
۴. ۲.۲ تقارن دینامیکی با توجه به جبر($so(۴)$ ۴۸
۴. ۲.۳ تقارن دینامیکی با توجه به گروه $SO(۴)$ ۵۱

۴. ۳ تقارن دوسیتر اتم هیدروژن ۵۴

۴. ۴ تقارن کنفورم اتم هیدروژن ۵۸
۴. ۴.۱ گروه تقارنی معادله دیراک ۵۸
۴. ۴.۲ تقارن کنفورم اتم هیدروژن در نمایش شوینگر ۶۲
۴. ۴.۳ گشتاور دو قطبی گذار ۶۶

۵ حالت های همدوس اتم هیدروژن ۶۹

۵. ۱ معرفی حالت های همدوس ۷۱

۵. ۲ حالت های همدوس کلودر ۷۲
۵. ۱.۲ دینامیک حالت های همدوس کلودر ۷۵
۵. ۲.۲ رابطه کنش ۷۸
۵. ۳.۲ حالت های همدوس تعمیم یافته ۸۱

۵. ۳ روش کلی پریلیمو در معرفی حالت های همدوس ۸۵

۵. ۴ حالت های همدوس اتم هیدروژن به روش پریلیمو ۸۸
۵. ۱.۴ حالت های همدوس با توجه به تقارن کنفورم اتم هیدروژن ۸۸
۵. ۲.۴ حالت های همدوس با توجه به تقارن آنتی دوسیتر اتم هیدروژن ۹۰
۵. ۳.۴ حالت های همدوس با توجه به تقارن دوسیتر اتم هیدروژن ۹۷

پیوست A ۱۰۳

پیوست B ۱۰۸

پیوست C ۱۱۲

پیوست D ۱۱۶

فصل ۱

مقدمه

وجود تقارن در سیستم های فیزیکی یکی از ویژگی های بنیادی مکانیک کلاسیک می باشد، به عنوان مثال ناوردایی هامیلتونین یک سیستم نسبت به عناصر یک گروه نتیجه تقارن سیستم نسبت به آن گروه می باشد. این ویژگی به فیزیکدانان اجازه می دهد که با اعمال تبدیلات متقارن بر حالت های مشاهده شده مربوط به یک سیستم، حالت های جدیدی را پیش بینی نمایند. در خلال مطالعات دانشمندان در این زمینه بررسی تقارن سیستم های فیزیکی به مرور نقش مهم تری در فیزیک نظری پیدا نمود و فرآیند وسیعی در مطالعه تقارن دینامیکی بسیاری از مدل های فیزیکی ایجاد گردید. از این ویژگی برای توصیف خصوصیات مکانیک کوانتومی سیستم های فیزیکی استفاده می شود. در بین سیستم های مورد مطالعه، نوسانگر هماهنگ و اتم هیدروژن دو مدل حقیقی، قابل حل و ساده هستند که در بسیاری از موارد به عنوان سیستم های بنیادی در فیزیک مورد توجه قرار می گیرند.

هدف ما در این پایان نامه معرفی حالت های همدوس[1] اتم هیدروژن به کمک گروه های تقارنی این سیستم می باشد. بدین منظور در فصل های دوم و سوم به معرفی گروه های مورد نیاز اتم هیدروژن پرداخته و سپس با استفاده از این گروهها در فصل چهارم به بررسی تقارن اتم هیدروژن می پردازیم. فصل پنجم نیز اختصاص به معرفی حالت های همدوس این اتم دارد.

همانطوریکه می دانیم اتم هیدروژن ساده ترین اتم موجود در طبیعت می باشد. این اتم تشکیل شده از یک پروتون به عنوان هسته و یک الکترون که حول هسته در حال چرخش می باشد. هامیلتونین این سیستم دارای پتانسیل کولنی بوده و به صورت زیر بیان می شود :

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{e^2}{r} \quad . \qquad (1.1)$$

این هامیلتونین به وضوح دارای تقارن هندسی نسبت به دوران در سه بعد می باشد بنابراین منطقی خواهد بود که اولین گروهی که معرفی شود گروه دوران در سه بعد یعنی گروه $SO(3)$ باشد. به این ترتیب در فصل دوم ابتدا به بررسی گروه $SO(3)$ می پردازیم ولی همانطوریکه بعداً نشان خواهیم داد این گروه در بر گیرنده کامل بحث تقارن نبوده لذا از گروه تقارنی $SO(4)$ استفاده خواهیم نمود. این گروه ها نه تنها در

[1] Coherent States

بررسی تقارن اتم هیدروژن وارد می شوند بلکه زیر گروه هایی از گروه دوسیتر[۲]هستند و نمایش گروه دوسیتر بر پایه فضای نمایشی آنها ارائه می گردد. گروه دوسیتر یکی از گروههای تقارنی اتم هیدروژن می باشد که ارتباط آن را با این سیستم در فصل چهارم مورد تجزیه و تحلیل قرار می دهیم لذا انتهای فصل دوم اختصاص به معرفی این گروه دارد.

فصل سوم اختصاص به معرفی گروه کنفورمی [۳] دارد که در بررسی گذار در اتم هیدروژن بکار برده می شود. جدا از اهمیت گروه کنفورم در تقارن اتم هیدروژن می توان گفت که این گروه، گروهی است که به طور تقریبی دارای ویژگی های لازم برای توصیف جهان واقعی می باشد. به منظور توضیح بیشتر درباره ویژگی های کلی این گروه می توان به این موضوع اشاره نمود که بیشتر مدل های کیهان شناسی معاصر بر پایه همسانگردی [۴] و همگنی [۵] جهان در فضا ـ زمان بنا شده است در صورتیکه مشاهدات تجربی نشان داده اند که جهان تنها از نظر فضایی همگن و همسانگرد بوده و نسبت به زمان در حال انبساط می باشد. بنابراین گروه تقارنی این فضا ـ زمان نیز باید مفهوم اتساع [۶] زمانی را در بر داشته باشد. گروه کنفورم دارای این ویژگی خاص بوده و در بسیاری از مباحث کیهان شناسی مورد استفاده قرار می گیرد(در انتهای فصل چهارم ارتباط بین اتم هیدروژن و عملگر اتساع موجود در گروه کنفورم را بررسی می نماییم).

در فصل چهارم به بررسی تقارن اتم هیدروژن می پردازیم. این بررسی بر اساس شرایط زیر می باشد :

۱) جرم کاهش یافته سیستم را معادل با جرم الکترون در نظر می گیریم.

۲) مکان هسته ثابت بوده و الکترون حول آن در حال چرخش است.

۳) از برهمکنش مغناطیسی بین الکترون و پروتون چشم پوشی می کنیم.

لازم به ذکر است که ابتدا اتم هیدروژن را بصورت غیر نسبیتی در نظر می گیریم(حرکت الکترون را غیر نسبیتی و اسپین آن را در محاسبات وارد نمی کنیم). همانطور که اشاره شد تقارن هندسی اولین تقارن بررسی شده در مورد اتم هیدروژن می باشد. تقارن سیستم وجود تبهگنی در حالت های آن سیستم را در بر دارد زیرا اگر حالت $(|\Psi\rangle)$ ویژه حالت هامیلتونین با ویژه مقدار E باشد(با توجه به اینکه تقارن هامیلتونین نسبت به گروه(G) به معنی جابجاپذیر بودن هامیلتونین و عناصر آن گروه$(\breve{g})$ می باشد) حالت $(\breve{g}|\Psi\rangle)$ نیز ویژه حالت هامیلتونین با همان ویژه مقدار خواهد بود. بدین ترتیب وجود تقارن در یک سیستم، تبهگنی را به همراه دارد. در مورد اتم هیدروژن تقارن هندسی موجب تبهگنی $۲l+۱$ ـ گانه بین زیر

---

[۲] De Sitter

[۳] Conformal group

[۴] isotropic ، منیفلد همسانگرد : از دید ناظری در یک نقطه، منیفلد در تمام جهات یکسان به نظر می رسد.

[۵] homogeneous ، منیفلد همگن به منیفلدی گفته می شود که متریک در همه جای آن یکسان باشد.

[۶] Dilation

ترازهای مشخص شده توسط عدد کوانتومی مغناطیسی m می گردد، در حالیکه با محاسبه ویژه مقادیر هامیلتونین مشخص می شود که طیف انرژی این سیستم تنها به عدد کوانتومی اصلی n وابسته بوده و حالات سیستم دارای تبهگنی n^2 ـ گانه هستند.

تبهگنی n^2 ـ گانه حالت های اتم هیدروژن ناشی از ناوردایی هامیلتونین نسبت به گروهی بزرگتر از گروه $SO(3)$ می باشد. این گروه برای طیف گسسته اتم هیدروژن گروه $SO(4)$ و برای طیف پیوسته آن گروه لورنتس[7] $SO(1,3)$ می باشد. تحت اثر گروه $SO(4)$ تبهگنی موجود در ترازهای اتم هیدروژن از بین نمی رود و این گروه تنها حالت های با انرژی یکسان را به یکدیگر تبدیل می کند در حالیکه می دانیم اگر اتم هیدروژن با میدان خارجی برهمکنش داشته باشد الکترون می تواند بین ترازهای مختلف اتم گذار انجام دهد. بنابراین به گروه تقارنی بزرگتری نیاز داریم که تقارن آن تبهگنی موجود را از بین برده و هر حالت از اتم را به ترکیب خطی از حالت های دیگر نگاشت دهد. به عبارت بهتر گذار بین ترازهای مختلف اتم هیدروژن را در بر بگیرد، چنین گروهی را گروه مولد طیف [8] می نامند.

در اولین تقریب، گروهی که دارای این ویژگی باشد گروه دوسیتر $SO(1,4)$ می باشد. تحت تقارن نسبت به این گروه گذار بین ترازهایی که به اندازه یک واحد با هم اختلاف دارند ممکن می باشد اما بحث تقارن اتم هیدروژن به این صورت دارای نقایصی می باشد، به عنوان مثال برای حالت های برانگیخته اتم هیدروژن که یک طیف پیوسته را تشکیل می دهند نمی توان ترازهای مجزایی که دارای اختلاف به اندازه یک عدد صحیح باشند تعریف نمود و گروهی که تقارن این طیف را برای گذار بین حالت های مختلف در بر می گیرد باید دارای عناصری باشد که گذارهای پیوسته را ممکن می سازند. اگر تنها طیف پیوسته اتم را در نظر بگیریم این گروه، گروه کنفورم برای فضای اقلیدسی سه بعدی بوده که ایزومورف با گروه دوسیتر می باشد. اما اگر کل طیف اتم هیدروژن مورد بررسی قرار بگیرد(در حالیکه الکترون را نسبیتی در نظر گرفته اسپین آن را در محاسبات وارد کنیم) معادله موج حاکم بر آن معادله دیراک و گروه تقارنی آن، گروه کنفورم $SO(2,4)$ خواهد بود. به این ترتیب در بخش آخر فصل چهارم تقارن کنفورم اتم هیدروژن را بررسی و مبحث تقارن اتم هیدروژن را به پایان می رسانیم.

در فصل پنجم به معرفی حالت های همدوس اتم هیدروژن می پردازیم. مبحث حالت های همدوس در زمینه فیزیک کوانتومی و ارتباط آن با فیزیک کلاسیک مطرح می شود. خود کلمه همدوس از اپتیک کوانتومی ریشه می گیرد. این نامگذاری اولین بار توسط گلوبر[9] در سال ۱۹۶۲ میلادی صورت گرفته است اما از نظر تاریخی مبحث حالت های همدوس توسط شرودینگر[10] و همزمان با تولد مکانیک

---

[7] Lorentz

[8] Spectrum generating group

[9] Glauber

[10] Schrödinger

کوانتومی، پا به عرصه وجود نهاده است. در خلال انجام مباحث مکانیک کوانتومی شرودینگر علاقه مند به مطالعه حالت های کوانتومی شد که رفتار کلاسیکی عملگر مکان یک سیستم کوانتومی را نتیجه دهد. عملگر مکان وابسته به زمان در تصویر هایزنبرگ [۱۱] عبارت است از :

$$Q(t) \;=\; e^{\frac{i}{\hbar}Ht}\; Q\; e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \;\;, \qquad (۲.۱)$$

که $H = p^{۲}/۲m + V(Q)$ هامیلتونین کوانتومی سیستم می باشد. شرودینگر رفتار کلاسیکی این عملگر را به این صورت تفسیر نمود که مقدار چشمداشتی آن در پایه یک حالت همدوس اختیاری، یعنی :

$$\bar{q}_{(t)} \;=\; \langle \text{حالت همدوس} |Q(t)| \text{حالت همدوس} \rangle \;\;, \qquad (۳.۱)$$

از معادله حرکت کلاسیکی تبعیت کند :

$$m\overline{q}_{(t)} + \overline{\frac{\partial V}{\partial q}} \;=\; ۰ \;\;. \qquad (۴.۱)$$

اولین نمونه از حالت های همدوس که توسط شرودینگر بررسی شده است حالت های همدوس نوسانگر هماهنگ می باشد. این حالت ها طوری تعریف می شوند که مقدار چشم داشتی عملگر مکان به صورت سینوسی تحول یابد.

با اینکه حالت های همدوس حالت های کوانتومی هستند اما شرایطی را فراهم می آورند که تعبیر کلاسیکی بسیاری از موقعیت های کوانتومی امکان پذیر باشد. سالها پس از آنکه شرودینگر حالت های همدوس نوسانگر هماهنگ را معرفی نمود، افرادی چون گلوبر، کلودر[۱۲]، سادرشان[۱۳] و پریلیمو [۱۴] به بحث در مورد حالت های همدوس سایر سیستم های فیزیکی (از جمله محاسبه حالت های همدوس اتم هیدروژن) پرداختند. در این بین راههای متفاوتی برای به دست آوردن حالت های همدوس یک سیستم فیزیکی معرفی گردید. یکی از این روشها بر پایه تئوری نمایش های گروه قرار دارد. در این روش حالت های همدوس برای گروه دینامیکی یک سیستم فیزیکی داده شده به دست می آیند (این روش به تفصیل توسط پریلیمو توضیح داده شده است). سیستم حالت های همدوسی که به این شکل به دست می آیند با فضای هم رده[۱۵] گروه دینامیکی ایزومورف [۱۶] می باشند.

در فصل پنجم ابتدا حالت های همدوس کلودر را برای اتم هیدروژن بیان نموده و به بحث در مورد

---

[۱۱] Heisenberg

[۱۲] Klauder

[۱۳] Sudarshan

[۱۴] Perelomove

[۱۵] Coset space

[۱۶] Isomorphic

تصحیحاتی که افرادی چون گزو[۱۷] و اینوماتا[۱۸] بر این حالت ها اعمال می کنند می پرداریم اما پس از بررسی این حالت ها مشخص می شود که آنها نیز دارای نقایصی هستند که باید برطرف شود. بدین منظور در راستای محاسبات پولشین [۱۹]، روش پریلیمو را در به دست آوردن حالت های همدوس در مورد گروههای دینامیکی اتم هیدروژن به کار برده و سعی می کنیم حالت های همدوس مناسب را برای این سیستم به دست آوریم.

[۱۷] Gazeau
[۱۸] Inomata
[۱۹] Polshin

فصل ۲

گروه دوستر

مقدمه

بیان این واقعیت که ویژه حالات انرژی بعضی از سیستم های فیزیکی مانند اتم ها، مولکولها و هسته ها می توانند به عنوان پایه ای برای نمایش های یکانی گروههای غیر فشرده [1] به کار روند این امید را به وجود آورده که این گروهها بتوانند نقشی حیاتی در فیزیک ایفا کنند به طوریکه نه تنها خواص تقارنی بلکه خواص دینامیکی سیستم های فیزیکی را نیز توضیح دهند.

اتم هیدروژن به عنوان ساده ترین اتم یک نقش حیاتی در مکانیک کوانتومی ایفا می کند. این اتم تنها اتمی است که مسئله ویژه مقداری انرژی آن دقیقاً حل می شود، از طرف دیگر توابع موج اتم هیدروژن نقطه شروع توصیف تمام اتم ها و مولکولها هستند. در این فصل و فصل آینده به معرفی گروههایی می پردازیم که در بررسی تقارن هندسی و دینامیکی این اتم نقش عمده ای ایفا می کنند.

با توجه به اینکه در فصل چهارم نشان می دهیم که گروه تقارن هندسی اتم هیدروژن گروه $SO(۳)$ می باشد، لازم است که مقدمه ای برای آشنایی بیشتر با این گروه ارائه شود از این رو در بخش اول این فصل به معرفی گروه $SO(۳)$ می پردازیم. از طرف دیگر از آنجا که گروه تقارن دینامیکی اتم هیدروژن در اولین تقریب گروه $SO(۴)$ است در بخش دوم، این گروه را نیز بررسی نموده و در مورد نمایش های یکانی آن مطالبی را عنوان می نماییم. این گروه نه تنها در بررسی اتم هیدروژن وارد می شود بلکه زیرگروهی از گروه دوسیتر $SO(۱,۴)$ می باشد و نمایش گروه دوسیتر بر پایه فضای نمایشی آن ارائه می گردد. با توجه به نقش گروه دوسیتر در تقارن اتم هیدروژن که در فصل چهارم به تفصیل مورد بررسی قرار می گیرد، در بخش سوم این فصل گروه دوسیتر رامعرفی و به بحث در مورد ویژگی های مختلف این گروه و نمایش های کاهش ناپذیر آن می پردازیم.

---

[1] noncompact

۲. ۱ گروه $SO(۳)$

۲. ۱.۱ معرفی گروه

مجموعه تمام تبدیلات خطی پیوسته در فضای اقلیدسی سه بعدی که تحت اثر آنها نرم یک بردار ناوردا می ماند، گروه $SO(۳)$ را تشکیل می دهد. اثر یک عضو عام از گروه $SO(۳)$ روی مولفه ها و پایه های بردار $\vec{x} = x^i \hat{e}_i$ به شکل زیر می باشد :

$$\begin{aligned} \hat{e'_i} &= \hat{e}_l \mathbf{R}^l_i \ , \\ x'^i &= \mathbf{R}^i_l x^l \ , \qquad\qquad \mathbf{R} \in SO(۳) \ . \end{aligned} \tag{۱.۲}$$

شرط ناوردایی نرم بردار تحت اثر گروه به این نتیجه منتهی می شود که :

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^T\mathbf{R} = I_d \ .$$

تمام ماتریسهای حقیقی که در این شرط صدق کنند، دارای دترمینان ± ۱ هستند. از آنجا که تمام دورانهای فیزیکی به صورت پیوسته به تبدیل همانی [۲] مربوط می شوند و دترمینان این تبدیل همانی برابر با واحد است، می توان شرط زیر را به عنوان شرط دومی که ماتریسهای R در آن صدق می کنند، معرفی نمود :

$$\det \mathbf{R} = ۱ \ .$$

یک عنصر از گروه $SO(۳)$ به سه پارامتر مستقل وابسته است. راههای مختلف اما محدودی برای انتخاب این پارامترها وجود دارد. دو نوع پارامتربندی که بیشترین کاربرد را دارند عبارتند از :

الف) پارامتربندی زاویه و محور

هر دورانی را می توان به صورت $\mathbf{R}_{\hat{n}}(\psi)$ توصیف کرد، بطوریکه بردار $\hat{n}$ جهت محور دوران را مشخص می کند و ψ زوایه دوران حول این محور را نشان می دهد. از آنجا که بردار واحد $\hat{n}$ توسط زاویه قطبی θ و زوایه سمتی φ مشخص می شود، می توان گفت که ماتریس دوران $\mathbf{R}$ توسط سه مختصه (ψ, θ, φ) پارامتر بندی شده است، بطوریکه :

$$۰ \leq \psi \leq \pi \ , \quad ۰ \leq \theta \leq \pi \ , \quad ۰ \leq \varphi < ۲\pi \ .$$

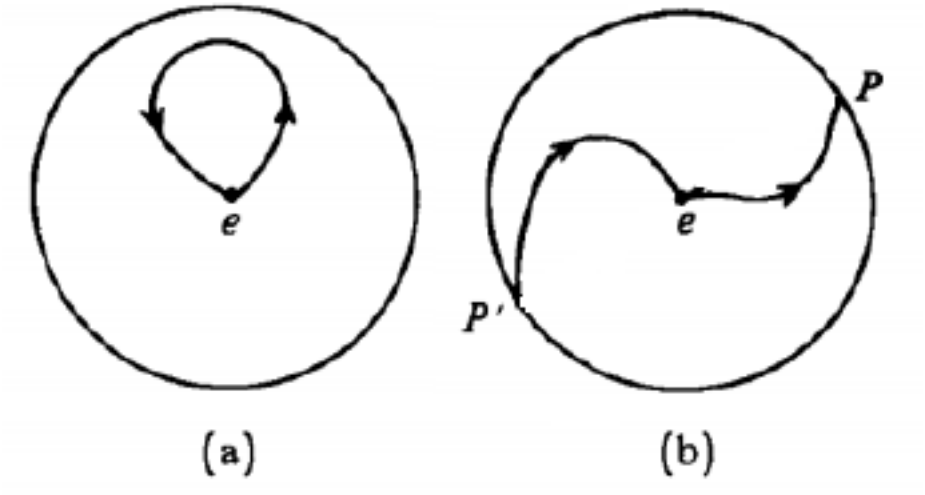
فضای پارامتری این گروه یک کره سه بعدی با شعاع π است و قید زیر بر این ساختار حاکم است :

$$\mathbf{R}_{-\hat{n}}(\pi) = \mathbf{R}_{\hat{n}}(\pi) \ .$$

---

[۲] identity transformation

با توجه به این قید دو نقطه واقع بر سطح کره که در دو انتهای یک قطر قرار دارند معادل یکدیگر هستند. فضایی که این چنین تعریف شود یک فضای فشرده [۳] و همبند مضاعف [۴] است. عبارت دوم به این معنی است که می توان دو دسته منحنی بسته در این فضا رسم کرد : دسته ای که به صورت پیوسته به یک نقطه تبدیل می شوند و دسته دیگر که برای داشتن این ویژگی باید یک بار کره را دور بزنند (شکل ۱.۲).



شکل(۱.۲) دو دسته از منحنی های بسته روی فضای پارامتری گروه $SO(۳)$ [۱].

در این شکل منحنی b یک منحنی بسته است زیرا دو انتهای این منحنی متناظر با یک نقطه در منیفلد هستند اما به هیچ شکلی نمی توان این منحنی را به صورت پیوسته به شکلی مانند منحنی a تبدیل کرد زیرا هیچ کدام از دو انتهای منحنی بدون قطع کردن منحنی به داخل کره حرکت نمی کنند و از طرف دیگر وقتی یکی از نقاط انتهایی روی سطح کره حرکت می کند، انتهای دیگر همواره در جهت مخالف و در امتداد قطر واصل آنها قرار می گیرد.

ب) زوایای اویلر

می دانیم که هر دوران در سه بعد، توسط زوایای اویلر[۵] به صورت کامل توصیف می شود. با استفاده از تعریف زوایای اویلر این امکان وجود دارد که هر دوران دلخواه را به صورت ضرب دورانهای ساده به صورت زیر تجزیه کرد :

$$\mathbf{R}(\alpha,\beta,\gamma) \;=\; \mathbf{R}_{۳}(\alpha)\mathbf{R}_{۲}(\beta)\mathbf{R}_{۳}(\gamma)\;, \qquad (۲.۲)$$

بطوریکه:

$$۰ \;\le\; \alpha,\gamma \;<\; ۲\pi \quad , \quad ۰ \;\le\; \beta \;\le\; \pi \;.$$

[۳] compact : یک فضای بسته و کراندار را یک فضای فشرده می نامند.

[۴] doubly connected

[۵] Euler angles